

Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής

Τάξη: ΣΤ΄

Η γάτα και το ποντίκι

1. Ένα ποντίκι βρίσκεται πάνω σε έναν τοίχο ύψους 2 μέτρων και κάτω στο έδαφος, περιμένοντας το, βρίσκεται μια γάτα. Κατά τη διάρκεια της ημέρας το ποντίκι κατεβαίνει μισό μέτρο, αλλά κατά τη διάρκεια της νύχτας ανεβαίνει $\frac{1}{3}$ του μέτρου. Η γάτα δε μετακινείται καθόλου. Σε πόσες ημέρες θα φτάσει το ποντίκι στο έδαφος;



Απάντηση:

Είναι ένα αρκετά απαιτητικό πρόβλημα που βασίζεται σε υπολογισμούς με κλάσματα.

Αρχικά ο λύτης καλείται να υπολογίσει με κλάσματα τη διαφορά της απόστασης που κατεβαίνει και ανεβαίνει το ποντίκι. Θα πρέπει δηλαδή κάποιος να μοντελοποιήσει την αφαίρεση κλασμάτων $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$. Πιστεύουμε ότι οι μαθητές που θα βρουν ότι πρέπει να κάνουν την αφαίρεση $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, θα μπορούν να εκτελέσουν και την αφαίρεση κάνοντας τα κλάσματα ομώνυμα.

Αφού κάποιος υπολογίσει το $\frac{1}{6}$ που είναι η διαφορά της απόστασης που καλύπτει το ποντίκι κάθε μέρα, καλείται να βρει σε πόσες μέρες θα κατέβει τα 2 μέτρα.

Εδώ επίσης χρειάζεται καλή κατανόηση των κλασμάτων για να σκεφτεί κάποιος ότι αφού τη μια μέρα το ποντίκι κατεβαίνει το $\frac{1}{6}$, για το 1 μέτρο χρειάζεται να κατεβεί $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}$, δηλαδή 6 μέρες. Αφού για το 1 μέτρο χρειάζεται 6 μέρες για το άλλο μισό μέτρο χρειάζεται $6+3=9$ μέρες. Και το τελευταίο μισό μέτρο το κατεβαίνει την 10 ημέρα. Με αυτή την τελευταία κίνηση έχει φτάσει στο έδαφος οπότε δεν ανεβαίνει ξανά.

Η χωριάτικη πίτα

2. Στο μαγαζί «Η χωριάτικη πίτα», ένα τετράγωνο ταψί πίτα κοστίζει 12 €. Από ένα ταψί, στο οποίο έμειναν τα $\frac{3}{4}$ της πίτας, η Δανάη αγόρασε τα $\frac{2}{3}$ της πίτας. Ποιο κλάσμα της αρχικής πίτας αγόρασε η Δανάη; Πόσα χρήματα πλήρωσε; Σχεδιάζω ένα σχήμα για να δείξω τη λύση.



Απάντηση:

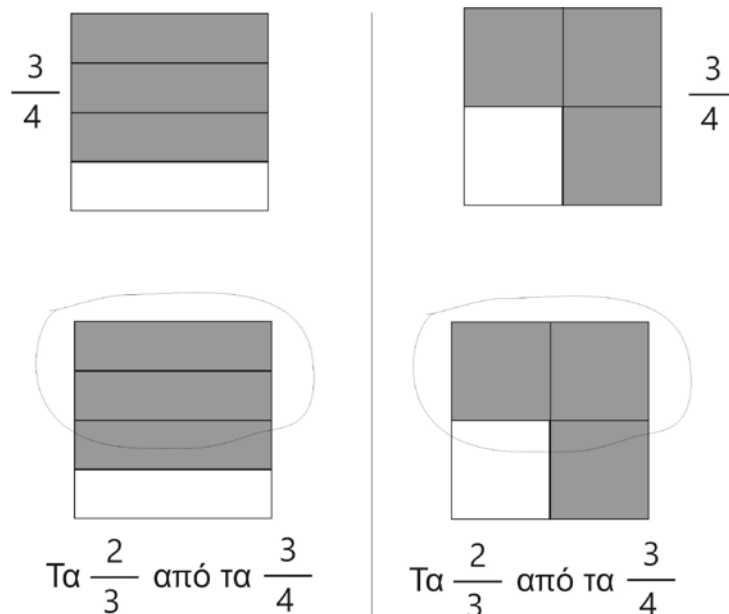
Το πρόβλημα αυτό είναι ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού κλασμάτων που θέτει σε κρίση την κατανόηση του πολλαπλασιασμού κλάσματος με κλάσμα ($\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$).

Κατανοώ τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων δε σημαίνει μόνο ότι μπορώ να εκτελώ την πράξη του πολλαπλασιασμού κλασμάτων, αλλά μπορώ να αναγνωρίζω πραγματικές καταστάσεις της καθημερινότητας και λεκτικά προβλήματα που περιέχουν την πράξη αυτή.

Ο πολλαπλασιασμός κλασμάτων εφαρμόζεται και σε καταστάσεις στις οποίες ζητείται ένα μέρος από κάποιο μέρος. Όπως στο συγκεκριμένο πρόβλημα, η Δανάη αγόρασε τα $\frac{2}{3}$ από τα $\frac{3}{4}$ της πίτας που είχαν μείνει, ένα μέρος του μέρους. Άρα αγόρασε τα $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{4}$ της αρχικής πίτας.

Εδώ ένα συχνό λάθος είναι να κάνει κάποιος αφαίρεση ($\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$), αλλά το αποτέλεσμα αυτό δε δείχνει το κλάσμα της αρχικής πίτας που αγόρασε η Δανάη, αλλά δείχνει το κλάσμα της πίτας που έμεινε μετά την αγορά από τη Δανάη.

Η χάραξη των σχημάτων που δείχνουν τα κλάσματα διαφωτίζει το λύτη και δίνει σημασία στο πρόβλημα. Γι' αυτό ζητήσαμε από το λύτη να σχεδιάσει. Δύο πιθανά σχέδια που διαφωτίζουν τον λύτη είναι τα παρακάτω.



Στην εικόνα φαίνεται ότι τα $\frac{2}{3}$ από τα $\frac{3}{4}$ είναι τα $\frac{2}{4}$ ή $\frac{1}{2}$. Αλλά το πιο βασικό είναι η πράξη που συνδέει αυτά τα δύο μεγέθη που είναι ο πολλαπλασιασμός $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Τα διδακτικά μηνύματα που στέλνουμε λοιπόν σε μαθητές και δασκάλους μέσω αυτού του

προβλήματος είναι τα εξής:

- Οι πράξεις στα κλάσματα και στην περίπτωση μας ο πολλαπλασιασμός κλασμάτων, δεν είναι μόνο η εκτέλεσή τους, αλλά κυρίως η σημασία τους σε καθημερινές καταστάσεις και προβλήματα.
Η σημασία του πολλαπλασιασμού γνησίων κλασμάτων είναι **μέρος του μέρους**.

Στα Μαθηματικά διδάσκουμε τη σημασία και όχι μόνο τεχνικές και κανόνες λύσης

- Η χάραξη διαγραμμάτων είναι διαφωτιστική και απαραίτητη για τη διδασκαλία των κλασμάτων.

Ο Χορός

3. Σε μια δεξίωση παραβρεθήκαν 7 άντρες και 6 γυναίκες. Κάθε άντρας χόρεψε μια και μόνο φορά με κάθε γυναίκα. Πόσα ζευγάρια χόρεψαν;



Είναι μια μοντελοποίηση του πολλαπλασιασμού 7×6 . Κάθε άνδρας χορεύει με 6 γυναίκες και δημιουργούνται 6 ζευγάρια χορού. Από τους 7 άνδρες δημιουργούνται $6 \times 7 = 42$ ζευγάρια χορού. Είναι ένας πολλαπλασιασμός με σημασία καρτεσιανού γινομένου, πολλαπλασιάζω άνδρες και γυναίκες και βρίσκω ζευγάρια χορού. Είναι οι συνδυασμοί των ζευγαριών που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό των 7 ανδρών με τις 6 γυναίκες.

Η πίτσα

4. Η Μαρία έχει μια πίτσα αγνώστου μεγέθους, από την οποία τρώει τα $\frac{4}{6}$.

Ο Ανδρέας έχει μια πίτσα αγνώστου μεγέθους, από την οποία τρώει τα $\frac{5}{6}$.

Η Μαρία τρώει περισσότερη πίτσα από τον Ανδρέα. Μπορείτε να εξηγήσετε πώς είναι δυνατόν να συμβαίνει αυτό;

Απάντηση:

Σε αυτό το πρόβλημα τίθεται σε κρίση μια πολύ βασική παραδοχή στα κλάσματα, την οποία πολλές φορές δεν παίρνουμε υπόψη μας.

Για να συγκρίνουμε δύο κλάσματα μεταξύ τους, πρέπει να προέρχονται από το ίδιο όλο.

Έτσι στο πρόβλημα αυτό τα κομμάτια της πίτσας που καλούμαστε να συγκρίνουμε, $4/6$ και $5/6$, δεν προέρχονται από το ίδιο όλο γιατί κάθε πίτσα όπως λέει το πρόβλημα είναι αγνώστου μεγέθους.

Επομένως ένα κομμάτι μικρότερου κλάσματος ($4/6$) που προέρχεται όμως από μεγαλύτερη πίτσα μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα κομμάτι μεγαλύτερου κλάσματος ($5/6$) που προέρχεται από μικρότερη πίτσα.

Εδώ πρόκειται για κατανόηση μιας κατάστασης με χαρακτηριστικά λόγου και αναλογίας. Συγκρίνεται μικρό κομμάτι από μεγάλη πίτσα με μεγάλο κομμάτι από μικρή πίτσα.

Θεωρούμε ότι η σωστή απάντηση σε αυτό το πρόβλημα δεν είναι εύκολη, δεδομένου ότι η σημερινή διδασκαλία στα κλάσματα δεν βασίζεται πολύ στην κατανόηση αλλά περισσότερο στην εφαρμογή κανόνων.

Οι μαθητές που απαντούν σωστά δείχνουν βαθιά κατανόηση στην έννοια του κλάσματος.

Το αγόρι, το κορίτσι και ο σκύλος

5. Ένα αγόρι, ένα κορίτσι και ένας σκύλος ανεβαίνουν στη ζυγαριά ανά δύο. Το αγόρι και το κορίτσι ζυγίζουν μαζί 118 κιλά. Το κορίτσι και ο σκύλος ζυγίζουν μαζί 72 κιλά. Το αγόρι και ο σκύλος ζυγίζουν μαζί 78 κιλά. Πόσα κιλά ζυγίζουν και οι τρεις μαζί; Πόσα κιλά ζυγίζει ο καθένας;

Απάντηση:

Είναι ένα πρόβλημα μεσαίας δυσκολίας, όπου ο λύτης πρέπει να ελέγχει καλά τα δεδομένα του προβλήματος που είναι πολλά. Τα βάρη αυτών που ζυγίζονται δίνονται ανά δύο. Επομένως, αν προσθέσουμε τα βάρη που δίνονται όλα μαζί αυτά θα είναι δύο φορές το βάρος των παιδιών και του σκύλου.

Όποιος λύνει σωστά ένα τέτοιο πρόβλημα σημαίνει ότι μπορεί να αναπαριστά νοερά και να

χειρίζεται τα δεδομένα του προβλήματος τα οποία είναι αρκετά.