

ΈΝΑ ΕΜΠΕΙΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Δημήτρης Πολυτίδης, Μαθηματικός στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση
Διεύθυνση κατοικίας: 25ης Μαρτίου 5, Σκύδρα, Τ.Κ 58500
Τηλέφωνο κατοικίας: 2381083137-6977335451
Email: eftim@otenet.gr
Διεύθυνση εργασίας: ΣΔΕ Γιαννιτσών, Βάρναλη 1, 58100 Γιαννιτσά
Email(σχολείου) mail-sde.giann.pel.sch.gr

Περίληψη

Η εργασία αναφέρεται στο πρόβλημα της διδασκαλίας των αρνητικών αριθμών στο Γυμνάσιο. Είναι κοινή διαπίστωση των καθηγητών ότι οι μαθητές συναντούν δυσκολίες κατανόησης στις πράξεις προσημασμένων αριθμών, και κυρίως των ετεροσήμων αριθμών. Επίσης, παρουσιάζεται μια έλλειψη και ασυνέχεια στην παρουσίαση αυτού του θέματος στο σχολικό εγχειρίδιο. Στην εργασία αυτή θα προσπαθήσουμε να καλύψουμε το κενό που υπάρχει. Στην αρχή παρουσιάζουμε σύντομα κάποια γενικά ιστορικά και διδακτικά στοιχεία σχετικά με τους αρνητικούς αριθμούς. Στη συνέχεια παραθέτουμε τη σημερινή λογική της διδασκαλίας για την εισαγωγή των πράξεων των ακεραίων αριθμών, όπως αυτή παρουσιάζεται στα σχολικά εγχειρίδια. Προσπαθώντας να καλύψουμε τις αδυναμίες και τα κενά της διδακτικής πρότασης του βιβλίου, προτείνουμε μια άλλη διδασκαλία με βάση ένα φυσικό μοντέλο για τις πράξεις των ακεραίων. Τέλος, γίνεται μία πρώτη πρόχειρη πειραματική αποτίμηση της διδακτικής αυτής πρότασης.

Εισαγωγή

Ένα βασικό πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε εμείς οι καθηγητές των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι η ενδεχόμενη υποτίμηση των δυσκολιών της διδασκαλίας των θεμελιωδών εννοιών λόγω της δικής μας πλήρους κατανόησης του θέματος. Ένα απλό και χαρακτηριστικό τέτοιο παράδειγμα είναι η διδασκαλία της έννοιας και των ιδιοτήτων των αρνητικών αριθμών. Οι μαθητές για να «τελειώνουν με το θέμα», συνήθως αρκούνται να αποστηθίσουν ότι $(+χ) - (-ψ) = χ + ψ$ και $(-χ) - (-ψ) = χψ$. Οι προσπάθειες μας να καταστήσουμε τις παραπάνω ιδιότητες προφανείς και αυτονόητες αποτυγχάνουν σε ένα σημαντικό τμήμα των μαθητών μας. Προφανώς κάτι τέτοιο δε μας ξενίζει. Η ανθρωπότητα πέρασε 1.500 χρόνια όπου η γνώση και μελέτη των αρνητικών υπήρχε μεν αλλά συγχρόνως οι αρνητικοί δεν ήταν «νομιμοποιημένοι» να υφίστανται. Από όσα γνωρίζουμε οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι δεν αναφέρουν τους αρνητικούς αριθμούς. Οι Αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν τους αρνητικούς (θυμόμαστε όλοι) το γνωστό «λείψις επί λείψιν πολλαπλασιασθείσα ποιεί υπαρξιν», πλην όμως δεν θεωρούσαν ότι οι αρνητικοί δύνανται να αποτελέσουν λύσεις εξίσωσης. Ανάλογες καταστάσεις μπορούμε να διαπιστώσουμε και στα Ινδικά, Κινεζικά και Ευρωπαϊκά μαθηματικά μέχρι και το 16^ο αιώνα. Οποιοδήποτε βιβλίο ιστορίας μαθηματικών δείχνει μια σαφή περιγραφή της κατάστασης. Η πρώτη συστηματική προσπάθεια εμπέδωσης και μελέτης τους χρεώνεται κατά κανόνα στον Cardano Conjectandi στο μνημειώδες έργο του Ars Magna, η δε οριστική τους θεμελίωση επιτεύχθηκε στο 19^ο αιώνα με τις συνολοθεωρητικές-αλγεβρικές μεθόδους που γνωρίζουμε.

Συνοπτική ματιά στην παρουσίαση των αρνητικών αριθμών στην Ελληνική εκπαίδευση των τελευταίων χρόνων

Σήμερα η διδασκαλία των αρνητικών αριθμών αρχίζει από την πρώτη Γυμνασίου. Εξετάσαμε έξι διαφορετικές εκδόσεις διδακτικών βιβλίων των Μαθηματικών που καλύπτουν μια χρονική περίοδο πενήντα χρόνων και διαπιστώσαμε ότι για την παρουσίαση των αρνητικών αριθμών αφιερώνονται κατά μέσο όρο 35 σελίδες [1]. Σύμφωνα με την εύστοχη διάκριση των χρησιμοποιούμενων μοντέλων διδασκαλίας που επιχειρεί ο Χ. Τουμάσης [2] έχουμε πέντε διαφορετικές προσεγγίσεις: εξ ορισμού προσέγγιση, εφαρμογή των μαθηματικών αρχών, προσέγγιση με φυσικό μοντέλο ερμηνείας, αναλογική προσέγγιση, ανακάλυψη με τη βοήθεια προτύπου. Το λογικά προφανές, ότι η εξ ορισμού προσέγγιση δεν οδηγεί στην κατανόηση και ότι η εφαρμογή των μαθηματικών αρχών όχι μόνο δεν επιφέρει πλήρη διαλεύκανση, αλλά αντίθετα προκαλεί συσκότιση στους μαθητές, διαπιστώνεται και εμπειρικά: όλοι μας έχουμε ανάλογες εμπειρίες στην τάξη. Βέβαια εκτός από την επιλογή ενός επιτιμημένου μοντέλου ή μίγματος μοντέλων παραμένει και το θεμελιώδες πρόβλημα της κατασκευής εξ' ίσου επιτυχημένων παραδειγμάτων στα πλαίσια της «ορθής» -αν κάτι τέτοιο υφίσταται- θεωρητικής προσέγγισης. Παράδειγμα, η ευρηματική ιδέα: εάν ο φίλος συμβολίζεται με το (+) και ο εχθρός με το (-). Ο φίλος του φίλου = φίλος, δηλαδή (+).(+)=(+). Ο φίλος του εχθρού = εχθρός, δηλαδή (+).(-)=(-). Ο εχθρός του φίλου = εχθρός, δηλαδή (-).(+)=(-). Ο εχθρός του εχθρού = φίλος, δηλαδή (-).(-)=(+). Αυτή η εμπειρική αναπαράσταση των πράξεων φαίνεται να μην είναι και τόσο πειστική και εφαρμόσιμη στην καθημερινή ζωή, γιατί, για παράδειγμα, μπορεί ο εχθρός του εχθρού ενός μαθητή μας να είναι και προσωπικός του εχθρός.

Οι αρνητικοί στο τελευταίο σχολικό εγχειρίδιο

Πρόσθεση Ακεραίων Αριθμών

Διδακτική προσέγγιση μέσω φυσικού μοντέλου που είναι το θερμόμετρο. Απεικονίζουμε δηλαδή τη θερμομετρική κλίμακα πάνω στον άξονα των $\chi\chi$ και κάθε αύξηση της θερμοκρασίας παρουσιάζεται ως μετακίνηση πάνω στον άξονα προς τα δεξιά, ενώ η μείωση της θερμοκρασίας παρουσιάζεται ως μετακίνηση πάνω στον άξονα προς τα αριστερά [3].

Προβλήματα

1. Ένα πρωινό η θερμοκρασία ήταν $+6^{\circ}\text{C}$ και το μεσημέρι ανέβηκε κατά 5°C . Πόση ήταν η θερμοκρασία το μεσημέρι; $(+6) + (+5) = +11$.
2. Ένα απόγευμα η θερμοκρασία ήταν -6°C και το βράδυ έπεσε κατά 2°C . Πόση ήταν η θερμοκρασία το βράδυ; $(-6) + (-2) = -8$.
3. Ένα πρωινό η θερμοκρασία ήταν -3°C και το μεσημέρι ανέβηκε κατά 5°C . Πόση ήταν η θερμοκρασία το μεσημέρι; $(-3) + (+5) = +2$.
4. Ένα απόγευμα η θερμοκρασία ήταν $+7^{\circ}\text{C}$ και το βράδυ έπεσε κατά 10°C . Πόση ήταν η θερμοκρασία το βράδυ; $(+7) + (-10) = -2$.

Άρα για να προσθέσουμε δύο ομόσημους ακεραίους, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα αυτό βάζουμε το πρόσημό τους. Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους ακεραίους, αφαιρούμε τη μικρότερη απόλυτη τιμή από τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημό του ακέραιου που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Αφαίρεση Ακεραίων Αριθμών

Διδακτική προσέγγιση μέσω φυσικού μοντέλου που είναι το θερμόμετρο, ορισμός της αφαίρεσης των ακεραίων και του βοηθητικού αγνώστου [4].

Πρόβλημα

Ένα πρωινό η θερμοκρασία ήταν -2°C και το μεσημέρι $+1^{\circ}\text{C}$. Πόση ήταν η μεταβολή της θερμοκρασίας το διάστημα αυτό; Αν παραστήσουμε με χ τη μεταβολή της θερμοκρασίας, θα έχουμε

$(-2) + \chi = +1$. Η θερμοκρασία για να πάει από το -2° στο $+1$, πρέπει να αυξηθεί κατά 3°C ή $\chi = +3$. Ο αριθμός χ δηλαδή αν προστεθεί στο -2 μας δίνει άθροισμα $+1$, λέγεται διαφορά του -2 από το $+1$ και συμβολίζεται $\chi = (+1) - (-2)$. Επομένως πρέπει $(+1) - (-2) = +3$. Γνωρίζουμε ότι $(-2) + \chi = +1$ και $(-2) + (+2) = 0$ άρα $(+1) + (-2) + (+2) = +1$. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα $(+1) + (+2)$ είναι ο αριθμός χ , γιατί όταν προστεθεί με το (-2) μας δίνει το $+1$. Έχουμε λοιπόν $\chi = (+1) + (+2)$ και $\chi = (+1) - (-2)$ δηλαδή $(+1) - (-2) = (+1) + (+2) = +3$. Για να αφαιρέσουμε επομένως από το $+1$ τον -2 προσθέτουμε στον $+1$ τον αντίθετο του -2 .

Τέλος για να βρούμε τη διαφορά δύο ακεραίων αριθμών προσθέτουμε στον μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου.

Πολλαπλασιασμός Ακεραίων Αριθμών

Διδακτική προσέγγιση: ανακάλυψη με τη βοήθεια προτύπου [5]. Ο πολλαπλασιασμός δύο θετικών είναι ήδη γνωστός $(+3) \cdot (+5) = +15$.

Γινόμενο ετεροσήμων

$(+5) \cdot (+4) = +20$
$(+5) \cdot (+3) = +15$
$(+5) \cdot (+2) = +10$
$(+5) \cdot (+1) = +5$
$(+5) \cdot 0 = 0$
$(+5) \cdot (-1) =$
$(+5) \cdot (-2) =$
Πίνακας 1

Παρατηρούμε στον διπλανό πίνακα 1 ότι μειώνοντας το δεύτερο παράγοντα διαδοχικά κατά ένα τα γινόμενα μειώνονται διαδοχικά κατά πέντε. Αν θέλουμε να συνεχίσουμε τους πολλαπλασιασμούς και μετά το μηδενισμό του δεύτερου παράγοντα, είναι λογικό να δεχτούμε ότι το γινόμενο θα συνεχίσει να μειώνεται κατά πέντε μονάδες άρα
 $(+5) \cdot (-1) = -5$ $(+5) \cdot (-2) = -10$

$(+3) \cdot (+2) = +6$
$(+2) \cdot (+2) = +4$
$(+1) \cdot (+2) = +2$
$0 \cdot (+2) = 0$
$(-1) \cdot (+2) =$
$(-2) \cdot (+2) =$
$(-3) \cdot (+2) =$
Πίνακας 2

Παρατηρούμε στον διπλανό πίνακα 2 ότι μειώνοντας τον πρώτο παράγοντα διαδοχικά κατά ένα τα γινόμενα μειώνονται διαδοχικά κατά δύο. Αν θέλουμε να συνεχίσουμε τους πολλαπλασιασμούς και μετά το μηδενισμό του πρώτου παράγοντα, είναι λογικό να δεχτούμε ότι το γινόμενο θα συνεχίσει να μειώνεται κατά δύο μονάδες άρα
 $(-1) \cdot (+2) = -2$ $(-2) \cdot (+2) = -4$.

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους ακεραίους, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο αυτό βάζουμε το πρόσημο μείον (-).

Γινόμενο αρνητικών

$(-3) \cdot (+4) = -12$
$(-3) \cdot (+3) = -9$
$(-3) \cdot (+2) = -6$
$(-3) \cdot (+1) = -3$
$(-3) \cdot 0 = 0$
$(-3) \cdot (-1) =$
$(-3) \cdot (-2) =$
Πίνακας 3

Παρατηρούμε στον διπλανό πίνακα 3 ότι μειώνοντας το δεύτερο παράγοντα διαδοχικά κατά ένα τα γινόμενα αυξάνονται διαδοχικά κατά τρία. Αν θέλουμε να συνεχίσουμε τους πολλαπλασιασμούς και μετά το μηδενισμό του δεύτερου παράγοντα, είναι λογικό να δεχτούμε ότι το γινόμενο θα συνεχίσει να αυξάνεται κατά τρεις μονάδες άρα
 $(-3) \cdot (-1) = +3$ $(-3) \cdot (-2) = +6$.

Επομένως:

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο αρνητικούς ακεραίους, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο αυτό βάζουμε το πρόσημο συν (+).

Παρατηρούμε ότι υπάρχει προφανής ασυνέχεια στην παρουσίαση του όλου θέματος. Η πρόσθεση και η αφαίρεση διδάσκονται μέσω φυσικού παραδείγματος, ενώ ο πολλαπλασιασμός γίνεται με τη βοήθεια προτύπου. Η αλλαγή αυτή γίνεται πολύ γρήγορα και προκαλεί χάσμα στην μαθησιακή διαδικασία του μαθητή. Όταν δηλαδή αυτός αρχίζει ήδη να συλλαμβάνει τη σημασία των αρνητικών αριθμών με τη βοήθεια οικείων του παραστάσεων (θερμόμετρο), ξαφνικά καλείται να συνεχίσει την κατανόηση και ανακάλυψη των ιδιοτήτων των αρνητικών χωρίς φυσικό μοντέλο, αλλά εφαρμόζοντας αμέσως έννοιες που μόλις του παρουσιάστηκαν με το φυσικό μοντέλο. Προφανώς υπάρχει πρόβλημα με τον τρόπο αυτό παρουσίασης του διδακτικού βιβλίου. Ο καθηγητής των μαθηματικών θα πρέπει να μην ακολουθήσει την προτεινόμενη πορεία παρουσίασης του βιβλίου, αλλά να παρέμβει και να καλύψει αυτό το κενό. Σαφέστατα και οι δύο προσεγγίσεις έχουν σημαντικά πλεονεκτήματα. Όμως, η εξ απορόπτου διαδοχή τους έχει ως πιθανότερο αποτέλεσμα την αμοιβαία ακύρωση τους.

Ένα εμπειρικό μοντέλο διδακτικής προσέγγισης των πράξεων των αρνητικών αριθμών

Πιστεύουμε ότι για την καλύτερη εισαγωγή των πράξεων μεταξύ αρνητικών αριθμών πρέπει να υπάρχει ένα κατανοητό εμπειρικό μοντέλο που να καλύπτει πειστικά όλες τις περιπτώσεις. Χρησιμοποιούμε αυτό το εμπειρικό μοντέλο και οδηγούμε τους μαθητές να ανακαλύψουν μόνοι τους κανόνες που διέπουν τις πράξεις των προσημασμένων αριθμών.

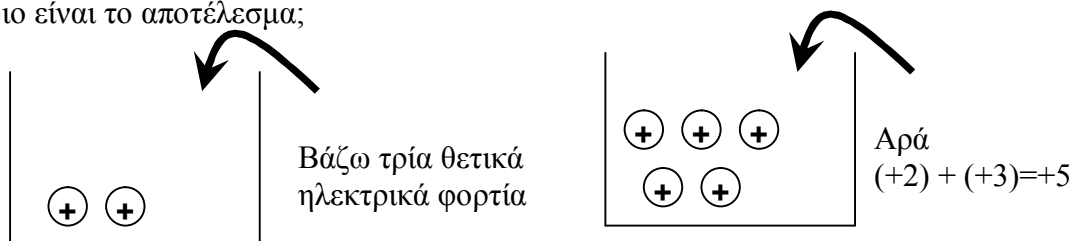
Ορίζουμε τις πράξεις των αρνητικών αριθμών με τη βοήθεια ενός μοντέλου που είναι το ηλεκτρικό φορτίο. Ένα θετικό ηλεκτρικό φορτίο και ένα αρνητικό ηλεκτρικό φορτίο έχουν άθροισμα μηδέν. Ένας κάδος συμπληρώνει το σενάριο. Βάζω στον κάδο ηλεκτρικά φορτία σημαίνει προσθέτω, ενώ βγάζω από τον κάδο ηλεκτρικά φορτία σημαίνει αφαιρώ [6]. Για κάθε πράξη δίνονται στους μαθητές τα αντίστοιχα προβλήματα, ώστε οι μαθητές να είναι ικανοί μέσα από τη διαδικασία λύσης των προβλημάτων να ανακαλύψουν τους κανόνες των πράξεων. Η παρουσίαση αυτού του μοντέλου στην τάξη μπορεί να γίνει με φύλλα εργασίας. Ο διδακτικός στόχος είναι: μέσα από τη διαδικασία λύσης των προβλημάτων οι μαθητές να ανακαλύψουν τους κανόνες των πράξεων των ακεραίων. Η μορφή διδασκαλίας μπορεί να είναι ατομική ή ομαδοσυνεργατική με προτιμότερη την δεύτερη, στο βαθμό που οι επιπτώσεις της στον κοινωνικό, ψυχολογικό, γνωστικό τομέα είναι θετικές [7].

Πρόσθεση Ακεραίων

Πρόβλημα 1

Δύο θετικά ηλεκτρικά φορτία τα προσθέτω με τρία θετικά ηλεκτρικά φορτία.

Ποιο είναι το αποτέλεσμα;



Πρόβλημα 2

Τρία αρνητικά ηλεκτρικά φορτία τα προσθέτω με ένα αρνητικό ηλεκτρικό φορτίο.

Ποιο είναι το αποτέλεσμα;

Πρόβλημα 3

Τέσσερα θετικά ηλεκτρικά φορτία τα προσθέτω με δύο αρνητικά ηλεκτρικά φορτία.
Ποιο είναι το αποτέλεσμα;

Πρόβλημα 4

Πέντε αρνητικά ηλεκτρικά φορτία τα προσθέτω με τρία θετικά ηλεκτρικά φορτία.
Ποιο είναι το αποτέλεσμα;

Ποιο είναι το αποτέλεσμα των προσθέσεων

$$(-17)+(-13)=$$

$$(+18)+(-12)=$$

$$(+17)+(-28)=$$

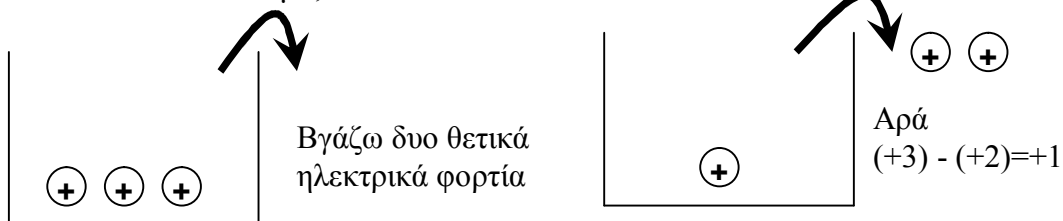
$$(+25)+(+20)=$$

Μπορείτε να ανακαλύψετε έναν κανόνα που να μας δίνει την πράξη της πρόσθεσης των ακεραίων αριθμών;

Αφαίρεση Ακεραίων

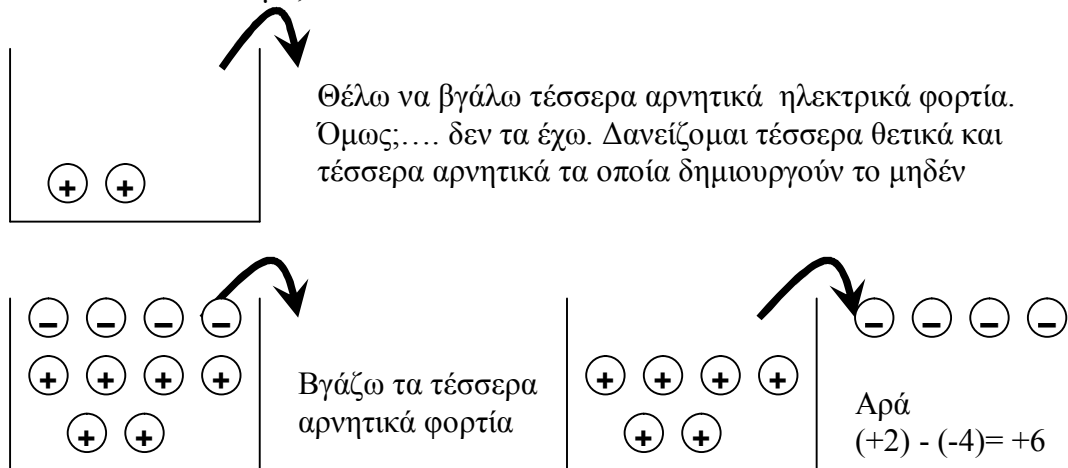
Πρόβλημα 1

Από τρία θετικά ηλεκτρικά φορτία αφαιρώ δύο θετικά ηλεκτρικά φορτία.
Ποιο είναι το αποτέλεσμα;



Πρόβλημα 2

Από δύο θετικά ηλεκτρικά φορτία αφαιρώ τέσσερα αρνητικά ηλεκτρικά φορτία.
Ποιο είναι το αποτέλεσμα;



Πρόβλημα 3

Από δύο αρνητικά ηλεκτρικά φορτία αφαιρώ τέσσερα αρνητικά ηλεκτρικά φορτία.

Ποιο είναι το αποτέλεσμα;

Πρόβλημα 4

Από πέντε αρνητικά ηλεκτρικά φορτία αφαιρώ τρία θετικά ηλεκτρικά φορτία.

Ποιο είναι το αποτέλεσμα;

Ποιο είναι το αποτέλεσμα των αφαιρέσεων:

$$(-27)-(+11)=$$

$$(+18)-(-12)=$$

$$(+25)-(+14)=$$

$$(-13)-(-24)=$$

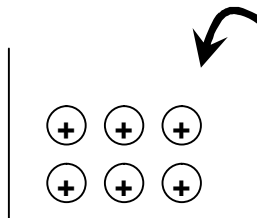
Μπορείτε να ανακαλύψετε έναν κανόνα που να μας δίνει την πράξη της αφαίρεσης των ακεραίων αριθμών;

Πολλαπλασιασμός Ακεραίων

Πρόβλημα 1

Βάζουμε στο δοχείο τρεις δυάδες των δύο θετικών ηλεκτρικών φορτίων.

Ποιο είναι το αποτέλεσμα;



Βάζω τρεις δυάδες σημαίνει + 3 ποσότητες των δύο θετικών ηλεκτρικών φορτίων (+2)

Άρα
 $(+3) \cdot (+2) = +6$

Πρόβλημα 2

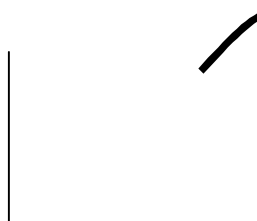
Βάζουμε στο δοχείο τρεις δυάδες των δύο αρνητικών ηλεκτρικών φορτίων.

Ποιο είναι το αποτέλεσμα;

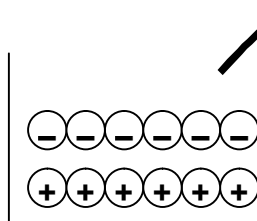
Πρόβλημα 3

Βγάζουμε από το δοχείο τρεις δυάδες των δύο θετικών ηλεκτρικών φορτίων.

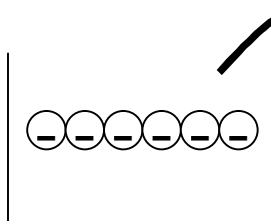
Ποιο είναι το αποτέλεσμα;



Θέλω να βγάλω τρεις δυάδες των δύο θετικών ηλεκτρικών φορτίων. Όμως;... δεν τις έχω. Δανείζομαι έξι θετικά και έξι αρνητικά τα οποία δημιουργούν το μηδέν



Βγάζω τα έξι θετικά φορτία



Άρα
 $(-3) \cdot (+2) = -6$

Πρόβλημα 4

Βγάζουμε από το δοχείο τρεις δυάδες των δύο αρνητικών ηλεκτρικών φορτίων.

Ποιο είναι το αποτέλεσμα;

Ποιο είναι το αποτέλεσμα των πολλαπλασιασμών:

$$(+8).(-12)=$$

$$(-7).(+15)=$$

$$(+10).(+7)=$$

$$(-15).(-6)=$$

Μπορείτε να ανακαλύψετε έναν κανόνα που να μας δίνει την πράξη του πολλαπλασιασμού των ακεραίων αριθμών;

Το μοντέλο δεν έχει ελεγχθεί ακόμη με όρους που ακολουθούν αυστηρά τους κανόνες παιδαγωγικού πειραματισμού σε τάξη. Δεν έχουμε πλήρη καταγραφή της επιτυχίας / αποτυχίας σε κάθε βήμα του ποσοστού μαθητών – χρονική διάρκεια επίτευξης κάθε στόχου-στατιστική διαπραγμάτευση των δεδομένων. Οι λόγοι θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως «τεχνικοί». Ο συγγραφέας της εργασίας μπορεί να αναφερθεί πιο διεξοδικά μονάχα σ' ένα δείγμα τάξης τριάντα ατόμων όπου δίδασκε ο ίδιος και το οποίο φυσικά δεν διεκδικεί αξιώσεις αντιπροσωπευτικότητας. Από τους τριάντα μαθητές οι δέκα είχαν ιστορικό ανεπαρκούς επίδοσης στα μαθηματικά, οι οκτώ θα μπορούσαν να χαρακτηρισθούν καλοί και οι δώδεκα κινούνται στο ενδιάμεσο χώρο. Η συνηθισμένη αντίδραση των δέκα «ανεπαρκών» είναι αδιαφορία και άρνηση συμμετοχής στο μάθημα. Στο αντικείμενο διδασκίας παρατηρήθηκε καθολική συμμετοχή.

Στην πρόσθεση, οι μαθητές παραλλήλισαν χωρίς πρόβλημα το φυσικό μοντέλο με τις έννοιες και την πράξη της πρόσθεσης. Στην εξαγωγή του κανόνα έβγαλαν δέκα μαθητές χωρίς την παρέμβαση του διδάσκοντα. (αυτοί οι δέκα προέρχονταν κυρίως από την ομάδα των «καλών»). Το αποτέλεσμα είναι αν όχι παρόμοιο σίγουρα συγκρίσιμο με το αποτέλεσμα που φέρνει το μοντέλο του θερμομέτρου: υπάρχει προφανώς ισοδυναμία των μεθόδων.

Στην αφαίρεση το προφανές σημείο δυσκολίας είναι το πρόβλημα δύο, όπου πρέπει να θεωρήσουμε ότι προσθέτουμε αρχικά στο δοχείο τέσσερα θετικά και τέσσερα αρνητικά φορτία με συνολικό άθροισμα μηδέν. Ο διδάσκων θεωρούσε εκ προοιμίου ανυπέρβλητη μια τέτοια εισαγωγή και είχε προετοιμάσει την παρέμβαση προσέχοντας ιδιαίτερα το σημείο όπου θα θεωρήσουν πώς παράγουμε από το μηδέν Δύο μαθητές έκαναν σωστή εισαγωγή χωρίς παρακίνηση. Οι υπόλοιποι συμφώνησαν με την παρέμβαση του διδάσκοντος. Η συμφωνία ήταν ουσιαστική όπως ελέγχθηκε / διαπιστώθηκε από τα προβλήματα που ακολούθησαν. Στην διατύπωση του κανόνα υπήρξε αδυναμία, μόνον οι δύο επιτυγχόντες προηγουμένως κατόρθωσαν να τον διατυπώσουν αυτόνομα.

Στον πολλαπλασιασμό είναι προφανής η δυσκολία του $(-).(+)=(-)$. Στην περίπτωση μας αναπαριστούμε με φορτία το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού των θετικών ακεραίων, παρόμοια ενεργούμε και στους αρνητικούς. Αυτό καταρχήν έγινε κατανοητό από τους οκτώ «καλούς». Για τους υπόλοιπους υπήρξε ανάγκη παρέμβασης. Το εντυπωσιακό αποτέλεσμα όμως είναι ότι μετά την αποδοχή του γεγονότος αυτού, το $(-).(-)=+$ προέκυψε ως απολύτως φυσική συνέπεια για την πλειοψηφία των μαθητών. Το ποσοστό των μαθητών που διατύπωσε τον κανόνα αυξήθηκε σημαντικά.

Αποτιμώντας τα αποτελέσματα, διαπιστώσαμε τα εξής:

1. Η χρονική διάρκεια της διδασκαλίας ελαττώνεται σημαντικά. Απαιτήθηκαν τρεις διδακτικές ώρες (μία ανά πράξη).

2. Υπήρξε περίπου καθολική ενεργοποίηση των μαθητών με τελικό αποτέλεσμα την κατανόηση των ιδιοτήτων.

3. Προηγήθηκε σε ένα μικρό τμήμα των μαθητών η αυτόνομη κατάκτηση της σχετικής γνώσης. Με δεδομένο μάλιστα ότι το ποσοστό επιτυχίας σ' αυτόν τον τομέα καλυτέρευσε στο τρίτο βήμα (πολλαπλασιασμός), μπορούμε να μιλήσουμε για ένδειξη επιτυχούς δράσης της μαθησιακής διαδικασίας.

Résumé

Ce travail porte sur la problématique concernant l'enseignement des nombres négatifs au Gymnase Crèque. En résumant tout court quelques aspects des tendances actuelles concernant leur enseignement, proposons un modèle continu mis en correspondance avec la nature et nous tendons une évaluation de son application expérimentale.

Βιβλιογραφία

1. Θωμαΐδης Χρ. Γιάννης, Επιμορφωτικό Υλικό για το Πρόγραμμα Σύγχρονες Κατευθύνσεις Εμπλουτισμού της Μαθηματικής Παιδείας, Θεσσαλονίκη 1998, 43-51.
2. Τουμάσης Μπάμπης, Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών, Gutenberg 1994 σελ. 266-276.
3. Αλμπινίσης Α-Αντύπας Ζ-Ευσταθόπουλος Ε-Κλαουδάτος Ν-Παπασταυρίδης Σ, Μαθηματικά Α' Γυμνασίου, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα 1996, σελ. 309-312.
4. Αλμπινίσης Α-Γρηγοριάδης Σ-Ευσταθόπουλος Ε-Κλαουδάτος Ν-Παπασταυρίδης Σ-Σβέρκος Α, Μαθηματικά Β' Γυμνασίου, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα 1996, σελ. 30-33.
5. Αλμπινίσης Α-Γρηγοριάδης Σ-Ευσταθόπουλος Ε-Κλαουδάτος Ν-Παπασταυρίδης Σ-Σβέρκος Α, Μαθηματικά Β' Γυμνασίου, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα 1996, σελ. 30-33.
6. David W Lowry, Earl G Ockenga, Walter E Rucker, General Mathematics, HEATE and Go Lexingdon 1989, σελ. 410-423.
7. Ηλίας Γ. Ματσαγγούρας, Στρατηγικές Διδασκαλίας, Παιδαγωγική Σειρά-GUTENBERG, Αθήνα 2000, σελ. 509-571.