Εισαγωγή

Η εργασία αυτή έχει στόχο να παρουσιάσει μια εναλλακτική πρόταση για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου, αντλώντας περιεχόμενα από τη λαϊκή παράδοση και λαμβάνοντας υπόψη της σύγχρονες τάσεις που επικρατούν στη διδασκαλία της Γεωμετρίας. Η πρόταση αυτή εντάσσεται στο γενικότερο πλαίσιο των ***Μαθηματικών της φύσης και της ζωής***, μιας συνολικότερης πρότασης που ξεκίνησε από το Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης της Παιδαγωγικής Σχολής της Φλώρινας για τη διδασκαλία των μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου.

Αφού αρχικά θεμελιώνεται θεωρητικά μια τέτοια πρόταση, στη συνέχεια παρουσιάζεται ό φάκελος εκπαιδευτικού υλικού που δημιουργήθηκε για να την υλοποιήσει. Το βασικό εκπαιδευτικό πακέτο περιλαμβάνει ενημερωτικό υλικό για το δάσκαλο και δραστηριότητες που μπορούν να πραγματοποιηθούν στις Α', Β', και Γ' τάξη του δημοτικού σχολείου, συμπληρωματικά για τις ενότητες τις γεωμετρίας που υπάρχουν στα νέα βιβλία μαθηματικών του δημοτικού. Αυτό το υλικό δοκιμάστηκε πειραματικά σε τρεις τάξεις, από τρεις διαφορετικές περιπτώσεις εκπαιδευτικών, προκειμένου να δούμε πως λειτουργεί στην πράξη και πως το χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί στην τάξη τους. Όλη η διαδικασία της εφαρμογής και τα αποτελέσματά της παρουσιάζονται στα επόμενα κεφάλαια. Ας δούμε όμως αναλυτικότερα τα περιεχόμενα.

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας αρχικά παρουσιάζονται οι λόγοι που καθιστούν τη γεωμετρία χρήσιμη ως περιεχόμενο στα σχολικά αναλυτικά προγράμματα και συζητούνται τα οφέλη από τη διδασκαλία της, έτσι όπως παρουσιάζονται στη βιβλιογραφία. Στη συνέχεια αποσαφηνίζονται τα βασικά χαρακτηριστικά της γεωμετρίας ως μιας ξεχωριστής περιοχής συζητώντας τέσσερεις διαστάσεις της (μέτρηση- απεικόνιση, πραγματικός κόσμος, αναπαράσταση, μαθηματική υποστήριξη), έτσι όπως τις ορίζει ο Usiskin. Η διάκριση αυτή είναι ίσως παλιά, αλλά προσφέρει ένα καλά ορισμένο πλαίσιο

ανάπτυξης των χαρακτηριστικών της γεωμετρίας. Στο τελευταίο μέρος συζητείται η άποψη που εμφανίζεται στη βιβλιογραφία από τους Τσανάκη και Κούρκουλο πως η γεωμετρία είναι μια προνομιακή διδακτικά περιοχή. Τα επιχειρήματα που στηρίζουν αυτήν την άποψη σχετίζονται τόσο με χαρακτηριστικά της γεωμετρίας (εποπτεία, σχέση με την αισθητική κ.α.) όσο και με τη χρησιμότητα της για άλλες μαθηματικές δεξιότητες, όπως η επίλυση προβλήματος, η κατασκευές, η γραφικές απεικονίσεις.

Το δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας προσπαθεί να δώσει ένα περίγραμμα της διδασκαλίας της γεωμετρίας στις 3 πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου. Την περίοδο της συγγραφής αυτής της εργασίας τα αναλυτικά προγράμματα του ελληνικού δημοτικού σχολείου είχαν αλλάξει και νέα εγχειρίδια συμβατά με τα προγράμματα αυτά ετοιμάζονταν να μπουν στην εκπαίδευση. Έτσι γίνεται συγκριτική παρουσίαση του «παλαιότερου» και του νέου προγράμματος σπουδών. Η αλλαγή αυτή είναι σημαντική σε πολλά επίπεδα και σε ότι αφορά τη γεωμετρία. Οι αλλαγές που εισέρχονται δεν είναι επιφανειακές, αλλά διακατέχονται από μια γενικότερη φιλοσοφία που διαμορφώθηκε, μεταξύ άλλων, και από την επίδραση των νέων τάσεων της διδακτικής της γεωμετρίας διεθνώς.

Οι νέες αυτές τάσεις αναπτύσσονται αναλυτικότερα στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας. Αρχικά παρουσιάζεται η προσέγγιση των ρεαλιστικών μαθηματικών, μια προσπάθεια που ξεκίνησε από το ινστιτούτο Freudenthal στην Ολλανδία. Στηριγμένα στον κονστρουκτιβισμό και στη διδακτική φαινομενολογία του Freudenthal, τα ρεαλιστικά μαθηματικά εισάγουν την έννοια της μαθηματικοποίησης. Βασικός τους στόχος δηλαδή είναι να οδηγηθούν οι μαθητές στην αντιμετώπιση των πλαισιωμένων καταστάσεων που τους δίνονται με μαθηματικά εργαλεία. Κάτι τέτοιο συμβαίνει και στη γεωμετρία, όπου υπάρχει μια κατασκευαστική λογική και μια απομάκρυνση από το φορμαλισμό της τυπικής ευκλείδειας γεωμετρίας. Αυτό σημαίνει ότι τα ρεαλιστικά μαθηματικά ενδιαφέρονται επίσης για «κλασσικές» μαθηματικές

διαδικασίες, όπως η διατύπωση και ο έλεγχος των υποθέσεων, ή η λογική σκέψη, αλλά μέσα από το παιχνίδι και τον πειραματισμό και όχι απαραίτητα με την στεγνή μαθηματική γλώσσα. Επίσης δίνεται ιδιαίτερη σημασία στους μετασχηματισμούς και στις μετρήσεις.

Η δεύτερη περίπτωση που περιγράφεται είναι τα Principles and Standards for School Mathematics, ένα πλαίσιο αρχών και στόχων για τα σχολικά μαθηματικά που αναπτύχθηκαν στις Η.Π.Α. Όσο αφορά τα περιεχόμενα διδασκαλίας εισάγονται θέματα όπως η κίνηση σε δύο διαστάσεις και ο προσδιορισμός θέσεων στο επίπεδο, οι μετασχηματισμοί και ο χειρισμός των γεωμετρικών σχημάτων και τέλος η χρήση των γεωμετρικών μοντέλων για την επίλυση προβλημάτων. Η μεθοδολογία ακολουθεί βιωματική λογική και γίνεται ιδιαίτερος λόγος για την άτυπη γεωμετρία που μπορεί να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά στη διδασκαλία. Επίσης τονίζεται ο ρόλος των Νέων Τεχνολογιών και η σημασία τους στην ανάπτυξη γεωμετρικής σκέψης.

Τέλος γίνεται ιδιαίτερη αναφορά σε μια πρόταση για τη διδασκαλία των μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου που δημιουργήθηκε στην Ελλάδα, στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Φλώρινας, «τα μαθηματικά της φύσης και της ζωής». Λαμβάνοντας υπόψη τις τάσεις που περιγράψαμε και παραπάνω και πραγματοποιώντας πλήθος ερευνών στους μαθητές «τα μαθηματικά της φύσης και της ζωής» προτείνουν μια γενικότερη φιλοσοφία διδασκαλίας των μαθηματικών και αποτυπώνουν αυτή τη φιλοσοφία μεταξύ άλλων και σε ένα συγκεκριμένο εκπαιδευτικό υλικό. Μέρος αυτού του υλικού αποτελούν τα σχολικά εγχειρίδια για την Α' και Γ' τάξη του δημοτικού σχολείου, που θα εισαχθούν στην εκπαίδευση τη σχολική χρονιά 2006-2007. «τα μαθηματικά της φύσης και της ζωής» διευρύνουν τα περιεχόμενα διδασκαλίας της γεωμετρίας και αξιοποιούν τις πλούσιες γνώσεις άτυπης γεωμετρίας που φέρουν οι μαθητές από το εξωσχολικό τους περιβάλλον. Προτείνουν βιωματική διδασκαλία σε ομάδες μαθητών και ένα πλούσιο

πλαίσιο ανάπτυξης των γεωμετρικών περιεχομένων που να αναδεικνύει την ομορφιά των μαθηματικών, τη σύνδεσή τους με την τέχνη και τη δημιουργική έκφραση και τη ζωή.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται λόγος για τον χώρο των εθνομαθηματικών. Τα εθνομαθηματικά πρεσβεύουν ότι τα μαθηματικά δεν είναι μια αφηρημένη γνώση, φορμαλιστική και κοινή για όλους, αλλά είναι προϊόν των ανθρώπινων πολιτισμών. Συνεπώς ως πολιτισμικό προϊόν τα μαθηματικά διαφέρουν από περιοχή σε περιοχή και η ψευδής εικόνα των μαθηματικών ως μια κοινής γλώσσας των ανθρώπων προέρχεται από την επιβολή των ευρωπαϊκών μαθηματικών για πολιτικούς ή οικονομικούς λόγους. Στόχος λοιπόν των εθνομαθηματικών είναι να ανακαλύψουν αυτά τα μαθηματικά, να τα αναδείξουν και να τα χρησιμοποιήσουν στη διδασκαλία. Πέρα από τις επιμέρους διαφωνίες που έχουν εκφραστεί για το κίνημα των εθνομαθηματικών, οι οποίες αναπτύσσονται στη συνέχεια, αναφέρεται η βασική συνεισφορά των εθνομαθηματικών στο χώρο της γεωμετρικής εκπαίδευσης. Αυτή είναι η διαπίστωση ότι η γεωμετρία είναι μια περιοχή που έχει σαφείς πολιτισμικές επιρροές, που αναπτύχθηκε σε συνάρτηση με την τέχνη και την αισθητική και μπορεί να συνεισφέρει στη διερεύνηση τέτοιων διαστάσεων στη διδασκαλία, εμπλουτίζοντας την και διευρύνοντας την άποψη μαθητών και δασκάλων για το τι είναι μαθηματικά.

Στο πέμπτο κεφάλαιο, πολύ σύντομα αναφέρονται τα βασικά θεωρητικά σημεία που εμφανίζονται στη βιβλιογραφία σχετικά με τη δημιουργία και την αξιολόγηση προγραμμάτων σπουδών γεωμετρίας. Το θεωρητικό αυτό πλαίσιο που περιγράφεται αποτέλεσε έναν οδηγό για τη δημιουργία του εκπαιδευτικού υλικού «γεωμετρία από όλον τον κόσμο»

Στο έκτο κεφάλαιο που ακολουθεί περιγράφεται η διδακτική μας πρόταση. Αρχικά παρουσιάζονται οι βασικές της αρχές, στη συνέχεια οι στόχοι και τα περιεχόμενα του διδακτικού πακέτου. Γίνεται λόγος για τη μεθοδολογία που προτείνεται για τη διδακτική χρήση του υλικού και όλα τα

παραπάνω συνδέονται με όσα αναφέρθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια για τη διδακτική της γεωμετρίας και τα εθνομαθηματικά.

Στο έβδομο κεφάλαιο αρχίζει η περιγραφή της διαδικασίας της πειραματικής εφαρμογής του υλικού σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις εκπαιδευτικών. Αρχικά γίνεται λόγος για τη μεθοδολογία και τον σχεδιασμό της έρευνας. Η έρευνα έγινε σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις εκπαιδευτικών.: η πρώτη περίπτωση ήταν μια εκπαιδευτικός με αρκετά χρόνια εργασίας στο σχολείο και δεκαετή εμπειρία στη διδασκαλία με τη φιλοσοφία και το υλικό των μαθηματικών της φύσης και της ζωής. Η δεύτερη δασκάλα είχε επίσης αρκετά χρόνια εργασίας στο σχολείο, αλλά δίδασκε τα μαθηματικά με το κλασσικό υλικό και τη λογική που είχε το Α.Π. του 1982. Η τρίτη περίπτωση ήταν μια φοιτήτρια στο τρίτο έτος των σπουδών της στο Π.Τ.Δ.Ε. Φλώρινας που παρακολουθούσε το μάθημα της πρακτικής άσκησης των μαθηματικών και δίδαξε πειραματικά με τη χρήση του εκπαιδευτικού πακέτου «γεωμετρία από όλο τον κόσμο». Στόχος της έρευνας ήταν να δει πως χρησιμοποιούν αυτές οι τρεις διαφορετικές περιπτώσεις εκπαιδευτικών το υλικό στη διδασκαλία τους.

Για το σκοπό αυτό η έρευνα κινήθηκε αρχικά στο να περιγράψει και να οριοθετήσει τις περιπτώσεις. Έτσι λήφθηκαν συνεντεύξεις από τις τρεις εκπαιδευτικούς και έγινε παρατήρηση της διδασκαλίας των δύο από αυτές. Επίσης οι μαθητές και των τριών τάξεων όπου έγινε η διδασκαλία εξετάστηκαν με μια διαδικασία προσωπικής συνέντευξης ως προς τις ικανότητες τους σε κάποιες γεωμετρικές έννοιες. Με βάση τα στοιχεία αυτά περιγράψαμε ξεχωριστά την κάθε περίπτωση. Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκαν οι διδασκαλίες με τη χρήση του υλικού της οποίες καταγράψαμε και αναλύσαμε με βάση δυο διαστάσεις: τη διδακτική μεθοδολογία και τα περιεχόμενα που επέλεξαν για τη διδασκαλία. Οι διδασκαλίες αυτές συσχετίστηκαν με όσα αρχικά είχαμε καταγράψει για τις τρεις αυτές περιπτώσεις. Όλα τα παραπάνω περιγράφονται αναλυτικά στο όγδοο κεφάλαιο της εργασίας.

1.Γενικά για τη Γεωμετρία

1.1 Η χρησιμότητα διδασκαλίας της Γεωμετρίας

Η Γεωμετρία περιλαμβάνεται στο πρόγραμμα διδασκαλίας των περισσότερων σχολείων του κόσμου εδώ και αρκετούς αιώνες. Για ποιους λόγους όμως το μάθημα αυτό θεωρείται απαραίτητο; Ανατρέχοντας στη βιβλιογραφία μπορούμε να βρούμε διάφορους λόγους οι οποίοι θεμελιώνουν την αναγκαιότητα της διδασκαλίας της Γεωμετρίας. Θα δούμε ενδεικτικά κάποιους από αυτούς. Ο Τουμάσης αναφέρει πέντε βασικούς λόγους για τους οποίους είναι αδιαμφισβήτητη, όπως λέει η παιδαγωγική αξία του μαθήματος της Γεωμετρίας[1]:

1. Βοηθάει στην ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης του χώρου.
2. Καλλιεργεί την ικανότητα νοερής σύλληψης των μαθηματικών.
3. Συνδέει άμεσα τα μαθηματικά με τον πραγματικό κόσμο.
4. Βοηθάει στην κατανόηση άλλων αφηρημένων μαθηματικών ιδεών από άλλες περιοχές των μαθηματικών, μέσω των γεωμετρικών μοντέλων ερμηνείας
5. Αποτελεί ένα εξαιρετικό παράδειγμα ενός μαθηματικού συστήματος – στην πραγματικότητα του πιο απλού και κατανοητού για τους μαθητές[2].

Σύμφωνα με τον Λεμονίδη[3], «*οι μαθητές, στα πλαίσια της Γεωμετρίας, μελετούν το χώρο μέσα στον οποίο ζουν και προσανατολίζονται, μετρούν, συγκρίνουν και σχηματίζουν νοερές εικόνες της μορφής των αντικειμένων. Μια από τις σημαντικές*

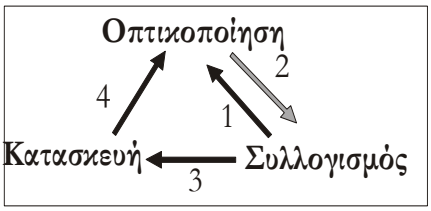
---

[1] Τουμάσης, Μ. (1994). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών.* Αθήνα: Gutenberg, 325-361.

[2] Στην παρούσα εργασία γίνεται χρήση του αρσενικού γένους, (μαθητής δάσκαλος) για λόγους οικονομίας και αισθητικής. Σε κάθε περίπτωση εννοούνται άνθρωποι και των δύο φύλων.

[3] Λεμονίδης, Χ. (2003). Μια νέα πρόταση διδασκαλίας των Μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου, Αθήνα: Πατάκης

πλευρές της γεωμετρικής σκέψης είναι η νοερή απεικόνιση του χώρου που σχηματίζεται με τη χρήση των νοερών αναπαραστάσεων των τρισδιάστατων και δισδιάστατων αντικειμένων και τη θεώρησή τους από διαφορετικές προοπτικές. Οι μαθητές μαθαίνουν τα γεωμετρικά σχήματα, τη δομή τους, αναλύουν τα χαρακτηριστικά και τις σχέσεις τους. Για να διαχειριστούμε και να περιγράψουμε το φυσικό χώρο που μας περιβάλει διαθέτουμε ως μέσον τα γεωμετρικά μοντέλα και τη συλλογιστική του χώρου. Αυτά αποτελούν σημαντικά εργαλεία για να λύνουμε διάφορα προβλήματα».



Η Κολέζα[4] πάλι θεωρεί τη μελέτη της Γεωμετρίας απαραίτητη, γιατί εμπεριέχει τριών ειδών γνωστικές διαδικασίες:

α) διαδικασίες *οπτικοποίησης* για την αναπαράσταση αντικειμένων του χώρου, την επεξήγηση μιας πρότασης, τη συστηματική διερεύνηση μιας σύνθετης κατάστασης, ή για μια υποκειμενική επαλήθευση και τον έλεγχο κάποιων υποθέσεων,

β) διαδικασίες *κατασκευής* με συγκεκριμένα εργαλεία και υπό συγκεκριμένες συνθήκες,

γ) διαδικασίες *συλλογισμού*.

Οι διαδικασίες αυτές μπορούν να εκτελεσθούν ανεξάρτητα η μια από την άλλη, αλλά ο συνδυασμός τους είναι απαραίτητος για την γεωμετρική σκέψη. Συνδέονται όπως δείχνει το διπλανό σχήμα. Η συνύπαρξη των τριών αυτών γνωστικών διαδικασιών προσφέρει μεθοδολογικά πλεονεκτήματα στη Γεωμετρία έναντι άλλων γνωστικών περιοχών.

Η Γεωμετρία μάλιστα δεν είναι χρήσιμη μόνο όταν διδάσκεται σε ανώτερα και αφηρημένα επίπεδα, αλλά ακόμα και σε άτυπη ή στοιχειώδη μορφή, όπως συμβαίνει στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου. Συνοπτικά

[4] Κολέζα, Ε. (2000). Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών. Αθήνα:Leader Books, 257-259

στη βιβλιογραφία αναφέρονται οι εξής λόγοι για τους οποίους είναι χρήσιμο να διδάσκεται η άτυπη Γεωμετρία:

1. Ο κόσμος αποτελείται από σχήματα και χώρους και η Γεωμετρία μπορεί να θεωρηθεί ως «τα μαθηματικά του χώρου». Επομένως παρέχει χρήσιμες γνώσεις για την κατανόηση του χώρου στον οποίο κανείς ζει και κινείται και το χειρισμό τον σχημάτων.
2. Η άτυπη Γεωμετρία (informal geometry) που διδάσκεται στο Δημοτικό, προετοιμάζει για την τυπική Γεωμετρία (formal geometry) στις επόμενες βαθμίδες. Οι μαθητές χρειάζονται ικανοποιητικό αριθμό εμπειριών με συγκεκριμένα υλικά και δραστηριότητες, προκειμένου να είναι αργότερα σε θέση να κατανοήσουν και να χειριστούν αφηρημένες έννοιες.
3. Η Γεωμετρία έχει πολλές εφαρμογές και σε άλλες θεματικές περιοχές. Συχνά για παράδειγμα, η γεωμετρική αναπαράσταση των προβλημάτων από άλλους τομείς (π.χ. αριθμητικά προβλήματα) είναι ένα χρήσιμο βοήθημα για τους μαθητές που προσπαθούν να τα λύσουν.
4. Τέλος, πολλοί άνθρωποι σκέφτονται καλύτερα οπτικά (οι οπτικές εικόνες τους βοηθούν στους συλλογισμούς τους) και επομένως η Γεωμετρία μπορεί να γίνει η «πόρτα» για την επιτυχία τους και τη θετική τους στάση απέναντι στα μαθηματικά[5].

[5] The Annenberg/CPB Math and Science Project. (1997-2003). *Teachers' Lab/Shape and Space in geometry/Why Geometry is Important,* (από το www.learner.org/teacherslab/math/geometry).

Ερευνητές όπως οι DeGuire[6] και Lawson, & Chinnappan[7] αναδεικνύουν μια πολύ σημαντική συνεισφορά του μαθήματος της Γεωμετρίας στην γνωστική ανάπτυξη των παιδιών, μέσω των ευκαιριών που δίνει για επίλυση προβλημάτων (problem solving). Η Γεωμετρία, σύμφωνα με αυτούς, προσφέρει και το πλαίσιο επίλυσης διαφόρων προβλημάτων και την μάθηση στρατηγικών για επίλυση προβλημάτων σε άλλες θεματικές περιοχές. Η διδασκαλία της μπορεί να γίνει μια πλούσια πηγή δραστηριοτήτων για επίλυση με επαγωγικό και παραγωγικό τρόπο έτσι ώστε να ενισχύεται η λογική, η δημιουργική σκέψη και η κριτική ματιά των μαθητών.

1.2 Βασικά χαρακτηριστικά της Γεωμετρίας

Είναι χρήσιμο να δούμε ποια είναι τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα της Γεωμετρίας ως γνωστικό αντικείμενο που τη διαφοροποιούν από τα υπόλοιπα. Στη βιβλιογραφία μπορεί κανείς να βρει τέτοιου είδους περιγραφές των ιδιαίτερων αυτών γνωρισμάτων.

Αρχικά ο Usiskin θεωρεί πως το μάθημα της Γεωμετρίας έχει τέσσερις διαστάσεις: τη *διάσταση μέτρησης-απεικόνισης* (the measure-visualization dimension), τη *διάσταση του πραγματικού κόσμου* (the physical real-world dimension), τη *διάσταση της αναπαράστασης* (the representation dimension) και

[6] DeGuire, L. (1987). Geometry: An avenue for teaching problem solving in grades K-9. In M. M. Lindquist, A. P. Shulte (eds.), *Learning and Teaching Geometry, K-12,* (pp. 59-68), 1987 Yearbook, Reston: N.C.T.M.

[7] Lawson, M., & Chinnappan, M. (2000). Knowledge connectedness in geometry problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education,* 31, no1, 26-43

τη *διάσταση της μαθηματικής υποστήριξης* (the mathematical-underpinnings dimension)[8]. Ας τις δούμε αναλυτικότερα:

α) *Διάσταση μέτρησης-απεικόνισης: Η Γεωμετρία ως μελέτη νοερής απεικόνισης, σχεδίασης και κατασκευής σχημάτων.*

Η σχεδίαση σχημάτων ή γραμμών είναι κάτι που αρχίζει στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου και οι διάφοροι μετασχηματισμοί (καθρεφτίσματα, περιστροφές, αλλαγές μεγέθους) μπορούν επίσης να εξεταστούν σε μικρή ηλικία. Αν και μερικοί ψυχολόγοι θεωρούν ότι οι πτυχές αυτής της διάστασης της Γεωμετρίας δεν επηρεάζονται από την εμπειρία, κάποιοι άλλοι θεωρούν ότι το περιεχόμενο της διδασκαλίας έχει πιθανώς επιπτώσεις στις δυνατότητες των μαθητών για νοερές απεικονίσεις και οπτικοποιήσεις. Η νοερή απεικόνιση και η σχεδίαση δεν έχουν κατά τον Usiskin τη σημασία που θα έπρεπε στο μάθημα της Γεωμετρίας.

β) *Διάσταση του πραγματικού κόσμου: Η Γεωμετρία ως μελέτη του πραγματικού, φυσικού κόσμου.*

Η Γεωμετρία έχει άμεση σχέση με τον πραγματικό κόσμο που υπάρχει γύρω μας. Τη βρίσκουμε στην τελειότητα των εξαγώνων μιας φυσικής κυψέλης, στην καλλιτεχνική έκφραση, που πολλές φορές περιέχει στοιχεία Γεωμετρίας, στις κάθε είδους κατασκευές που γίνονται με μετρήσεις και εμπειροτεχνικές μεθόδους και φυσικά σε διάφορες επιστήμες που χρησιμοποιούν περίπλοκα γεωμετρικά πρότυπα για να παρουσιάσουν τις δομές του κόσμου που μας περιβάλλει. Στα περισσότερα σχολικά εγχειρίδια Γεωμετρίας όμως, η άμεση αυτή σχέση της Γεωμετρίας με το φυσικό κόσμο αγνοείται ή δεν αποκαλύπτεται επαρκώς και αυτό είναι ένα μεγάλο διδακτικό πρόβλημα που πρέπει να αντιμετωπιστεί.

---

[8] Usiskin, Z. (1987). Resolving the continuing dilemmas in school geometry. In M. M. Lindquist, A. P. Shulte (eds.), *Learning and Teaching Geometry, K-12,* (pp. 17-32), 1987 Yearbook, Reston: N.C.T.M.

γ) *Διάσταση της αναπαράστασης: Η Γεωμετρία ως εργαλείο για την αναπαράσταση μαθηματικών ή άλλων εννοιών των οποίων η προέλευση δεν είναι οπτική ή φυσική.*

Μη γεωμετρικές ιδέες μπορούν να αναπαρασταθούν γεωμετρικά. Πολύ συχνά αναπαριστώνται με γραφήματα αριθμητικές πληροφορίες. Ζευγάρια αριθμών μπορούν να αναπαρασταθούν ως σημεία στο επίπεδο και οι λύσεις εξισώσεων μπορούν να αναπαρασταθούν με ευθείες γραμμές και καμπύλες. Με τη χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών η δυνατότητα της Γεωμετρίας να αναπαριστά ιδέες από την αριθμητική και την Άλγεβρα μεγάλωσε σημαντικά. Η διάσταση αυτή είναι επίσης χρήσιμο να αξιοποιηθεί στη διδασκαλία.

ε) *Διάσταση της μαθηματικής υποστήριξης: Η Γεωμετρία ως παράδειγμα μαθηματικού συστήματος*

Η Γεωμετρία ήταν ο τομέας εκείνος των μαθηματικών που κατεξοχήν οργανώθηκε λογικά και διατήρησε αυτήν την οργάνωση για πολύ καιρό. Αυτό είχε επιπτώσεις και στα σχολικά αναλυτικά προγράμματα. Στη διδασκαλία της Γεωμετρίας η αιτιολόγηση, τα λογικά συμπεράσματα, η αφαίρεση και οι αποδείξεις, είναι πολύ σημαντικά ως διδακτικοί σκοποί- τουλάχιστον πολύ περισσότερο από ότι σε άλλα γνωστικά αντικείμενα. Ο Usiskin υποστηρίζει πως οι λογικοί συλλογισμοί και η αφαίρεση μπορούν να αρχίσουν να διδάσκονται και στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Ακόμη και πολύ μικρά παιδιά καταλαβαίνουν μερικές πτυχές της έμμεσης απόδειξης. Οι άμεσες αποδείξεις είναι περισσότερο δύσκολες, αλλά τα παιδιά μπορούν να προχωρούν σε λογικά συμπεράσματα. Σημαντικό είναι να τους προσφέρονται εμπειρίες και ευκαιρίες για την εξαγωγή τους.[9]

[9] Usiskin, Z. (1987). Resolving the continuing dilemmas in school geometry. In M. M. Lindquist, A. P. Shulte (eds.), *Learning and Teaching Geometry, K-12,* (pp. 17-32), 1987 Yearbook, Reston: N.C.T.M.

1.3Η Γεωμετρία ως μια προνομιακή περιοχή

Από όλα τα παραπάνω οδηγούμαστε στο συμπέρασμα πως η Γεωμετρία θεωρείται μια προνομιακή περιοχή, τόσο ως αυτοτελές αντικείμενο που προσφέρει απαραίτητες γνώσεις για τον καθένα και συνάμα έχει σημαντική παιδευτική αξία, όσο και ως πεδίο που δίνει τη δυνατότητα να αναπτυχθεί μια ενδιαφέρουσα για το σύγχρονο σχολείο μεθοδολογία μάθησης. Μια τέτοιου είδους θεώρηση βρίσκουμε στους Τζανάκη και Κούρκουλο [10], οι οποίοι θεωρούν προνομιακή περιοχή τη Γεωμετρία επειδή:

Είναι γνωστικό αντικείμενο στο οποίο κυριαρχεί η εποπτεία, εποπτεία μάλιστα εύκολα επαναλήψιμη και χρονικά οικονομική σε σχέση με άλλες θεματικές περιοχές (π.χ. ευκολότερα αναπαράγουμε ένα καλό γεωμετρικό σχήμα από ένα πείραμα Φυσικής).

Είναι γνωστικό αντικείμενο με εύκολη πρόσβαση σε κατασκευαστικά προβλήματα. Αυτά τα κατασκευαστικά προβλήματα μπορεί να είναι πρακτικού ενδιαφέροντος (πως μπορώ να κατασκευάσω ένα μοιρογνωμόνιο;), αισθητικού περιεχομένου (μπορώ να καλύψω ένα δεδομένο σχήμα με δεδομένου σχήματος πολύγωνα;) και με έμφαση στον πειραματισμό (πως μπορώ να φτιάξω τρίγωνο από τα μήκη των πλευρών του;).

1. Η Γεωμετρία παρέχει πρακτικά χρήσιμες γνώσεις (π.χ. υπολογισμός εμβαδών, όγκων).
2. Οι γεωμετρικές καταστάσεις αποτελούν ερμηνευτικά μοντέλα άλλων καταστάσεων (π.χ. οι αλγεβρικές ταυτότητες μπορεί να αποδειχτούν και γεωμετρικά).
3. Η Γεωμετρία δίνει σημαντικές ευκαιρίες για μια καλή εισαγωγή σε πειραματικές διαδικασίες και προβληματικές (π.χ. εύρεση

[10] Τζανάκης, Κ., & Κούρκουλος, Μ. (2000). Η παροχή μαθηματικής Παιδείας και τα χαρακτηριστικά του μαθηματικού σκέπτεσθαι: Η περίπτωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, τ.111, 66-73.

τρόπων κατασκευής παραλλήλου από σημείο σε ευθεία, και σε ποικιλία συνθηκών).

4. Η Γεωμετρία είναι προνομιακό πεδίο για μια, έστω σε πρώιμη μορφή, ανάπτυξη *μαθηματικού σκέπτεσθαι,* προσφέροντας πληθώρα καταστάσεων οι οποίες οδηγούν:

- σε *συναρπαστικές απορίες* και *γόνιμα ερωτήματα* (αφού ξέρω έναν απλό τρόπο να διχοτομώ με κανόνα και διαβήτη οποιαδήποτε γωνία, μπορώ να βρω τέτοιο τρόπο και να την τριχοτομώ;).
- στην *σύλληψη και διατύπωση υποθέσεων και εικασιών* (όχι απαραίτητα ορθών) με επαγωγικό ή αναλογικό τρόπο (π.χ. επαγωγική διαπίστωση του πλήθους των διαγωνίων πολυγώνου σε συνάρτηση με τον αριθμό των πλευρών του).
- στην *συνειδητοποίηση της ανάγκης και στην προσπάθεια απαγωγικής αιτιολόγησης εικασιών και υποθέσεων* (πως μπορώ να είμαι σίγουρος πως κάτι που βρήκα για μια συγκεκριμένη περίπτωση, είναι σωστό σε κάθε περίπτωση).
- σε *εξοικείωση με αφαιρετικές διαδικασίες* (π.χ. αν και μια ευθεία χαραγμένη στο χαρτί έχει πραγματικές διαστάσεις, το παιδί μαθαίνει να την σκέπτεται χωρίς πλάτος).

2. Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στο ελληνικό δημοτικό σχολείο

Πριν σχεδιάσουμε και αναπτύξουμε οποιοδήποτε πρόγραμμα σχετικό με τη Γεωμετρία, είναι χρήσιμο να δούμε το πλαίσιο διδασκαλίας του μαθήματος στις τρεις πρώτες τάξεις του ελληνικού δημοτικού σχολείου, έτσι ώστε να λάβουμε υπόψη τις προϋποθέσεις που τίθενται και να εντάξουμε σε αυτό το πλαίσιο την πρόταση μας.

Τον καιρό που γράφεται αυτή η εργασία, βρισκόμαστε σε μια μεταβατική φάση αλλαγής των προγραμμάτων σπουδών και των σχολικών εγχειριδίων του δημοτικού σχολείου. Έτσι, τα σχολικά εγχειρίδια που εκπαιδευτικοί και μαθητές έχουν στα χέρια τους έχουν συνταχτεί σύμφωνα με τα αναλυτικά προγράμματα που θεσπίστηκαν το 1982, ενώ ήδη από το 1998 μέχρι και το 2002[1] έχουν δημοσιευτεί νέα προγράμματα σπουδών για την υποχρεωτική εκπαίδευση. Τα προγράμματα αυτά έχουν δύο χαρακτηριστικά: είναι **ενιαία**, ξεκινούν δηλαδή από την πρώτη δημοτικού (σε μερικές περιπτώσεις και από το νηπιαγωγείο) και φτάνουν μέχρι την τρίτη γυμνασίου διαπνεόμενα από τις ίδιες αρχές και βασικούς σκοπούς και **διαθεματικά**[2],

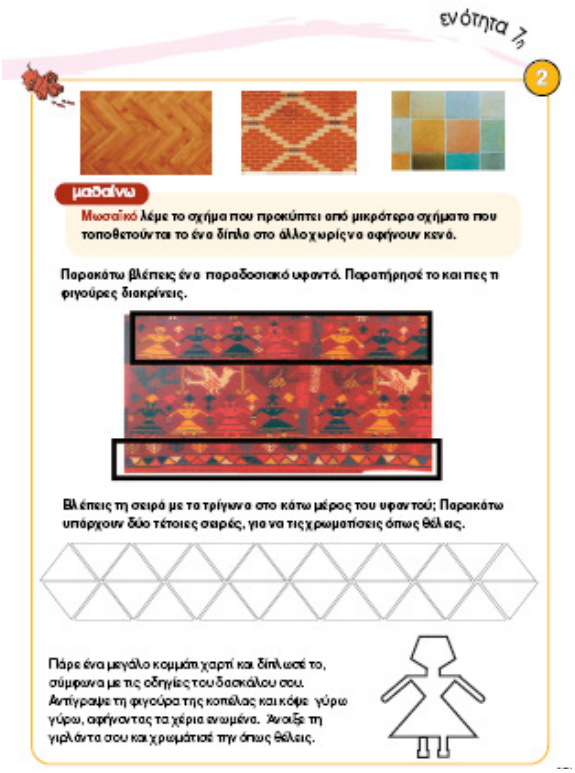
[1] Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων – Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2002) Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης. Αθήνα.

[2] Σχετικά με τη χρήση της λέξης διαθεματικότητα ή διεπιστημονικότητα υπάρχει μια μεγάλη συζήτηση στην πρόσφατη ελληνική βιβλιογραφία. Ενδεικτικά αναφέρουμε:
Ματσαγγούρας Η., Η Διαθεματικότητα στη Σχολική Γνώση, εκδ. Γρηγόρη, Αθήνα 2002.
Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2002). *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων, τ. 7. Ειδικό αφιέρωμα στη διαθεματικότητα.* Αθήνα:Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (στο:http://www.pischools.gr/publications/epitheorisi/).
Αγγελάκος, Κ. (Επ.) (2003). *Διαθεματικές προσεγγίσεις της γνώσης στο ελληνικό σχολείο.* Αθήνα: Μεταίχμιο.

παρόλο που τα διαφορετικά μαθήματα του σχολείου έτσι όπως τα ξέραμε μέχρι σήμερα εξακολουθούν να υπάρχουν, γίνεται μια προσπάθεια να συνδεθούν διαθεματικά με τα υπόλοιπα αντικείμενα μέσω κοινών θεμελιωδών εννοιών.

Με τα νέα προγράμματα διδασκαλίας των μαθηματικών γίνονται σημαντικές αλλαγές σε σχέση με τα παλαιότερα τόσο αναφορικά με τα περιεχόμενα της διδασκαλίας, έτσι όπως διαρθρώνονται σε κάθε τάξη, όσο και με τον τρόπο προσέγγισης αυτών των περιεχομένων, τη μέθοδο δηλαδή της διδασκαλίας. Μάλιστα θεωρούμε ότι οι αλλαγές στα δύο αυτά επίπεδα είναι σωστό να εξετάζονται ταυτόχρονα, καθώς είναι στοιχεία αλληλένδετα. Πιστεύουμε επίσης ότι έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον εκτός από τα αναλυτικά προγράμματα να μελετήσουμε και τα σχολικά εγχειρίδια, αφού αυτά αποτυπώνουν και μεταφέρουν στην τάξη όσα διακηρύσσουν τα αναλυτικά προγράμματα. Έτσι λοιπόν θα δούμε τα βασικά στοιχεία της αλλαγής, χρησιμοποιώντας και παραδείγματα από τα σχολικά βιβλία.

Μια βασική αλλαγή είναι ότι τα περιεχόμενα της γεωμετρίας εμπλουτίζονται σημαντικά κα στις τρεις τάξεις που εξετάζουμε. Νέα θέματα, όπως τα παζλ, τα πλακόστρωτα και τα μοτίβα εισάγονται στο πρόγραμμα σπουδών. Στην διπλανή εικόνα βλέπουμε μια σελίδα από το νέο βιβλίο της τρίτης τάξης που περιέχει τέτοιες έννοιες. Προβλέπεται επίσης η προσέγγιση της συμμετρίας ως προς άξονα καθώς και η κίνηση και ο προσανατολισμός στο χώρο.


ενότητα 7η

2

μαθαίνω

Μωσαϊκό λέμε το σχήμα που προκύπτει από μικρότερα σχήματα που τοποθετούνται το ένα δίπλα στο άλλο χωρίς να αφήνουν κενά.

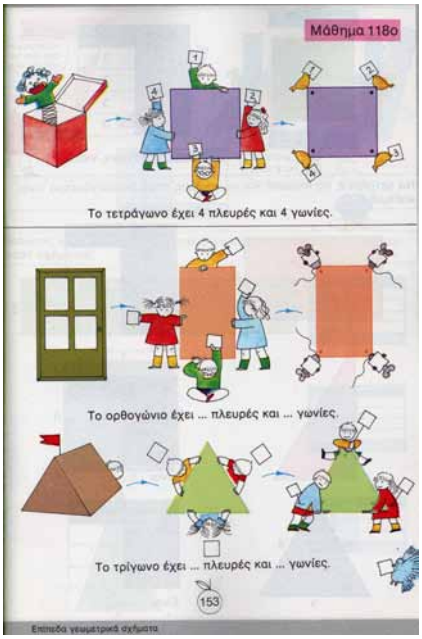
Παρακάτω βλέπεις ένα παραδοσιακό υφαντό. Παρατήρησέ το και πες τι φιγούρες διακρίνεις.

Βλέπεις τη σειρά με τα τρίγωνα στο κάτω μέρος του υφαντού; Παρακάτω υπάρχουν δύο τέτοιες σειρές, για να τις χρωματίσεις όπως θέλεις.

Πάρε ένα μεγάλο κομμάτι χαρτί και δίπλωσέ το, σύμφωνα με τις οδηγίες του δασκάλου σου. Αντίγραψε τη φιγούρα της κοπέλας και κόψε γύρω γύρω, αφήνοντας τα χέρια ενωμένα. Άνοιξε τη γιρλάντα σου και χρωμάτισέ την όπως θέλεις.

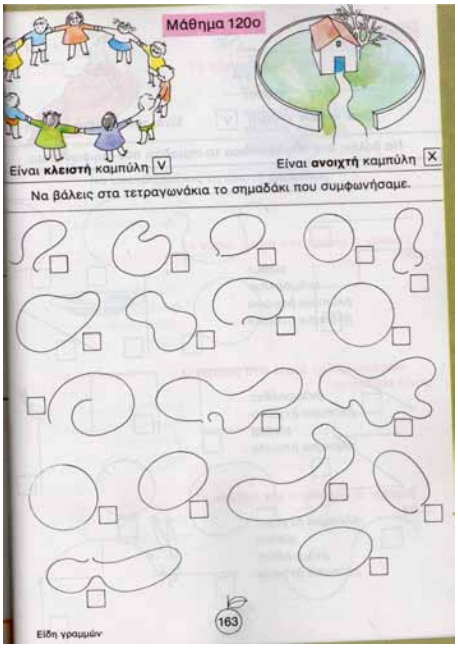
Στο παλιότερο πρόγραμμα σπουδών η μελέτη της γεωμετρίας

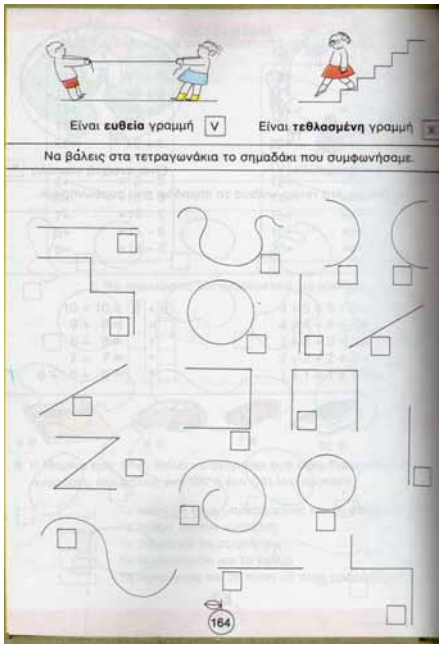
περιοριζόταν μόνο στις γραμμές, τα γεωμετρικά σχήματα και τα γεωμετρικά



στερεά. Τα περιεχόμενα αυτά διατηρούνται και στο νέο πρόγραμμα, αλλά η προσέγγιση δεν είναι τόσο φορμαλιστική όσο παλιότερα. Δίπλα βλέπουμε ένα το μάθημα που αναφερόταν στα σχήματα στο παλιό βιβλίο της Β δημοτικού, το οποίο ξεκινά με ένα παράδειγμα που λέει πόσες πλευρές και πόσες γωνίες έχει το τετράγωνο και τους ζητά στη συνέχεια να κάνουν το ίδιο για το ορθογώνιο και το τρίγωνο.

Ως προς την οργάνωση των περιεχομένων, χαρακτηριστικό του παλιού προγράμματος είναι ότι στη σειρά των μαθημάτων ακολουθεί την λογική: γραμμή- επίπεδο σχήμα- γεωμετρικό στερεό. Κάτω βλέπουμε το πρώτο μάθημα γεωμετρίας από το προηγούμενο βιβλίο της πρώτης τάξης που



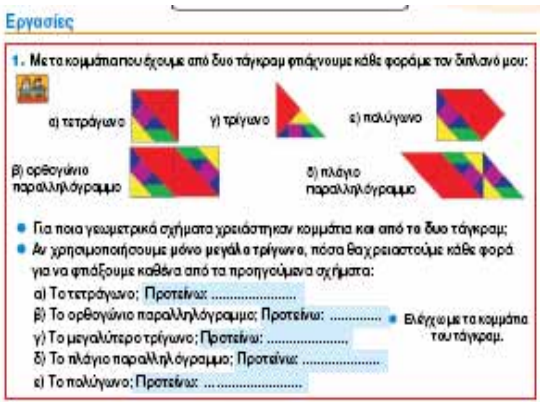


ξεκινάει με την μελέτη των γραμμών. Κάτι ανάλογο δε συμβαίνει στα νέα προγράμματα σπουδών. Τα σχήματα και τα στερεά διδάσκονται πριν από τις γραμμές, ενώ οι τελευταίες προσεγγίζονται κυρίως μέσα από δραστηριότητες χάραξης. Οι μαθητές δηλαδή χαράσσουν διάφορα είδη γραμμών οι οποίες

έχουν άτυπες στις περισσότερες περιπτώσεις ονομασίες, π.χ γραμμή σαν πριόνι, σούστα κτλ.

Γενικότερα δηλαδή μπορούμε να πούμε πως το προηγούμενο πρόγραμμα δεν είχε ποικιλία περιεχομένων και ήταν προσανατολισμένο σε μια περισσότερο τυπική μορφή γεωμετρίας.

Το δεύτερο επίπεδο της διαφοροποίησης σχετίζεται με τη μεθοδολογία διδασκαλίας. Στα νεότερα προγράμματα και βιβλία υπάρχει μια πιο διερευνητική προσέγγιση. Θα μπορούσε κανείς να πει ότι στα μαθήματα γεωμετρίας το βιβλίο είναι η αφετηρία για δραστηριότητες. Στις διπλανές εικόνες βλέπουμε δύο παραδείγματα. Η πρώτη προέρχεται από το νέο βιβλίο της Β δημοτικού και ζητά από τους μαθητές να εργαστούν με το διπλανό τους και να συνθέσουν κάποια σχήματα χρησιμοποιώντας τα κομμάτια από δύο τάγκραμ. Οι μαθητές δηλαδή θα χειριστούν ένα υλικό και θα δουλέψουν διερευνητικά. Πιθανώς θα δοκιμάσουν διάφορες λύσεις μέχρι να φτάσουν στο αποτέλεσμα.



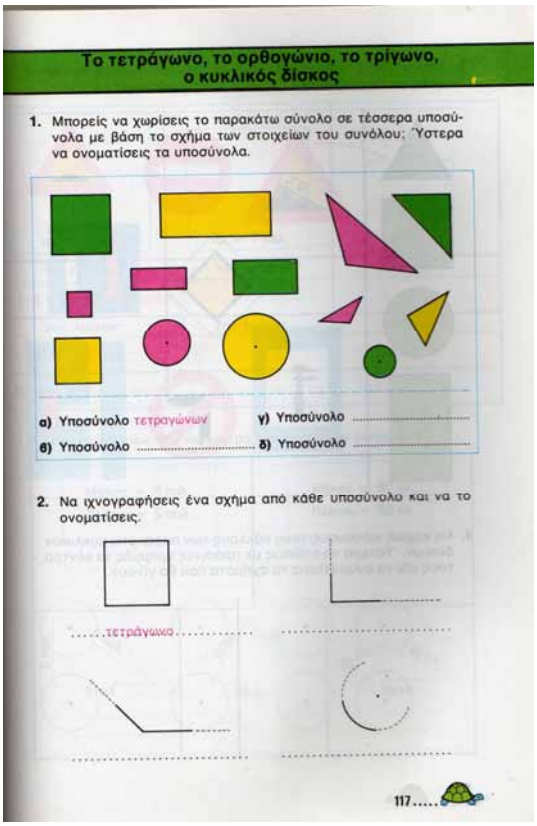
Η δεύτερη εικόνα προέρχεται από το βιβλίο της Α δημοτικού και δίνει οδηγίες στους μαθητές να διπλώσουν ένα χαρτί στη μέση να σχεδιάσουν κάτι, να κόψουν και να ανοίξουν. Και στις δύο περιπτώσεις το βιβλίο δεν περιέχει «ασκήσεις» που θα συμπληρωθούν στο χαρτί, αλλά προτείνει δραστηριότητες με απλά υλικά. Οι δραστηριότητες αυτές δίνουν τη δυνατότητα για μια διερευνητική προσέγγιση, όπως είπαμε και προηγούμενα.

Αν εξετάσουμε ενδεικτικά μία διδακτική ενότητα, μπορούμε να δούμε κάποια από τα στοιχεία αυτής της διαφορετικής προσέγγισης. Η ενότητα αφορά τα γεωμετρικά σχήματα και τα γεωμετρικά στερεά και προέρχεται από τα βιβλία της Γ τάξης.

Στην πρώτη περίπτωση το μάθημα ξεκινά με ένα σύνολο από διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα και ζητά από τους μαθητές να τα χωρίσουν σε υποσύνολα και να γράψουν την ονομασία του κάθε υποσυνόλου.

Στη συνέχεια δίνει πρότυπα σχήματα και ζητά από τους μαθητές να συνεχίσουν την ιχνογράφησή τους και να γράψουν την ονομασία τους.

Η 3η άσκηση είναι μια αντιστοίχηση γεωμετρικών σχημάτων με μορφές σημάτων της τροχαίας ενώ η 4η ζητά από τους μαθητές να ενώσουν 4 σημεία για να σχηματίσουν ένα τετράγωνο στην πρώτη περίπτωση και ένα ορθογώνιο στη δεύτερη.



Το τετράγωνο, το ορθογώνιο, το τρίγωνο, ο κυκλικός δίσκος

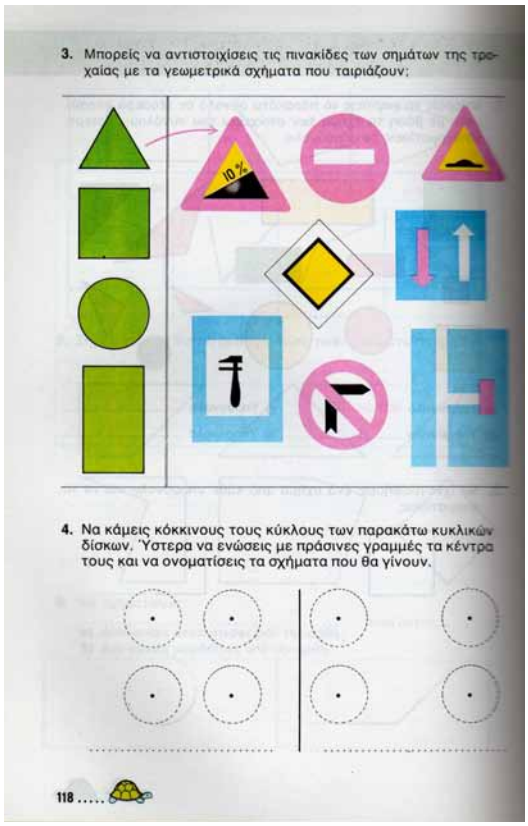
1. Μπορείς να χωρίσεις το παρακάτω σύνολο σε τέσσερα υποσύνολα με βάση το σχήμα των στοιχείων του συνόλου; Ύστερα να ονοματίσεις τα υποσύνολα.

α) Υποσύνολο τετραγώνων γ) Υποσύνολο .....
β) Υποσύνολο ..... δ) Υποσύνολο .....

2. Να ιχνογραφήσεις ένα σχήμα από κάθε υποσύνολο και να το ονοματίσεις.

.....τετράγωνο.....

117.....

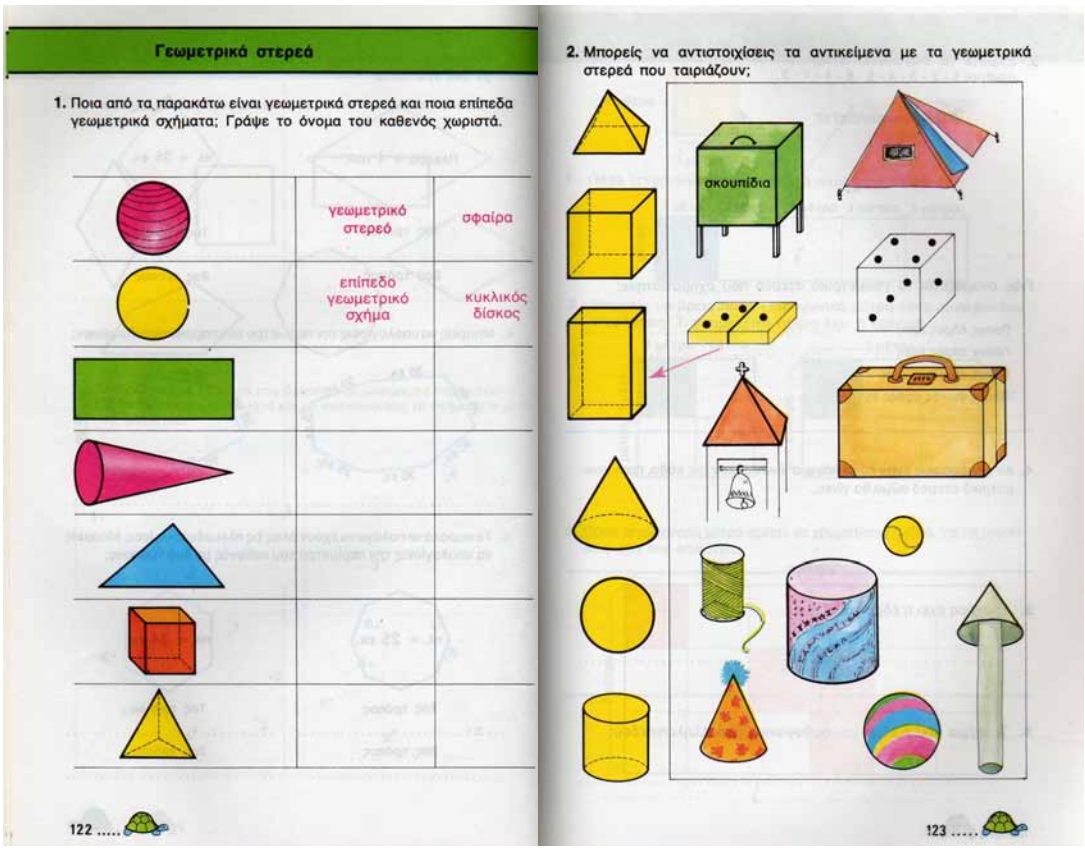


3. Μπορείς να αντιστοιχίσεις τις πινακίδες των σημάτων της τροχαίας με τα γεωμετρικά σχήματα που ταιριάζουν;

4. Να κάμεις κόκκινους τους κύκλους των παρακάτω κυκλικών δίσκων. Ύστερα να ενώσεις με πράσινες γραμμές τα κέντρα τους και να ονοματίσεις τα σχήματα που θα γίνουν.

118.....

Όπως αναφέραμε και προηγούμενα, η διδασκαλία των γεωμετρικών σωμάτων γίνεται σε ξεχωριστό κεφάλαιο. Αυτό ξεκινά με έναν πίνακα όπου οι μαθητές πρέπει να γράψουν αν αυτό που βλέπουν είναι γεωμετρικό στερεό ή επίπεδο γεωμετρικό σχήμα και να συμπληρώσουν δίπλα το όνομά του. Η 2η άσκηση δίνει διάφορα γεωμετρικά στερεά και ζητά από τους μαθητές να τα αντιστοιχήσουν με αντικείμενα από την πραγματικότητα που μοιάζουν με αυτά.



Γεωμετρικά στερεά

1. Ποια από τα παρακάτω είναι γεωμετρικά στερεά και ποια επίπεδα γεωμετρικά σχήματα; Γράψε το όνομα του καθενός χωριστά.

	γεωμετρικό στερεό	σφαίρα
	επίπεδο γεωμετρικό σχήμα	κυκλικός δίσκος

122 .....

2. Μπορείς να αντιστοιχίσεις τα αντικείμενα με τα γεωμετρικά στερεά που ταιριάζουν;

σκουπίδια

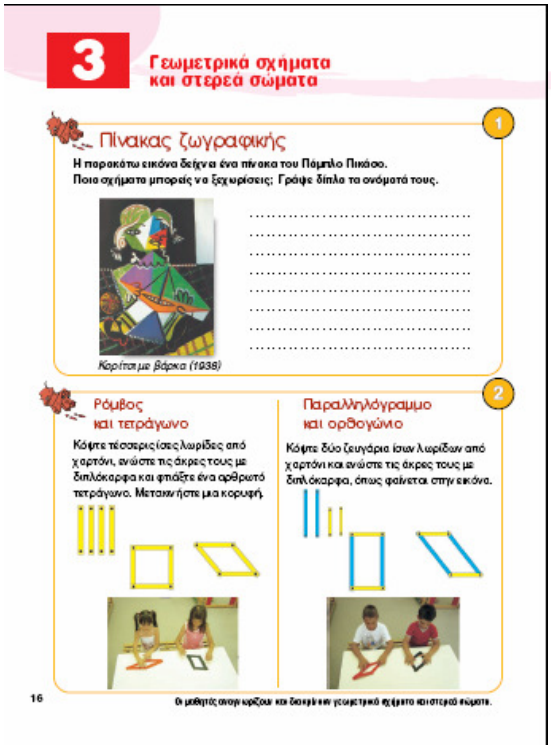
123 .....

Γενικά μπορούμε να πούμε πως στις 4 αυτές σελίδες που εξετάσαμε κυριαρχεί η ονοματολογία των σχημάτων και των σωμάτων. Αφετηρία του μαθήματος είναι και στις δύο περιπτώσεις τα ίδια τα σχήματα και τα στερεά, αποκομμένα από κάποιο πλαίσιο. Η σύνδεση με την καθημερινότητα γίνεται, αφού οι μαθητές έχουν ασχοληθεί με το τυπικό μέρος, δηλαδή ως εφαρμογή της αφηρημένης γνώσης που απόκτησαν στην πράξη. Δεν ξεκινά από την πραγματικότητα, αλλά καταλήγει σε αυτήν.

Γίνεται μια προσπάθεια για χαράξεις σχημάτων σε δυο ασκήσεις.

Στην δεύτερη περίπτωση το μάθημα ξεκινάει με έναν πίνακα του Πικάσο και ζητά από τους μαθητές να εντοπίσουν σε αυτών γεωμετρικά σχήματα και να γράψουν τα ονόματά τους. Η 2η δραστηριότητα περιγράφει την κατασκευή ενός υλικού με ο οποίο οι μαθητές μπορούν να παίξουν και να μελετήσουν τις διαφορές του ρόμβου από ο τετράγωνο και του ορθογωνίου από το παραλληλεπίπεδο.

Η 3η δραστηριότητα παρουσιάζει το ήδη γνωστό από προηγούμενες τάξεις παιχνίδι τάγκραμ και ζητά να εντοπίσουν τα ίδια σχήματα και στις τέσσερεις φιγούρες και να τα χρωματίσουν με το ίδιο χρώμα. Η 4η δραστηριότητα δίνει 4 φωτογραφίες αντικειμένων και ζητά από τους μαθητές να γράψουν με πιο στερεό μοιάζουν.



3 Γεωμετρικά σχήματα και στερεά σώματα

1 Πίνακας ζωγραφικής

Η παρακάτω εικόνα δείχνει ένα πίνακα του Πάμπλο Πικάσο. Ποια σχήματα μπορείς να ξεχωρίσεις; Γράψε δίπλα τα ονόματά τους.

Κορίτσι με βάρκα (1938)

2 Ρόμβος και τετράγωνο

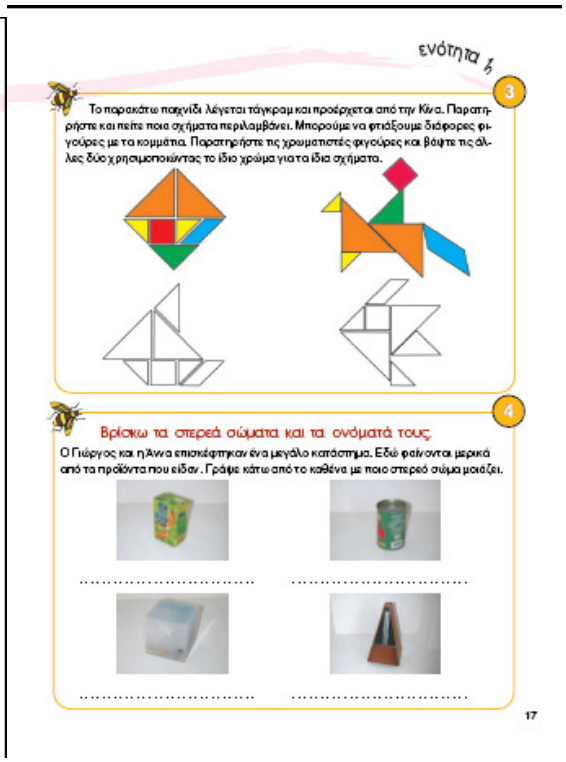
Κόψτε τέσσερις ίσες λωρίδες από χαρτόνι, ενώστε τις άκρες τους με διπλόκαρφα και φτιάξτε ένα αρθρωτό τετράγωνο. Μετακινήστε μια κορυφή.

Παραλληλόγραμμο και ορθογώνιο

Κόψτε δύο ζευγάρια ίσων λωρίδων από χαρτόνι και ενώστε τις άκρες τους με διπλόκαρφα, όπως φαίνεται στην εικόνα.

16

Οι μαθητές ανακαλύπτουν και διακρίνουν γεωμετρικά σχήματα και στερεά σώματα.



ενότητα 4

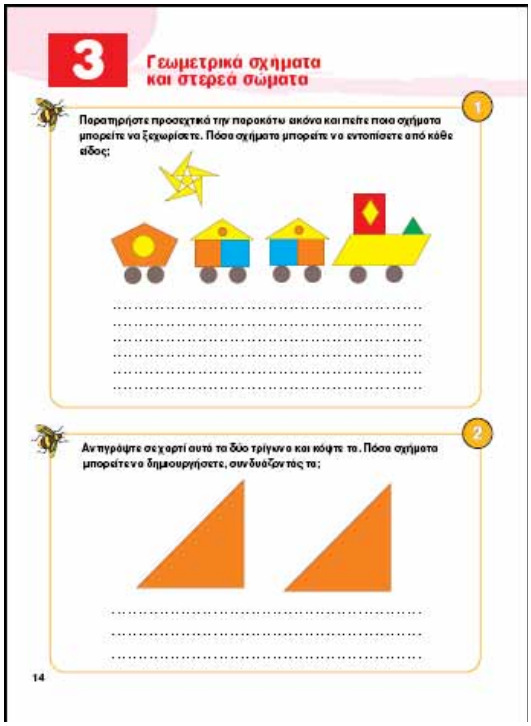
3 Το παρακάτω παιχνίδι λέγεται τάγκραμ και προέρχεται από την Κίνα. Παρατηρήστε και πείτε ποια σχήματα περιλαμβάνει. Μπορούμε να φτιάξουμε διάφορες φιγούρες με τα κομμάτια. Παρατηρήστε τις χρωματιστές φιγούρες και βάψτε τις άλλες δύο χρησιμοποιώντας το ίδιο χρώμα για τα ίδια σχήματα.

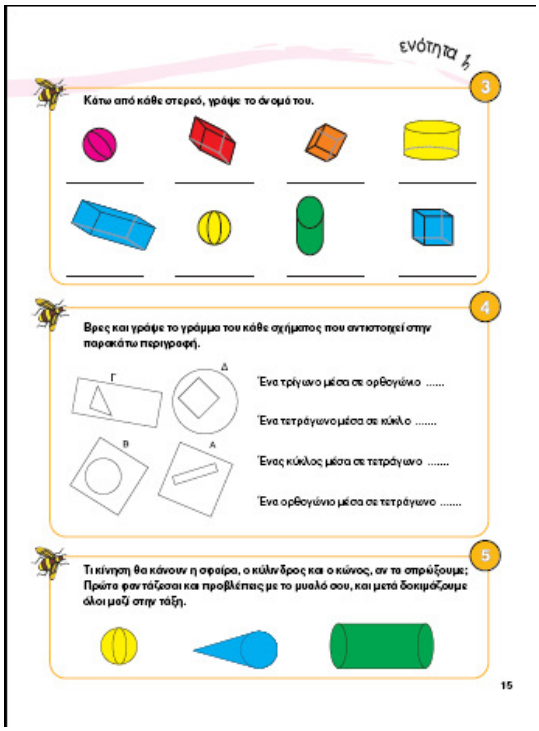
4 Βρίσκω τα στερεά σώματα και τα ονόματά τους

Ο Γιώργος και η Άννα επισκέφτηκαν ένα μεγάλο κατάστημα. Εδώ φαίνονται μερικά από τα προϊόντα που είδαν. Γράψε κάτω από το καθένα με ποιο στερεό σώμα μοιάζει.

17

Στο τετράδιο εργασιών της ίδιας ενότητας η 1η άσκηση δίνει μια ζωγραφιά με σχήματα και ζητά από τους μαθητές να τα ομαδοποιήσουν. Η 2η δραστηριότητα τους προτείνει να κόψουν 2 ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα από χαρτί και να δοκιμάσουν να τα συνδυάσουν για να φτιάξουν άλλα σχήματα. Η 3η δίνει γεωμετρικά στερεά και ζητά να γράψουν τα ονόματά τους, ενώ η 4η παρουσιάζει συνδυασμούς δύο κάθε φορά σχημάτων και ζητά να τους αντιστοιχήσουν με τις περιγραφές τους. Τέλος η 4η άσκηση ζητά να φανταστούν και να δοκιμάσουν την κίνηση που θα κάνουν 3 στερεά, η σφαίρα, ο κώνος και ο κύλινδρος αν τα σπρώξουμε.





Από την αδρή αυτή περιγραφή φαίνονται αρκετά στοιχεία της διαφοροποίησης. Βασικό είναι ότι η εισαγωγή της νέας έννοιας γίνεται μέσα σε ένα πλαίσιο προερχόμενο από μια πραγματική κατάσταση, όπως η τέχνη ή η καθημερινότητα.

Επιπλέον η μάθηση έχει διερευνητικό χαρακτήρα. Η 2η δραστηριότητα του βιβλίου του μαθητή και η 2η και 5η του τετραδίου εργασιών είναι χαρακτηριστικά τέτοια παραδείγματα. Ο μαθητής δουλεύει με πραγματικά υλικά και δοκιμάζει διάφορες πιθανές περιπτώσεις και ακόμα φαντάζεται και προβλέπει.

Τα περιεχόμενα γίνονται πιο πλούσια, δεν εξαντλούνται στην ονοματολογία των σχημάτων και την ομαδοποίηση τους, αλλά περιλαμβάνουν τον χειρισμό τους από το μαθητή, τη σύνθεση και την ανάλυσή τους και τη δυνατότητα να τα αναγνωρίζει σε διάφορες θέσεις πέρα από την πρότυπη και σε διάφορες μορφές.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα αναπτύξουμε τα διεθνή δεδομένα στη διδακτική της γεωμετρίας που επηρέασαν αυτή την αλλαγή στα περιεχόμενα και τη μέθοδο διδασκαλίας στο ελληνικό δημοτικό σχολείο.

3. Νέες τάσεις στη διδασκαλία της Γεωμετρίας

Είδαμε λοιπόν ότι τα νέα προγράμματα της Γεωμετρίας διαφοροποιούνται αρκετά σε σχέση με τα παλαιότερα. Πώς εξηγείται η αλλαγή αυτή;

Τα τελευταία χρόνια υπάρχουν διεθνώς δύο μεγάλα ρεύματα που περιγράφουν τις νέες τάσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών και επομένως και της Γεωμετρίας, τα οποία επηρέασαν σε κάποιο βαθμό και τους συντάκτες των ελληνικών προγραμμάτων. Το παλαιότερο χρονικά είναι τα *Ρεαλιστικά Μαθηματικά* που αναπτύχθηκαν στην Ολλανδία. Ο όρος *Ρεαλιστικά Μαθηματικά* αναφέρεται αφ' ενός στη σύνδεση αυτών των μαθηματικών με την πραγματικότητα, αφ' ετέρου στο γεγονός ότι οι διδακτικοί στόχοι που θέτονται δεν υπερβαίνουν τις δυνατότητες των δασκάλων και μαθητών.[1]Οι βάσεις των *Ρεαλιστικών Μαθηματικών* τέθηκαν από τον H. Freudenthal και τους συνεργάτες του στα πλαίσια του IOWO (Ινστιτούτο για την Ανάπτυξη της Μαθηματικής Εκπαίδευσης), που αποτελεί τον πρόγονο του σημερινού *Ινστιτούτου Freudenthal.* Το Ινστιτούτο περιελάμβανε δύο τμήματα που βρίσκονταν σε συνεχή συνεργασία. Το Wiskobas (υπεύθυνο για τη μαθηματική εκπαίδευση στις ηλικίες 2-12) και το Wiskivon (υπεύθυνο για τη μαθηματική εκπαίδευση στις ηλικίες 12-16). Το Wiskobas από το 1971 ως το 1980 υλοποίησε ένα ερευνητικό πρόγραμμα που είχε στόχο την βελτίωση της διδασκαλίας των μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο και στα αποτελέσματα αυτής της έρευνας στήριξε τις προτάσεις του.

Επηρεασμένο από τα *Ρεαλιστικά Μαθηματικά* των Ολλανδών και νεώτερο είναι ένα πλαίσιο αρχών και στόχων για τη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο, που εκπονήθηκε το 2000 από το National Council of Teachers of

[1]Στο Streefland L. Ed,(2000) Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση. Αθήνα: Leader Books

Mathematics (NCTM), δηλαδή το Εθνικό Συμβούλιο Δασκάλων Μαθηματικών των Ηνωμένων Πολιτειών και είναι γνωστό ως 2000 NCTM Standards and Principles[2] . Στο γενικότερο αυτό πλαίσιο υπάρχουν ειδικότερα εκπαιδευτικοί στόχοι και δραστηριότητες σχετικά με τη διδασκαλία της Γεωμετρίας: τα 2000 NCTM Standards for Geometry.

Τέλος, με βάση τις δύο νέες τάσεις που περιγράψαμε αναπτύχθηκαν τα *Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής*. Ξεκινώντας από έρευνες στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Φλώρινας τη σχολική χρόνια 1996-1997, σχετικά με τις γνώσεις που φέρνουν οι μαθητές στο σχολείο, έγιναν αρχικά κάποιες προτάσεις για τη διδασκαλία. Στη συνέχεια διατυπώθηκαν οι θεωρητικές αρχές που αποτέλεσαν τις βάσεις για ένα νέο αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας των μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου, πάνω στις οποίες στηρίχθηκε και το Δ.Ε.Π.Π.Σ. που είδαμε προηγουμένως. Από τότε και μέχρι σήμερα δημιουργήθηκε ένα ολοκληρωμένο πακέτο εκπαιδευτικού υλικού, το οποίο δοκιμάζεται πειραματικά και διορθώνεται όλα αυτά τα χρόνια. Τα *Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής*, αφού εγκρίθηκαν από ελληνικό Παιδαγωγικό Ινστιτούτο θα εισαχθούν στις Α' και Γ' τάξεις του δημοτικού σχολείου από τη σχολική χρονιά 2006-2007.

Παρακάτω θα δούμε αυτές τις τρεις τάσεις αναλυτικότερα.

3.1 Ρεαλιστικά Μαθηματικά και κονστρουκτιβισμός

Η ομάδα του Wiskobas, που αναφέρθηκε και παραπάνω, σε θεωρητικό επίπεδο στηρίχθηκε κυρίως στο μαθησιακό κύκλο του Lewin, στη θεωρία επιπέδων των Van Hiele και στη διδακτική φαινομενολογία του Feudenthal.

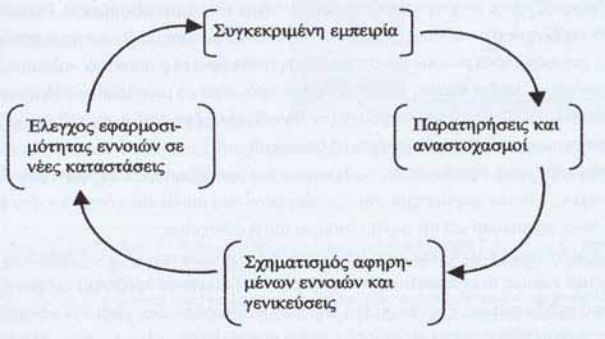
[2] National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Va.: NCTM

Κεντρική έννοια των *Ρεαλιστικών Μαθηματικών* είναι η *προοδευτική μαθηματικοποίηση*[3]

- Μαθησιακός κύκλος του K. Lewin

Πρόκειται για έναν κύκλο με εναλλαγή των τεσσάρων βασικών φάσεων της διαδικασίας της μάθησης: της συγκεκριμένης εμπειρίας (concrete experience), της αναστοχαστικής παρατήρησης (reflective observation), της αφαίρεσης και τυποποίησης (abstract conceptualization) και του ενεργού πειραματισμού (active experimentation).

Ο κύκλος του Lewin ουσιαστικά εικονίζει την μάθηση σαν μια «διαδικασία κατά την οποία η γνώση σχηματίζεται μέσα από το μετασχηματισμό της εμπειρίας[4]».



- Θεωρία επιπέδων των Van Hiele

Ένα ευρέως γνωστό μοντέλο αναφορικά με τη διδασκαλία της Γεωμετρίας **είναι** το *μοντέλο Van Hiele για τη γεωμετρική σκέψη*[5] που προέρχεται από τις διδακτορικές διατριβές της Dina van Hiele - Geldof και του συζύγου της Pierre van Hiele οι οποίες ολοκληρώθηκαν σχεδόν ταυτόχρονα στο πανεπιστήμιο της Ουτρέχτης. Το μοντέλο αυτό προβλέπει πέντε επίπεδα γεωμετρικής σκέψης: ***οπτικοποίηση, ανάλυση, άτυπη παραγωγή, τυπική παραγωγή, αυστηρό επίπεδο***. Δε θα αναφερθούμε αναλυτικά στο μοντέλο,

[3] Streefland L, 2000, ό.π. σ.34

[4] Είναι ο ορισμός του Kolb (1980) στο L. Streefland (edit.), *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση*. Αθήνα: Leader Books.

[5] Το μοντέλο van Hiele συναντάται σε πολλά έργα σχετικά με τη Γεωμετρία και τη διδασκαλία της. Ενδεικτικά : Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών.* Αθήνα:Leader Books, 257-259, 261, 269-279.

γιατί θεωρούμε πως είναι ήδη αρκετά γνωστό στο χώρο της διδακτικής της Γεωμετρίας. Αναλυτικός πίνακας με τα χαρακτηριστικά του ωστόσο παρατίθεται στο παράρτημα[6].

- Διδακτική φαινομενολογία του Freudenthal

Ο Freudenthal αντιμετωπίζει τις μαθηματικές έννοιες και δομές ως «εργαλεία» οργάνωσης των πραγματικών φαινομένων. Κατά τη διδασκαλία, ο μαθητής μαθαίνει να χειρίζεται αυτά τα «εργαλεία» στα πλαίσια ενός περιβάλλοντος αλληλεπίδρασης. Η ποικιλία και ο πλούτος των φαινομένων επιτρέπουν την αντιμετώπιση μιας μαθηματικής έννοιας ή δομής από διάφορες οπτικές γωνίες. Απέναντι, δηλαδή, στις «τεχνητές» μεταμφιέσεις των εννοιών που προτείνει η στρουκτουραλιστική προσέγγιση[7], ο Freudenthal αντιπαραθέτει μια «διδακτική φαινομενολογία» την οποία περιγράφει ως εξής *«...Αυτό που μπορεί να κάνει η διδακτική φαινομενολογία είναι να προετοιμάσει την αντίθετη προσέγγιση: αντί να παρουσιάσει στο μαθητή οργανωμένα φαινόμενα, με στόχο την ανακάλυψη των κοινών δομών, να ξεκινήσει από εκείνα τα φαινόμενα που ζητούν οργάνωση και έχοντας αυτά ως αφετηρία, να διδάξει το μαθητή πώς να χειρίζεται τα εργαλεία οργάνωσης... (δηλαδή τις μαθησιακές έννοιες και δομές). Σε μια διδακτική φαινομενολογία π.χ. του μήκους, του αριθμού κλπ., τα φαινόμενα που οργανώνονται από το μήκος, τον αριθμό κλπ. πρέπει να αναδειχθούν όσο περισσότερο γίνεται. Στη διδασκαλία, αντί να ξεκινήσει κάποιος από την παρουσίαση μιας έννοιας και να αναζητήσει στη συνέχεια υλικό που συγκεκριμενοποιεί αυτή την έννοια, πρέπει να αναζητήσει πρώτα τα φαινόμενα που αναγκάζουν το μαθητή να συγκροτήσει το νοητό αντικείμενο που μαθηματικοποιείται από τη συγκεκριμένη έννοια[8]. . .»*

---

[6] παράρτημα σ.

[7] Σύμφωνα με αυτήν, η κατανόηση της μαθηματικής δομής είναι προϋπόθεση της μάθησης των μαθηματικών εννοιών. Ανάλυση του όρου δίνεται από τους Κολέζα (2000, σελ.14, Καψάλης, Α., & Λεμονίδης, Χ. (1999). Σύγχρονες τάσεις της Διδακτικής των Μαθηματικών. *Μακεδνόν,* 6, σελ. 103

[8] Κολέζα, Ε. 2000 ό.π.

Ο Freudenthal λοιπόν προτείνει μια μαθηματική εκπαίδευση όπου οι μαθητές κατασκευάζουν μόνοι τους τις γνώσεις τους, προσδίδοντας νόημα σε προβλήματα που έχουν ως πλαίσιο τους τον πραγματικό κόσμο (real world context). Οι μαθητές καλούνται να αναπτύξουν στρατηγικές επίλυσης για τέτοια προβλήματα και να συζητήσουν γι' αυτές με άλλους μαθητές. Η εύρεση των λύσεων στα ρεαλιστικά προβλήματα όμως, δεν είναι το τέλος του μαθήματος σε αυτήν την προσέγγιση, για αυτό και οι δάσκαλοι πρέπει να βοηθούν τα παιδιά για να αναπτύξουν τις άτυπες στρατηγικές τους (informal strategies) σε πιο επίσημες προσεγγίσεις (formal approaches) που μπορούν έπειτα να χρησιμοποιήσουν σε άλλες καταστάσεις. Τα *Ρεαλιστικά Μαθηματικά* δεν ξεκινούν από αφηρημένες έννοιες και αρχές με σκοπό να μάθουν οι μαθητές να τις εφαρμόζουν σε συγκεκριμένες καταστάσεις.

- Η έννοια της *προοδευτικής μαθηματικοποίησης*

Στα *Ρεαλιστικά Μαθηματικά* οι πραγματικές καταστάσεις ή τα προβλήματα αντιμετωπίζονται σε μια πρώτη φάση διαισθητικά. Το διαισθητικό στοιχείο σε συνδυασμό με ένα αλληλεπιδραστικό περιβάλλον θα συντελέσει στο να ανασυρθούν οι μαθηματικές έννοιες από τις πραγματικές καταστάσεις στα γενικά πλαίσια μιας προοδευτικής μαθηματικοποίησης. Ο Treffers[9] και Goffree, ορίζουν τη μαθηματικοποίηση ως *μια δραστηριότητα οργάνωσης και δόμησης που εκτυλίσσεται στα πλαίσια του μαθησιακού κύκλου και κατά την οποία οι γνώσεις και ικανότητες που έχουν ήδη αποκτηθεί χρησιμοποιούνται για την ανακάλυψη άγνωστων σχέσεων και δομών. Κατά τη διαδικασία απόκτησης της γνώσης, η μαθηματικοποίηση εξυπηρετεί δυο βασικούς στόχους: την εισαγωγή και την κατανόηση μιας (νέας) μαθηματικής έννοιας και την γνωστική ενίσχυση της έννοιας μέσω επίλυσης προβλημάτων και την ανάδειξη του πεδίου εφαρμοσιμότητας της.*[10]

---

[9] Treffers, A. (2000). Το διδακτικό υπόβαθρο ενός προγράμματος μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο. Στο L. Streefland (edit.), *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση,* σ. 18-58. Αθήνα: Leader Books.

[10] Κολέζα, Ε. (2000)

Η μαθηματικοποίηση είναι δύο ειδών: οριζόντια και κάθετη. Κατά την οριζόντια μαθηματικοποίηση το πραγματικό πρόβλημα «μεταφράζεται» σε μαθηματικό πρόβλημα[11]. Μέσω συγκεκριμένων ενεργειών (όπως διατύπωση και αναπαράσταση του προβλήματος με διάφορους τρόπους, ανακάλυψη σχέσεων, ανακάλυψη ομοιοτήτων σε φαινομενικά διαφορετικές καταστάσεις κλπ.) προσπαθούμε να εντοπίσουμε τις μαθηματικές έννοιες και δομές που βρίσκονται διάχυτες σε ένα γενικότερο πλαίσιο (context).

Η διαδικασία αυτή της μετάφρασης καταλήγει στη δημιουργία ενός μοντέλου, η μαθηματική επεξεργασία του οποίου γίνεται στη φάση της κάθετης μαθηματικοποίησης. Κατά την κάθετη μαθηματικοποίηση το μαθηματικό πρόβλημα αντιμετωπίζεται και επεξεργάζεται με μαθηματικά εργαλεία (π.χ. αναπαράσταση μιας σχέσης με μαθηματικούς τύπους, απόδειξη σχέσεων, χρήση ήδη γνωστών μοντέλων, γενίκευση κλπ.).

Διδακτικές αρχές των *Ρεαλιστικών Μαθηματικών*

Με αφετηρία όσα περιγράψαμε τα *Ρεαλιστικά Μαθηματικά* προτείνουν τις παρακάτω αρχές για τη διδασκαλία των μαθηματικών:[12]

- Η αρχή της φαινομενολογικής εξερεύνησης

Όταν εισάγεται ένα νέο αντικείμενο οι μαθηματικές δραστηριότητες πρέπει να διατυπώνονται σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο (context). Η μάθηση μαθηματικών είναι μια εποικοδομητική δραστηριότητα, και όχι μια δραστηριότητα στην οποία ο μαθητής απορροφά τη γνώση που έχει παρουσιαστεί ή έχει διαβιβαστεί. Μια τέτοια εποικοδομητική δραστηριότητα είναι δυνατή όταν η αφετηρία της διδασκαλίας είναι πραγματικά εξερευνητική

[11] L. Streefland (edit.), (2000)ό.π. σ. xv.

[12] Meyer, M. (2001. Representation in Realistic Mathematics Education. *Yearbook (National Council of Teachers of Mathematics) 2001,* 238-250.

για τους μαθητές, προσφέροντας τους τη δυνατότητα να συμμετέχουν άμεσα σε μια μαθηματική δραστηριότητα που είναι για τους ίδιους σημαντική.

- Γεφύρωση των επιπέδων με χρήση εργαλείων

Η μάθηση μιας έννοιας ή η απόκτηση μιας δεξιότητας δεν είναι κάτι που συμβαίνει στιγμιαία. Ολοκληρώνεται κατά τη διάρκεια μιας μακριάς χρονικής περιόδου και προχωρά μέσω διαφόρων σταδίων. Η αρχική, άτυπη μαθηματική δραστηριότητα πρέπει να αποτελέσει μια συγκεκριμένη βάση από την οποία οι μαθητές αφαιρετικά κατασκευάζουν τις όλο και περισσότερο περίπλοκες μαθηματικές έννοιες. Οι μαθητές γεφυρώνουν τα χάσματα μεταξύ του συγκεκριμένου και του αυξανόμενου αφηρημένου επιπέδου με τη χρήση μοντέλων (π.χ. άβακας, αριθμογραμμή), σχημάτων, διαγραμμάτων, πινάκων και συμβόλων.

- Αρχή της αυτοδυναμίας

Η μάθηση των μαθηματικών από τους μαθητές και η πρόοδος τους στα διάφορα επίπεδα κατανόησης προωθούνται μέσω του αναστοχασμού (reflection) της πορείας που ακολούθησε το μυαλό τους. Δηλαδή σε κάθε φάση της μαθησιακής διαδικασίας ο μαθητής γνωρίζει και επιτρέπει και στον δάσκαλο να γνωρίζει, σε ποιο στάδιο βρίσκεται. Οι μαθητές πρέπει να έχουν την δυνατότητα να γνωρίζουν τι έχουν μάθει και που έχουν φτάσει (μεταγνώση).

- Αρχή της αλληλεπίδρασης

Ο μαθητής δεν είναι μόνος του αντιμέτωπος με τα μαθηματικά, αλλά κινείται σε ένα περιβάλλον αλληλεπίδρασης. Συνεπώς, η αλληλεπίδραση πρέπει να είναι μια ουσιαστική παράμετρος της διδασκαλίας. Οι εκπαιδευτικές δραστηριότητες πρέπει να ενθαρρύνουν τους μαθητές να δείχνουν, να εξηγούν και να αιτιολογούν τις λύσεις που επιλέγουν, να κατανοούν τις λύσεις των άλλων μαθητών, να συμφωνούν ή να διαφωνούν μαζί τους και να εξετάζουν εναλλακτικές λύσεις.

- Αρχή της συνύφανσης

Τα πραγματικά φαινόμενα, μέσα από τα οποία οι μαθηματικές δομές και οι έννοιες φανερώνονται, σπανίως εκφράζουν μόνο μια έννοια ή μια μόνο δομή. Σε πολλές περιπτώσεις μάλιστα εμφανίζουν μια ισχυρή συσχέτιση. (Π.χ κλάσματα και δεκαδικοί αριθμοί) Κατά συνέπεια, η διδασκαλία μαθηματικών εννοιών πρέπει να λαμβάνει υπόψη τη συνύφανση τους και να μη γίνεται αποκομμένη η μια από την άλλη.

3.1.1 Η Ρεαλιστική προσέγγιση στη διδασκαλία της Γεωμετρίας

Σύμφωνα με τη ρεαλιστική προσέγγιση, η διδασκαλία της Γεωμετρίας στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση περιλαμβάνει έξι ομάδες δραστηριοτήτων οι οποίες αλληλοσυμπληρώνονται στα πλαίσια επιμέρους διδακτικών στόχων:

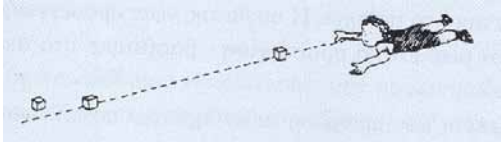
1. *Βλέπω και προβάλλω,*
2. *Προσανατολίζομαι και εντοπίζω,*
3. *Η λογική του χώρου* ,
4. *Μετασχηματίζω*,
5. *Κατασκευάζω και σχεδιάζω και*
6. *Μετρώ και υπολογίζω.*

Πιο αναλυτικά[13]:

Βλέπω και προβάλλω

Τέτοιες δραστηριότητες μπορεί να είναι: κοιτάζω (παρατηρώ), αντιλαμβάνομαι, αναπαριστώ και εξηγώ αντικείμενα στα οποία η ιδέα της ευθείας γραμμής παίζει κεντρικό ρόλο. Τα παιδιά μπορούν να αντιληφθούν την έννοια της ευθείας με τη μορφή μιας γραμμής κατά μήκος της οποίας κοιτάνε, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Άλλες έννοιες που μπορούν να συζητηθούν

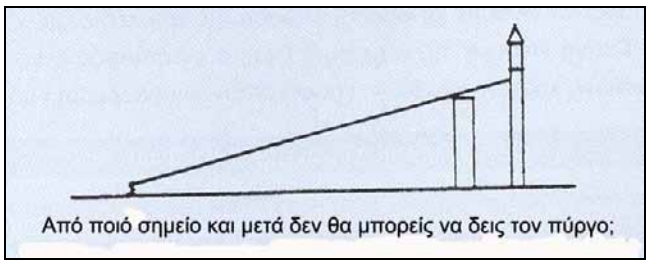
[13] De Moor, E. (2000). Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στην Ολλανδία (ηλικίες 4-14) – η ρεαλιστική προσέγγιση. Στο L. Streefland (edit.), *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση,* σ. 131-153. Αθήνα: Leader Books.



σε αυτή την ομάδα είναι: *σημείο, κατεύθυνση, γωνία, απόσταση, παραλληλία, τεμνόμενες και μη τεμνόμενες γραμμές στο χώρο, επίπεδα* και οι σχέσεις μεταξύ τους. Από την αρχή, ο χώρος πρέπει να εξερευνηθεί ξεκινώντας από καθημερινές εμπειρίες και απλά πειράματα. Οι δραστηριότητες πρέπει να έχουν άτυπο χαρακτήρα, έτσι ώστε να μπορούν να αναλυθούν οι διαισθητικές απόψεις ως προς αυτές τις βασικές έννοιες. Αυτό σημαίνει ότι ξεκινάμε από τον πραγματικό κόσμο. Διάφορα καθημερινά φαινόμενα αποδεικνύονται πλούσια πηγή γεωμετρικών δραστηριοτήτων. Για τους πολύ μικρούς μαθητές (4-6 ετών):

- κρυφτό
- κατασκευή καλειδοσκοπίων
- πειράματα μακριά - κοντά
- κάνοντας σκιές
- κοιτάζοντας μέσα από έναν κύλινδρο

Για τις ηλικίες 6-10 πολλές από τις προηγούμενες δραστηριότητες μπορούν να επανεξεταστούν. Αλλά αυτή τη φορά δίδεται περισσότερη προσοχή σε ερμηνείες μέσω οπτικοποίησης, όπως για παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα

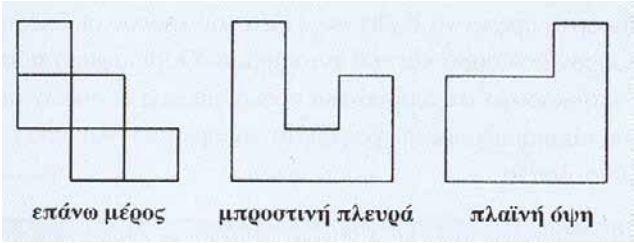


.

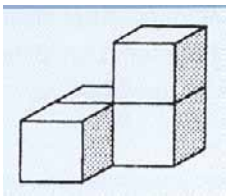
Προσανατολίζομαι και εντοπίζω

Ο προσανατολισμός στην καθημερινή μας ζωή σημαίνει απλά ότι κάποιος γνωρίζει τη θέση του στον περιβάλλοντα χώρο (τόσο στο άμεσο περιβάλλον (ένα δωμάτιο, το σπίτι, η γειτονιά) όσο και σε ευρύτερους χώρους (πόλη, χώρα, κόσμος...)). και ότι γνωρίζει πώς να μετακινηθεί από ένα σημείο σε κάποιο άλλο. Ο εντοπισμός δεν έχει να κάνει τόσο με το άτομο αυτό καθ'

αυτό, αλλά σχετίζεται περισσότερο με την περιγραφική όψη του προσανατολισμού. Εντοπίζω, σημαίνει προσδιορίζω τη σχετική θέση ενός αντικειμένου σε ένα δεδομένο χώρο. Μια τέτοια περιγραφή μπορεί να γίνει με τη φυσική γλώσσα, με το σχέδιο, με χρήση συμβόλων ή τύπων. Πιο συγκεκριμένα, ο εντοπισμός έχει να κάνει με την περιγραφή δρόμων, χαρτών, σχεδίων, γραφημάτων και χωρικών μοντέλων.



Στο νηπιαγωγείο και την Α' τάξη Δημοτικού ο προσανατολισμός θεωρείται σημαντικός. Υπάρχουν δυνατότητες να κατανοήσει κανείς έννοιες όπως το «μπροστά από πίσω, από πάνω, από κάτω, μακριά, κοντά...» και τα λοιπά, μέσα από παιχνίδια τόσο στο σχολείο όσο και στο σπίτι. Παράδειγμα η περίπτωση του προβλήματος όπου το παιδί πρέπει να περιγράψει από το τηλέφωνο το ακριβές σχήμα μιας συγκεκριμένης κατασκευής από κύβους, όπως αυτή που φαίνεται δίπλα.



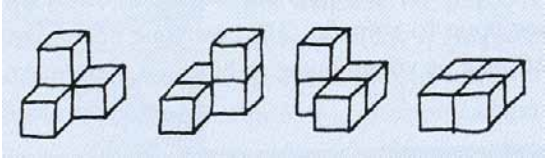
Η λογική του χώρου

Παλαιότερα, η λογική σκέψη θεωρούταν χαρακτηριστικό της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ξεκινώντας με ένα αριθμό αξιωμάτων, τα θεωρήματα παράγονταν με τη λογική, το ένα από το άλλο. Αυτό γινόταν κυρίως με τη βοήθεια της παραδοσιακής προτασιακής λογικής.

Μπορεί όμως, να σκεφθεί κανείς λογικά, χωρίς ειδική γνώση της τυπικής λογικής. Στην περίπτωσή μας, αυτό αφορά το συλλογισμό που προκύπτει από ένα γεωμετρικό πρόβλημα ή ένα πρόβλημα που έχει γεωμετρικά χαρακτηριστικά, όπως το πρόβλημα της κατασκευής με κύβους που φαίνεται δίπλα. Το ζητούμενο είναι να καθοριστεί η ακριβής σύνθεση μιας κατασκευής όταν δίδεται το επάνω μέρος, η μπροστινή πλευρά και η πλαϊνή όψη. Ο

συλλογισμός για την επίλυση αφορά συνδυασμό συγκεκριμένων δεδομένων και έτσι δίνεται στα παιδιά η ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν μια συνήθη μαθηματική μέθοδο στο δικό τους επίπεδο. Ειδικότερα μαθαίνουν να διατυπώνουν υποθέσεις, να τις ελέγχουν, να τις απορρίπτουν ή να τις επαληθεύουν.

Για παράδειγμα ένα πρόβλημα τέτοιου τύπου που μπορεί να δοθεί σε μαθητές δημοτικού είναι: Πόσα διαφορετικά σπίτια μπορείς να χτίσεις με τέσσερις κύβους;



Μετασχηματίζω

Από τη δεκαετία του '60 υπάρχει ένα ολοένα αυξανόμενο ενδιαφέρον για τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς όπως η αντανάκλαση, η περιστροφή, η μεταφορά και οι μεταξύ τους σχέσεις, όχι μόνο στη δευτεροβάθμια, αλλά και στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Ιδιαίτερη προσοχή έχει δοθεί στη συμμετρία. Ήδη για τους πολύ μικρούς (4 - 6) υπάρχουν πολλές ανάλογες δραστηριότητες όπως το δίπλωμα, η μεταφορά και η χρήση καθρέφτη. Η συμμετρία θεωρούνταν πάντα ένα πλούσιο σε νόημα θέμα από τους Pestalozzi, Frobel και Montessori. Και η ρεαλιστική προσέγγιση στη Γεωμετρία δίνει επίσης ιδιαίτερη βαρύτητα σε αυτό το θέμα.

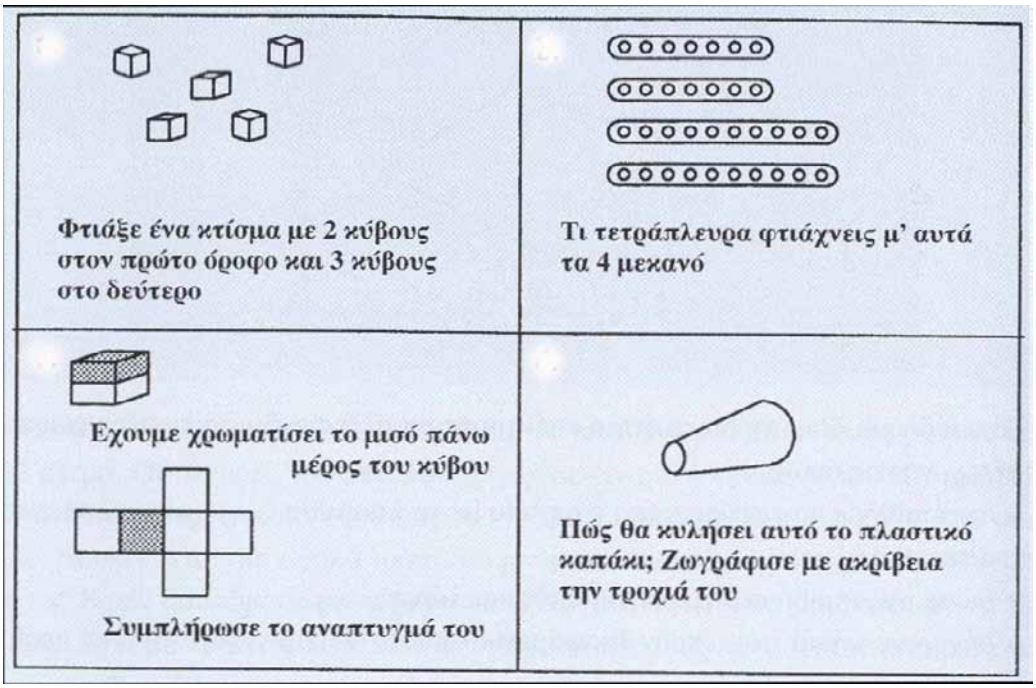
Δεξιότητες και έννοιες δε διδάσκονται άμεσα, ούτε ορίζονται σαφώς, αλλά προκύπτουν από την πραγματικότητα της αντίληψης μέσα από πλούσια περιβάλλοντα και με ανεπίσημο τρόπο. Όταν το στοιχείο του μεγέθους παραμένει σταθερό, οι μετασχηματισμοί αποκαλούνται μετασχηματισμοί ταύτισης. Υπάρχουν όμως πολλοί μετασχηματισμοί που δεν έχουν αυτό το χαρακτηριστικό. Όταν τα σχήματα αλλάζουν κατά τον μετασχηματισμό, διατηρώντας όμως τη μορφή τους, έχουμε μετασχηματισμό ομοιότητας. Στην καθημερινή μας ζωή αυτό το ονομάζουμε μεγέθυνση ή σμίκρυνση. Η μεγέθυνση και η σμίκρυνση έχουν μεγάλη σημασία στα πρώτα βήματα της διδασκαλίας της Γεωμετρίας γιατί οι μικρότεροι μαθητές συναντούν

μετασχηματισμούς αυτού του είδους. Όταν, για παράδειγμα, ο δάσκαλος ζωγραφίζει στον πίνακα κάτι το οποίο πρέπει να αντιγράψουν οι μαθητές, εκείνοι θεωρούν απολύτως φυσιολογικό ότι το μέγεθος των δικών τους αντιγράφων είναι δέκα φορές μικρότερο από την αρχική ζωγραφιά. Η εικόνα που κάνουν πρέπει να είναι όμως ένα πιστό αντίγραφο, να έχει το ίδιο σχήμα. Στη γεωμετρική ορολογία αυτό σημαίνει ότι οι αναλογίες που υπάρχουν στο αρχικό αντικείμενο διατηρούνται και στην εικόνα τους. Τα παιδιά ήδη είναι οικεία με αυτό το φαινόμενο από τις φωτογραφίες, τις ζωγραφιές, τα σλάιτς, τις εικόνες από τον προβολέα, τα μοντέλα κ.λ.π. Η έννοια της ομοιότητας μπορεί επίσης να φανεί από αντιπαραδείγματα, όπως η τοποθέτηση της οθόνης προβολής υπό οξεία γωνία.

Κατασκευάζω και σχεδιάζω

Ο όρος κατασκευάζω στην Ευκλείδεια γεωμετρική παράδοση σημαίνει χαράζω σχήματα με κανόνα (χωρίς υποδιαιρέσεις) και διαβήτη. Τα ρεαλιστικά μαθηματικά υιοθετούν μια περισσότερο ευρεία άποψη της κατασκευής και ξεκινούν από το φυσικό της νόημα. Αυτό σημαίνει ταίριασμα σχημάτων δύο και τριών διαστάσεων κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες. Στην αρχή αυτό μπορεί να γίνει με συγκεκριμένο υλικό (κύβοι, μεκανό), αλλά αργότερα αυτό εξελίσσεται σε δραστηριότητες νοερής φύσης. Κατά την περίοδο των συγκεκριμένων ενεργειών προτείνουν κατασκευές με κύβους και Lego, με αποκόμματα, ψηφιδωτά, tangram και σανίδες με εσοχές για μικρούς πασσάλους. Επίσης με δίπλωμα χαρτιών και κατασκευή μοντέλων. Σχετικά με τη σχεδίαση, έχουμε τη σχεδίαση σε κλίμακα, το σχεδιασμό πλακοστρώσεων, τη σχεδίαση τρισδιάστατων σωμάτων και τον προσδιορισμό περιοχών. Παρ' όλο που μπορούμε να κάνουμε χρήση διαφόρων βοηθητικών υλικών (ψαλίδι, κορδόνι) σε κάποιο σημείο πρέπει να αποκτηθεί συγκεκριμένη δεξιότητα με τα γνωστά όργανα όπως ο κανόνας, ο διαβήτης, το τρίγωνο, το μοιρογνωμόνιο, το διάφανο χαρτί και ούτω καθ' εξής. Η σχεδίαση, λοιπόν, έχει επίσης μια τεχνική

πλευρά. Αλλά και η τέχνη του σκιτσαρίσματος είναι σημαντική ειδικά όταν χρησιμοποιείται για να οπτικοποιήσει προβλήματα. Οπτικοποιήσεις (πρόχειρος σχεδιασμός, ένα σχήμα, ένα διάγραμμα,...) που βοηθούν την νοερή κατασκευή είναι απαραίτητες στη Γεωμετρία, αλλά μπορούν επίσης να μας φανούν πολύ χρήσιμες και σε άλλες περιοχές των μαθηματικών. Ας σκεφτούμε για παράδειγμα την κατασκευή των διαφόρων όψεων μιας σύνθεσης από κύβους ή την νοερή απεικόνιση μιας διαδρομής ταξιδιού. Το αντίστροφο, ειδικότερα η ερμηνεία των σχεδίων και των νοερών απεικονίσεων είναι στενά συνδεδεμένα με δραστηριότητες συλλογισμού. Με λίγα λόγια η κατασκευή δεν αφορά μόνο εμπειρικές δραστηριότητες, αλλά ένας από τους βασικούς της στόχους είναι η ανάπτυξη μιας λογικής του χώρου. Αυτό επιδιώκουν τα ερωτήματα στα παρακάτω σχήματα:

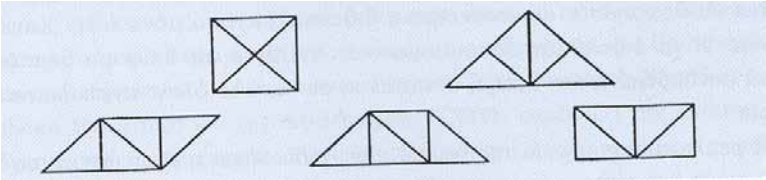


Μετρώ και υπολογίζω

Η πρακτική μέτρηση του μήκους, των εμβαδών και των όγκων υπήρξε η βάση για την αρχή της Γεωμετρίας, σύμφωνα και με την ίδια την ετυμολογία της λέξης.

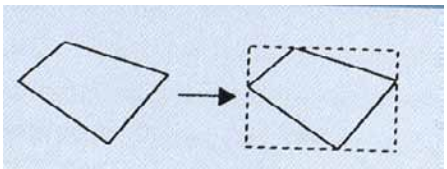
Μόλις βρεθεί κάποιο γεωμετρικό μοντέλο για ένα πρόβλημα, το πρόβλημα περιορίζεται στην επιλογή μιας μονάδας μέτρησης και στην εκτέλεση της πράξης. Στην ουσία με τη δραστηριότητα της μέτρησης γίνεται μια σύνδεση μεταξύ Γεωμετρίας και υπολογισμών.

Σχετικές δραστηριότητες μπορούν να είναι η ανεύρεση εμβαδών τετραπλεύρων και τριγώνων. Μια σημαντική διδακτική αρχή σχετικά με αυτό το θέμα είναι η επανακατασκευή των σχημάτων με τέτοιο τρόπο, ώστε τα παιδιά να προσεγγίσουν την ιδέα της διατήρησης του εμβαδού.

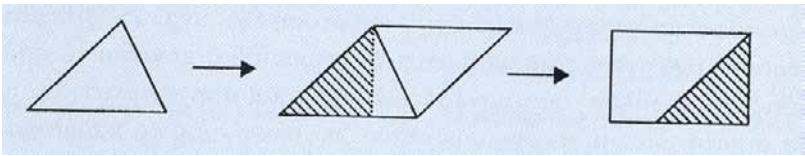


Μια δεύτερη αρχή είναι η αντικατάσταση ενός σχήματος με μια συγκεκριμένη τιμή, με μονάδα μέτρησης ένα άλλο εμβαδόν ως προς το οποίο το αρχικό σχήμα είναι διπλάσιο, τριπλάσιο κλπ.

Η τρίτη αρχή αφορά τη συμπλήρωση επιπέδων σχημάτων, έτσι ώστε να σχηματισθεί ένα παραλληλόγραμμο.



Αν είναι γνωστό ότι το εμβαδόν ενός παραλληλόγραμμου είναι το γινόμενο του μήκους και του πλάτους του, το εμβαδόν κάθε τριγώνου (και τετράπλευρου) μπορεί σχηματικά να παρουσιασθεί όπως παρακάτω:

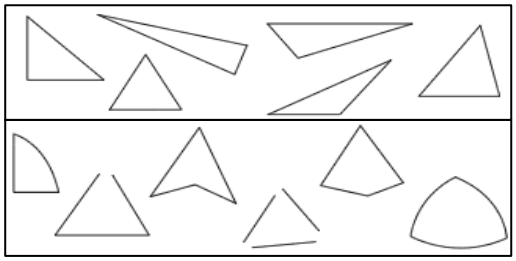


Ένα κάθετα σχηματισμένο πρόγραμμα σπουδών για το εμβαδόν πρέπει να απλώνεται σε όλη την ηλικιακή περίοδο από 4 μέχρι 14. Αρχικά θα δοθεί έμφαση στις συγκεκριμένες δραστηριότητες, αργότερα στις οπτικές και νοητικές δραστηριότητες. Το θέμα μπορεί να κλείσει με μια περισσότερο τυπική και συστηματική προσέγγιση.

3.2. Principles and Standards for School Mathematics

Είπαμε και προηγούμενα ότι τα *ρεαλιστικά μαθηματικά* επηρέασαν σε ένα βαθμό και 2000 NCTM Standards and Principles που αναπτύχθηκαν στις Η.Π.Α.[14]. Σύμφωνα με τα 2000 NCTM Standards for Geometry τα εκπαιδευτικά προγράμματα Γεωμετρίας πρέπει να επιτρέπουν την εμπλοκή όλων των μαθητών στα εξής:

- **ανάλυση των χαρακτηριστικών και των ιδιοτήτων δισδιάστατων και τρισδιάστατων γεωμετρικών μορφών και ανάπτυξη μαθηματικών επιχειρημάτων για τις γεωμετρικές σχέσεις**



Οι μαθητές φέρνουν από το εξωσχολικό τους περιβάλλον αρκετές σκόρπιες και εμπειρικές γνώσεις για τα γεωμετρικά σχήματα. Στο αρχικό αυτό στάδιο δεν αποτελεί επιδίωξη του σχολείου να καταργήσει αυτές τις γνώσεις και να τις αντικαταστήσει με τυπικούς μαθηματικούς ορισμούς για τα σχήματα και τις ιδιότητές του. Σημαντικό σε κάθε περίπτωση είναι να δίνουμε παραδείγματα σχημάτων που πληρούν κάποιες ιδιότητες, όπως και σχημάτων που δεν τις πληρούν.

Παρόλο που δεν πρέπει να παραμείνουμε στο επίπεδο της αναγνώρισης των σχημάτων, αλλά πρέπει να εστιάσουμε και στις ιδιότητες και τις σχέσεις τους, αυτό δεν πρέπει να γίνει με αυστηρό φορμαλιστικό τρόπο. Παραδείγματος χάρη τα παιδιά στις μικρότερες τάξεις, μπορούν να παρατηρήσουν ότι τα ορθογώνια βολεύουν στην κάλυψη επιφανειών (tiling), επειδή έχουν τέσσερις ορθές γωνίες.

Σε αυτές τις ηλικίες μπορούν να μάθουν για τις γεωμετρικές μορφές χρησιμοποιώντας αντικείμενα που βλέπουν, κρατούν και χειρίζονται.

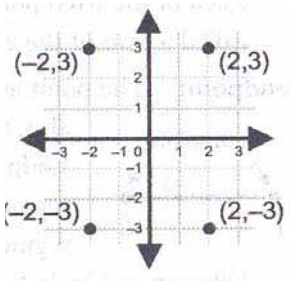
[14] www.standards.nctm.org

Αργότερα, η μελέτη των ιδιοτήτων των γεωμετρικών μορφών και των ιδιοτήτων τους γίνεται περισσότερο αφαιρετική. Σε μεγαλύτερες τάξεις, οι μαθητές μπορούν να μάθουν να εστιάζουν και να συζητούν τα συστατικά των μορφών, όπως οι πλευρές και οι γωνίες, και τις ιδιότητες τους. Συγκεκριμένα από το Νηπιαγωγείο μέχρι και τη δευτέρα δημοτικού οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί:

- Να αναγνωρίζουν, ονομάζουν, χτίζουν, σχεδιάζουν, συγκρίνουν και ταξινομούν δισδιάστατες και τρισδιάστατες μορφές-σχήματα.
- Να περιγράφουν τις ιδιότητες και τα μέρη δισδιάστατων και τρισδιάστατων μορφών-σχημάτων.
- Να ερευνούν και να προβλέπουν τα αποτελέσματα που προκύπτουν όταν ενώνουν ή χωρίζουν δισδιάστατες και τρισδιάστατες μορφές-σχήματα.

- **Προσδιορισμός των θέσεων αντικειμένων και γεωμετρικών σχημάτων και περιγραφή χωρικών σχέσεων (spatial relationships), χρησιμοποιώντας την αναλυτική Γεωμετρία (coordinate geometry) και άλλα αντιπροσωπευτικά συστήματα**

Στην αρχή τα μικρά παιδιά μαθαίνουν τις έννοιες της σχετικής θέσης, όπως *πάνω από*, *πίσω από*, *κοντά*, και *μεταξύ*. Αργότερα μπορούν να χρησιμοποιούν τα ορθογώνια πλέγματα (τετραγωνισμένο – millimetre – χαρτί) για να εντοπίσουν τα αντικείμενα και για να μετρήσουν την απόσταση μεταξύ των σημείων, σύμφωνα με τις κάθετες ή οριζόντιες γραμμές. Η εμπειρία με ορθογώνια επίπεδα πλέγματα και συντεταγμένες είναι χρήσιμη γιατί μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην επίλυση μιας μεγάλης σειράς προβλημάτων στη Γεωμετρία και Άλγεβρα. Παραδείγματος χάρη, στις μεγάλες τάξεις του



Δημοτικού τα ορθογώνια επίπεδα πλέγματα και οι συντεταγμένες μπορούν να είναι χρήσιμα εργαλεία στην ανακάλυψη και ανάλυση των ιδιοτήτων των σχημάτων. Η εύρεση των αποστάσεων μεταξύ σημείων σε ένα επίπεδο και η χρησιμοποίηση κλίμακας στους χάρτες είναι σημαντικές δραστηριότητες. Τα γεωμετρικά σχήματα - όπως οι ευθείες - μπορούν να αναπαρασταθούν αναλυτικά, εγκαθιστώντας κατά συνέπεια μια θεμελιώδη σύνδεση μεταξύ της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας.

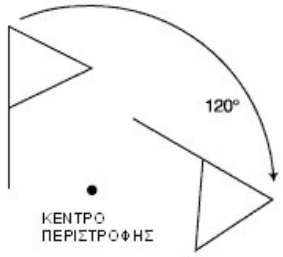
Οι μαθητές πρέπει να αποκτήσουν εμπειρία στη χρησιμοποίηση ποικίλων οπτικών αναπαραστάσεων για να αναλύουν προβλήματα. Στις τάξεις του Δημοτικού, για παράδειγμα, η πράξη πρόσθεσης ακεραίων αριθμών μπορεί να εντοπιστεί στη γραμμή αριθμών. Σε μεγαλύτερες τάξεις τα ορθογώνια πλέγματα και οι κατανομές επιφανειών σε ορθογώνια (σειρές και στήλες), μπορεί να βοηθήσουν στην κατανόηση του πολλαπλασιασμού.

Από το Νηπιαγωγείο μέχρι και τη Δευτέρα δημοτικού οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί:

- Να περιγράφουν, ονομάζουν και κατανοούν τις σχετικές θέσεις των σωμάτων στον χώρο .
- Να περιγράφουν, ονομάζουν και κατανοούν την κατεύθυνση και την απόσταση στον χώρο και να εφαρμόζουν τις ιδέες τους για την κατεύθυνση και την απόσταση
- Να βρίσκουν και ονομάζουν θέσεις με απλές σχέσεις όπως *κοντά σε*, καθώς και σε συστήματα συντεταγμένων, όπως οι χάρτες.

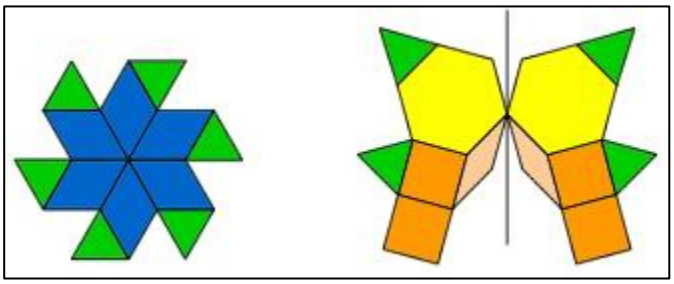
- **Εφαρμογή των μετασχηματισμών και η χρήση της συμμετρίας για την ανάλυση μαθηματικών καταστάσεων**

Τα μικρά παιδιά έρχονται στο σχολείο με διαισθητική γνώση (intuition) για το πώς οι γεωμετρικές μορφές μπορούν να κινηθούν. Μπορούν να ερευνήσουν κινήσεις όπως η μετατόπιση,



η αναστροφή και η αντιστροφή με τη χρησιμοποίηση καθρεφτών, χαρτιών που διπλώνουν και διαφανών χαρτιών αντιγραφής. Αργότερα, η γνώση τους για τους μετασχηματισμούς πρέπει να γίνει πιο συστηματική. Από την Τρίτη τάξη και έπειτα οι μαθητές μπορούν να ερευνήσουν τα αποτελέσματα των μετασχηματισμών και να αρχίσουν να τους περιγράφουν με μαθηματικούς όρους. Χρησιμοποιώντας δυναμικό λογισμικό Γεωμετρίας, μπορούν να αρχίσουν να μαθαίνουν τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα που απαιτούνται για να προσδιορίσουν έναν μετασχηματισμό. Παραδείγματος χάρη, για να μετασχηματίσουν ένα γεωμετρικό σχήμα χρησιμοποιώντας περιστροφή, πρέπει να καθορίσουν το κέντρο της περιστροφής, την κατεύθυνση της περιστροφής, και τη γωνία της περιστροφής, όπως φαίνεται δίπλα.

Επίσης η μελέτη της συμμετρίας διευρύνει το γνωστικό πεδίο στα μαθηματικά, την τέχνη και την αισθητική.



Από το Νηπιαγωγείο μέχρι και τη Δευτέρα δημοτικού οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί:

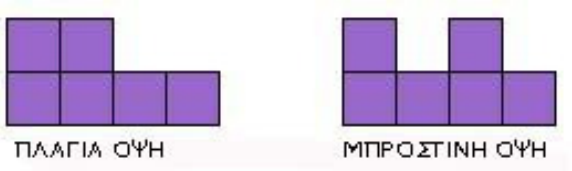
- Να αναγνωρίζουν και να εφαρμόζουν μετατοπίσεις, περιστροφές και αντιστροφές.
- Να αναγνωρίζουν και να δημιουργούν σχήματα που έχουν συμμετρία.

- **Χρήση της νοερής απεικόνισης (visualization), της χωροταξικής λογικής (spatial reasoning) και των γεωμετρικών μοντέλων για την επίλυση προβλημάτων.**

Στις πρώτες τάξεις του σχολείου οι μαθητές πρέπει να αναπτύξουν δεξιότητες νοερής απεικόνισης μέσω της εμπειρίας με ποικίλα γεωμετρικά

αντικείμενα και μέσω της χρήσης της τεχνολογίας που επιτρέπει τη μετατόπιση, τη σμίκρυνση και την παραμόρφωση δισδιάστατων και τρισδιάστατων αντικειμένων. Αργότερα, πρέπει να αποκτήσουν άνεση στην ανάλυση και σχεδίαση αντικειμένων από διάφορες οπτικές γωνίες, στον υπολογισμό των συστατικών μερών τους και στην περιγραφή των χαρακτηριστικών τους που δεν μπορούν να δουν αλλά μπορούν να συναγάγουν. Οι μαθητές πρέπει να μάθουν – και σε πραγματικές συνθήκες και νοερά - να αλλάζουν τη θέση, τον προσανατολισμό και το μέγεθος των γεωμετρικών αντικειμένων με συστηματικό τρόπο, δεδομένου ότι αρχίζουν να κατανοούν όρους όπως ταύτιση (congruence), ομοιότητα (similarity) και μετασχηματισμός (transformation).

Μια πτυχή της χωροταξικής απεικόνισης αφορά την κίνηση μεταξύ δισδιάστατων και τρισδιάστατων μορφών και η αναπαράσταση τους. Οι μαθητές του Δημοτικού μπορούν μετατρέπουν όψεις τρισδιάστατων αντικειμένων σε δισδιάστατα σχέδια πάνω σε χαρτί, ως πρώτο βήμα για να προβλέπουν εάν τέτοια δισδιάστατα σχέδια ταιριάζουν με ορισμένα γεωμετρικά στερεά. Στις μεγαλύτερες τάξεις πρέπει να είναι σε θέση να αντιλαμβάνονται και να δημιουργούν τις όψεις των αντικειμένων από πλάγια ή από πάνω. Αυτή η ικανότητα μπορεί να αναπτυχθεί όταν τους ζητάμε να χτίσουν με κύβους ένα κτίριο δίνοντας τους μόνο την πλάγια και τη μπροστινή όψη του, όπως φαίνεται στην εικόνα. Σε μεγαλύτερες τάξεις οι μαθητές μπορούν να καθορίσουν εάν είναι δυνατό να χτιστούν περισσότερα από ένα κτίρια που να ικανοποιούν και τους δύο όρους.



Από το Νηπιαγωγείο μέχρι και τη Δευτέρα δημοτικού οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί:

- Να δημιουργούν νοητικές εικόνες των γεωμετρικών μορφών χρησιμοποιώντας την χωρική μνήμη και την χωροταξική απεικόνιση.

- Να αναγνωρίζουν και να αναπαριστούν τις γεωμετρικές μορφές από διαφορετικές προοπτικές.
- Να σχετίζουν γεωμετρικές έννοιες με τους αριθμούς και τη μέτρηση.
- Να αναγνωρίζουν γεωμετρικές μορφές και δομές στο περιβάλλον και να καθορίζουν τη θέση τους.

Οι γεωμετρικές ιδέες είναι χρήσιμες στην αναπαράσταση και την επίλυση προβλημάτων σε άλλους τομείς των μαθηματικών και σε πραγματικές καταστάσεις ζωής, γι' αυτό η Γεωμετρία πρέπει να ενσωματώνεται όπου είναι δυνατόν με άλλες θεματικές περιοχές. Οι γεωμετρικές αναπαραστάσεις μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν το εμβαδόν και τα κλάσματα, τα ιστογράμματα τα καρτεσιανά σχεδιαγράμματα και οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να χρησιμεύσουν για να συνδέσουν τη Γεωμετρία με την Άλγεβρα. Η χωροταξική λογική (spatial reasoning) είναι χρήσιμη στη χρήση χαρτών, στο σχεδίασμα διαδρομών, στη δημιουργία τέχνης. Οι μαθητές μπορούν να μάθουν να βλέπουν τη δομή και τη συμμετρία γύρω τους. Χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα πρότυπα, σχέδια, και δυναμικό λογισμικό Γεωμετρίας μπορούν να κατανοήσουν ενεργά τις γεωμετρικές έννοιες. Με δραστηριότητες καλά σχεδιασμένες, κατάλληλα εργαλεία και υποστήριξη των δασκάλων, οι μαθητές μπορούν να κάνουν υποθέσεις για τη Γεωμετρία και να τις διερευνήσουν, μπορούν να μάθουν να συλλογίζονται προσεκτικά για τις γεωμετρικές έννοιες από τα πρώτα χρόνια της σχολικής εκπαίδευσης. Η Γεωμετρία είναι κάτι πολύ περισσότερο από ορισμούς, είναι περιγραφή σχέσεων, είναι σκέψη που βασίζεται στη λογική. Η άποψη για σταδιακή κατανόηση της Γεωμετρίας από σχολική τάξη σε σχολική τάξη, για το πέρασμα από την άτυπη στην τυπική σκέψη, είναι σύμφωνη με τις μελέτες

θεωρητικών και ερευνητών[15] (Η Γεωμετρία θεωρείται ως το κομμάτι του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών στο σχολείο όπου οι μαθητές μαθαίνουν να σκέπτονται λογικά και γνωρίζουν την αξιωματική δομή των μαθηματικών. Τα *2000 Standards for Geometry* επικεντρώνονται στην ανάπτυξη μιας προσεκτικής λογικής και αποδεικτικής σκέψης, χρησιμοποιώντας ορισμούς και διαπιστωμένα στοιχεία. Η τεχνολογία έχει επίσης έναν σημαντικό ρόλο στη διδασκαλία και την μάθηση της Γεωμετρίας. Εργαλεία όπως το δυναμικό λογισμικό Γεωμετρίας[16] επιτρέπουν στους μαθητές να έχουν μια αλληλεπιδραστική εμπειρία με μια μεγάλη ποικιλία δισδιάστατων μορφών, παραδείγματα για να εξερευνήσουν υποθέσεις, αλλά είναι σημαντικό να κατανοήσουν ότι η παραγωγή πολλών παραδειγμάτων ενός ιδιαίτερου φαινομένου δεν αποτελεί απόδειξη. Η νοερή απεικόνιση και η χωροταξική λογική (spatial reasoning) βελτιώνονται επίσης από την αλληλεπίδραση με τη δυνατότητα για δυναμική κίνηση που διαθέτουν οι υπολογιστές[17].

Οι γεωμετρικές γνώσεις και οι γνώσεις χώρου που τα παιδιά ήδη έχουν καθώς έρχονται στο σχολείο, πρέπει να επεκταθούν από εξερευνήσεις και συζητήσεις μέσα στην τάξη για τις μορφές-σχήματα. Οι μαθητές πρέπει να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις γεωμετρικών εννοιών για να γίνουν ικανότεροι στην περιγραφή, στην αναπαράσταση και στον χειρισμό του περιβάλλοντός τους. Πρέπει να μάθουν να αναπαριστούν δισδιάστατες και τρισδιάστατες μορφές μέσω των σχεδίων, των κατασκευών με κύβους και των λέξεων. Πρέπει

---

[15] Burger, W., & Shaughnessy, M. (1986). Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education,* 17, 31–48.

[16] υπάρχουν δυο ευρέως χρησιμοποιούμενα λογισμικά Γεωμετρίας το *Geometer's Sketchpad* και το *Cabri Geometry.*

[17] Clement, J., DiPerna E., Gavin, J., Hanner, S., James, E., Putz, A., Rohlfing, M., & Wainwright, S. (1997) *Children's Work with Data.* Madison, Wis.: Wisconsin Center for Education Research, University of Wisconsin—Madison.

να ερευνούν τις μορφές διασπώντας τες σε επιμέρους κομμάτια και δημιουργώντας με αυτά νέες. Η γνώσεις τους για την κατεύθυνση και τη θέση των αντικειμένων πρέπει να βελτιωθεί μέσω της χρήσης της προφορικής γλώσσας, έτσι ώστε να εντοπίζουν αντικείμενα όταν τους δίνεται μια πορεία με πολλαπλές κατευθύνσεις.

Η Γεωμετρία προσφέρει στους μαθητές μια πτυχή της μαθηματικής σκέψης που είναι διαφορετική από τον κόσμο των αριθμών, αλλά συνδέεται μ' αυτόν. Καθώς οι μαθητές γίνονται οικείοι με τη μορφή-σχήμα, με τις δομές, τις θέσεις, τους μετασχηματισμούς και καθώς αναπτύσσουν την χωροταξική λογική, θέτουν τα θεμέλια για την κατανόηση, όχι μόνο του χώρου που τους περιβάλλει, αλλά και άλλων θεματικών περιοχών στα μαθηματικά και την τέχνη, την επιστήμη και τις κοινωνικές σπουδές. Οι ικανότητες μερικών μαθητών με τις γεωμετρικές και χωροταξικές έννοιες υπερβαίνουν τις ικανότητες που έχουν με τους αριθμούς. Η ύπαρξη γεωμετρικών ικανοτήτων καλλιεργεί την αγάπη για τα μαθηματικά και παρέχει ένα πλαίσιο ανάπτυξης του αριθμού, καθώς και άλλων μαθηματικών εννοιών[18]

3.3 Τα μαθηματικά της φύσης και της ζωής

Όπως είπαμε και προηγούμενα τα *Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής* αναπτύχθηκαν στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Φλώρινας και περιλαμβάνουν ένα πακέτο προτάσεων για την αλλαγή των Μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου τόσο σε επίπεδο μεθοδολογίας όσο και περιεχομένων διδασκαλίας. Όπως φανερώνει και το όνομά τους τα *Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής προσπαθούν να συνδέσουν τα μαθηματικά με την καθημερινή ζωή των μαθητών βοηθώντας τους να συνδέσουν*

[18] Razel, M., & Eylon, B. (1991). *Developing Mathematics Readiness in Young Children with the Agam Program*. Paper presented at the Fifteenth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Genoa, Italy.

Ξεκινώντας από τη διαπίστωση πως η Γεωμετρία στα παλαιά αναλυτικά προγράμματα και σχολικά εγχειρίδια κατέχει μια πολύ περιορισμένη θέση, θεωρείται ότι υπάρχουν πολλά περιθώρια βελτίωσης του περιεχομένου, αλλά και της διδακτικής της Γεωμετρίας. Τα περιεχόμενα της Γεωμετρίας περιορίζονταν σε παραδοσιακές έννοιες όπως είναι για παράδειγμα τα στερεά και επίπεδα σχήματα, οι ευθείες, ημιευθείες, κ.ά και επιπλέον παρουσιάζονταν με φορμαλιστικό τρόπο. Η ανάπτυξη των εννοιών αυτών δεν γινόταν αρκετά διαισθητικά, δηλαδή, οι μαθητές δεν χαράσσουν, δεν μετρούν και γενικά δεν μεταχειρίζονται εμπειρικά τα σχήματα όσο θα έπρεπε.

Σύμφωνα με τα *μαθηματικά της φύσης και τις ζωής* η γεωμετρία πρέπει να διδάσκεται με τρόπο εμπειρικό και διαισθητικό[19]. Οι δραστηριότητες δηλαδή που προτείνονται στους μαθητές θα πρέπει να τους οδηγούν στο να αναγνωρίζουν, να ονομάζουν, να χαράζουν, να φαντάζονται, να αναπλάθουν στο μυαλό τους και γενικά να μεταχειρίζονται τα σχήματα εμπειρικά, με τη διαίσθηση, αλλά και νοητικά. Με την παρουσίαση της ποικιλίας ενός σχήματος ως προς τη μορφή, το μέγεθος και τον προσανατολισμό αποφεύγεται το να συνδέσουν και να μάθουν οι μαθητές ένα σχήμα με μία μόνο μορφή και θέση, την τυπική,[20] πράγμα που θα έχει μαθησιακές παρενέργειες στη μετέπειτα διαχείριση και αναγνώριση των σχημάτων.

Στο πρόγραμμα που προτείνεται τα περιεχόμενα της γεωμετρίας κινούνται στο πλαίσιο των διαθεματικών αναλυτικών προγραμμάτων που είδαμε προηγουμένως, αλλά εμπλουτίζονται και με ακόμα περισσότερα.

---

[19] Lemonidis, C. (1997). A few remarks regarding the teaching of geometry, through a theoretical analysis of the geometrical figure. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications,* vol. 30, no 4, pp. 2087-2095 (Proc. 2nd World Congress of Nonlinear Analysis).

[20] Χ. Λεμονίδης, (1993). "Επίδραση των τυπικών αναπαραστάσεων στη συμπεριφορά του μαθητή. Παραδείγματα από τη Γεωμετρία". Εισήγηση στο 4ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ψυχολογικής Έρευνας. ΕΛΨΕ Θεσ/νίκη, 27-30 Μαΐου 1993. Περίληψη στα πρακτικά σελ. 198.

Δίνεται έμφαση στις χαράξεις με το χέρι και με όργανα, στις οποίες αφιερώνονται και ειδικά μαθήματα. Οι δραστηριότητες αυτές στοχεύουν στην εξάσκηση των μαθητών και την ευλυγισία του χεριού στις καμπύλες γραμμές καθώς επίσης και στη χρήση του χάρακα για να ενώνουν δύο συγκεκριμένα σημεία, να ενώνουν σημεία για να σχηματίσουν ένα δεδομένο σχήμα ή ένα σχήμα που είναι κριμένο και δεν φαίνεται[21].

Επιπλέον εισάγονται τα μοντέλα μέσα από τα οποία τα παιδιά παρατηρούν την εξέλιξη και την διαδοχή καταστάσεων. Στις δραστηριότητες που προτείνονται οι μαθητές καλούνται να αναπαράγουν ένα δεδομένο μοντέλο, αφού το παρατηρήσουν. Οι δραστηριότητες αυτού του είδους αποσκοπούν κυρίως στην άσκηση της παρατηρητικότητας, της ακρίβειας και της προσεκτικής εκτέλεσης συγκεκριμένων και διαδοχικών βημάτων (αλγόριθμων)[22].

Ακόμα σημαντική κρίνεται η διδασκαλία της κίνησης σε τετραγωνισμένο χαρτί. Το τετραγωνισμένο χαρτί πρεσβεύει το καρτεσιανό επίπεδο στο οποίο κινούμαστε βάση δύο συντεταγμένων (χ, ψ), της τετμημένης στον άξονα του χ και της τεταγμένης στον άξονα του ψ. Σήμερα ο προσανατολισμός με βάση τις δύο διαστάσεις εφαρμόζεται σε πολλές καταστάσεις της καθημερινής ζωής όπως: σταυρόλεξα, χάρτες, πίνακες, η οθόνη του υπολογιστή, κτλ. Στην Ελλάδα οι έννοιες αυτές δεν διδάσκονται στο επίπεδο του δημοτικού σχολείου, αλλά μόνο στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ξεκομμένες από την πραγματικότητα και τις εφαρμογές τους στη ζωή με φορμαλιστικό και μαθηματικό τρόπο.

Οι δραστηριότητες σε τετραγωνισμένο χαρτί στοχεύουν να κάνουν ικανούς τους μαθητές:

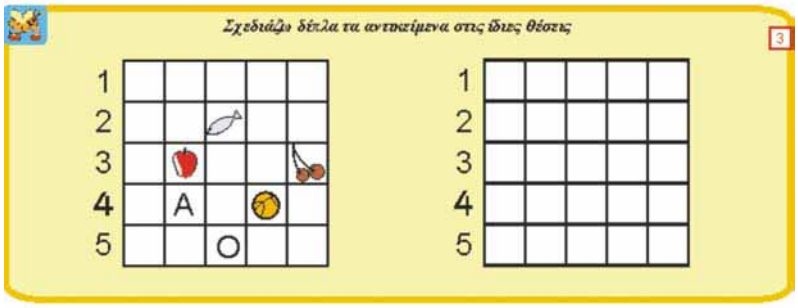
---

[21] Λεμονίδης, Χ. (2003). Μια νέα πρόταση διδασκαλίας των Μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου, Αθήνα: Πατάκης

[22] Λεμονίδης, Χ. (2003). Ό.π. σ.

- Να προσανατολίζονται και να κινούνται σε τετραγωνισμένο χαρτί. Δηλαδή να εντοπίζουν και να βρίσκουν τις θέσεις των τετραγώνων και των κόμβων του τετραγωνισμένου χαρτιού με βάση την οριζόντια και την κάθετη διάσταση.

- Να αναπαράγουν πάνω σε τετραγωνισμένο χαρτί το υπόδειγμα ενός σχήματος, που τους δίνεται σχεδιασμένο. Αυτή η διαδικασία της σχεδίασης πάνω στα τετραγωνάκια του χαρτιού προετοιμάζει και εξοικειώνει τους μαθητές με τη δισδιάστατη κατάσταση του καρτεσιανού επιπέδου. Οι μαθητές πρέπει να παίρνουν υπόψη τους και τις δύο διαστάσεις, την οριζόντια και την κάθετη, όταν προσανατολίζονται και προσδιορίζουν συγκεκριμένα σημεία πάνω στο τετραγωνισμένο χαρτί.[23]



Οι οπτικές διεργασίες της ανάλυσης και της σύνθεσης των γεωμετρικών σχημάτων, θεωρούνται πολύ σημαντικές για το μάθημα της Γεωμετρίας. Εφαρμόζονται σε δραστηριότητες των παζλ[24], των πλακόστρωτων[25] και των μωσαϊκών[26]. Τα παιχνίδια του παζλ και του τάγκραμ υπάρχουν και στην καθημερινή ζωή του παιδιού είναι ευχάριστα και πολύ ουσιαστικά για την ανάπτυξη γεωμετρικών

[23] Λεμονίδης, Χ. (2003). Ό.π. σ.

[24] *Παζλ:* Το τελικό σχήμα προϋπάρχει και πρέπει να ξαναδημιουργηθεί. Η κύρια δραστηριότητα συνίσταται στην σύνθεση (συνάθροιση) αρχικών σχημάτων που δίνονται διασκορπισμένα.

[25] Πλακόστρωτο: Το τελικό σχήμα δεν υπάρχει. Πρόκειται να καλυφτεί εντελώς ένας δεδομένος χώρος με κανονικά σχήματα (στοιχεία) τα οποία διαλέγουμε ή δημιουργούμε.

[26] Μωσαϊκό: Ένα διακοσμητικό σύνολο σχημάτων που αποτελείται από στοιχεία τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο. Η ουσιαστική δραστηριότητα που απαιτεί συνίσταται στην αναγνώριση της φόρμας και τον εντοπισμό των αρχικών σχημάτων (στοιχείων) που το αποτελούν.

οπτικών ικανοτήτων. Τα πλακόστρωτα και τα μωσαϊκά μας συνδέουν με την τέχνη και την παράδοση, μπορούν να διδαχτούν διαθεματικά με το μάθημα των καλλιτεχνικών και της ιστορίας[27].

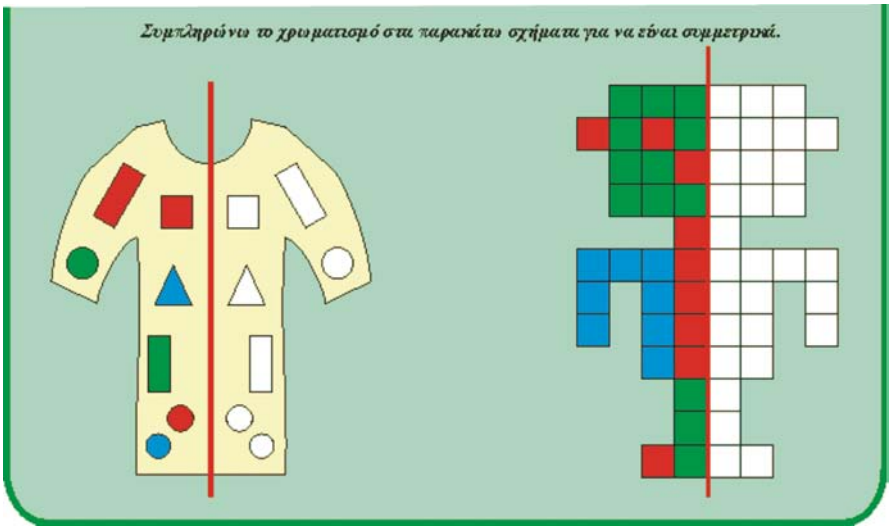
Δίνεται επίσης μεγάλη σημασία στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς των σχημάτων. Τις εφαρμογές των γεωμετρικών μετασχηματισμών όπως είναι οι μεγεθύνσεις, σμικρύνσεις, οι συμμετρίες, οι στροφές, κ.ά, τις συναντούμε πολύ συχνά στην καθημερινή ζωή και ειδικά στην τέχνη. Εκτός από τις εφαρμογές τους όμως οι μετασχηματισμοί κατέχουν μια πολύ σημαντική θέση και στο ίδιο το επιστημονικό αντικείμενο της Γεωμετρίας. Στην Ελληνική εκπαίδευση οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί σύμφωνα με το παλιότερο αναλυτικό πρόγραμμα δεν προβλέπονται στο Δημοτικό Σχολείο και εισάγονται για πρώτη φορά στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.

Στην Α' τάξη πραγματοποιείται μία πρώτη εμπειρική επαφή των μαθητών με αντικείμενα, εικόνες και σχήματα που είναι συμμετρικά ως προς άξονα. Με την επαφή αυτή και με την παρέμβαση της διδασκαλίας οι μαθητές οδηγούνται να εντοπίζουν τη συμμετρία, να παρατηρούν τον άξονα συμμετρίας και να μπορούν να προσθέτουν με απλό τρόπο (διαφανές χαρτί, καρμπόν κτλ.) το συμπληρωματικό μέρος του σχήματος, ώστε να γίνει συμμετρικό. Στην αρχή ο έλεγχος της συμμετρίας γίνεται με το δίπλωμα του χαρτιού. Στη συνέχεια όμως πρέπει οι μαθητές απλώς να το φαντάζονται, για να ελέγχουν αν ένα σχήμα είναι συμμετρικό ή όχι. Στην Β' και Γ τάξη μελετούμε την αξονική συμμετρία πιο ειδικά τόσο στο επίπεδο των ιδιοτήτων που παρατηρούμε ή χρησιμοποιούμε όσο και στο επίπεδο της ορολογίας. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι εξαντλούμε διεξοδικά το θέμα. Χρησιμοποιούμε και εξηγούμε στους μαθητές τους ειδικούς όρους: συμμετρία, άξονας συμμετρίας, συμμετρικά σχήματα ως προς ένα άξονα και σχήματα που έχουν άξονα συμμετρίας[28].

---

[27] Λεμονίδης, Χ. (2003). Ό.π. σ.

[28] Λεμονίδης, Χ. (2003). Ό.π. σ.



Από τη Β' τάξη διδάσκονται οι τεμνόμενες, παράλληλες και κάθετες ευθείες, αλλά και οι γωνίες. Οι μαθητές ήδη από την Α' τάξη ασκούνται στη χάραξη ευθειών με το χάρακα. Για τους μαθητές, η ευθεία αντιστοιχεί στην εικόνα ενός σχοινιού τεντωμένου και χαράσσεται με το χάρακα. Αρχικά λοιπόν είναι η μορφή μιας γραμμής που αναγνωρίζεται ως ευθεία. Οι μαθητές μαθαίνουν ότι το χαραγμένο μέρος που βλέπουν παρουσιάζει ένα μόνο μέρος της ευθείας και ότι μπορούμε να την προεκτείνουμε απεριόριστα. Ασκήθηκαν στο να φαντάζονται και νοερά την προέκταση μιας ευθείας, ή δύο ευθειών και να προβλέπουν αν θα συναντηθούν και σε πιο σημείο περίπου θα συναντηθούν.

Η έννοια της γωνίας αρχικά παρουσιάζεται μέσα από καταστάσεις από την καθημερινή ζωή και με δυναμικές καταστάσεις μέσα από την κυκλική κίνηση. Για παράδειγμα οι γωνίες που σχηματίζονται από την κίνηση: των δύο βραχιόνων ενός διαβήτη, των δεικτών του ωρολογίου, το κλείσιμο της πόρτας, κτλ. Γίνεται ξεχωριστή αναφορά στις ορθές γωνίες. Οι μαθητές ασκούνται στο να παρατηρούν και να διαχωρίζουν ανάμεσα σε άλλες τις ορθές γωνίες και στο να χρησιμοποιούν τον γνώμονα για να ελέγχουν αν μία γωνία είναι ορθή. Προτείνονται τέλος δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές παρατηρούν και διαχωρίζουν τις γωνίες σε ευθύγραμμα γεωμετρικά σχήματα.

4. Εθνομαθηματικά

Ορισμός και αφετηρίες

Τα Εθνομαθηματικά, ως μια ιδιαίτερη περιοχή των μαθηματικών έκαναν την εμφάνισή τους στην δεκαετία του 80 ως αντίδραση στην μέχρι τότε αντίληψη που θεωρούσε τα μαθηματικά ως ένα επίτευγμα του δυτικο-ευρωπαϊκού πολιτισμού, μελετώντας και προβάλλοντας κάποιες πρακτικές που αναπτύσσονταν σε άλλες πολιτισμικές κοινότητες ανθρώπων και αναφέρονται σε μαθηματικές ιδέες, ανεξάρτητα να οι ίδιοι τις αντιλαμβάνονται ως τέτοιες. Η τάση αυτή για τη δημιουργία εθνο επιστήμης δεν υπήρχε μόνο στα μαθηματικά, αλλά και σε πολλές άλλες επιστήμες που σχετίζονται με το οικονομικό, κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο. Έτσι εμφανίστηκαν η εθνο-χημεία, ή εθνο-βοτανική κλπ. Ωστόσο τα μαθηματικά είναι ίσως η μόνη από αυτές τις επιστήμες που υστέρησε σημαντικά στην ανάπτυξη αυτής της προοπτικής, φαινόμενο που αποδίδεται στη γενικότερη ευρωπαϊκή προκατάληψη που θεωρεί τα μαθηματικά ως επιστήμη καθολική και διαχρονική, ανεπηρέαστη από πολιτισμικές επιρροές, με την οποία ασχολούνται μόνο τα μέλη μιας ελίτ και όχι ο κάθε άνθρωπος.

Πρωτοπόροι των Εθνομαθηματικών θεωρούνται ο D'Ambrosio[1] στην Βραζιλία ο Gerdes[2] στην Μοζαμβίκη και άλλοι σε διάφορα μέρη του κόσμου που άρχισαν να ισχυρίζονται στα έργα τους πως τα μαθηματικά είναι ένα προϊόν του ανθρώπινου πολιτισμού που μπορεί να διαφέρει ανάμεσα στις διαφορετικές πολιτισμικές κοινότητες των ανθρώπων.

---

[1] D'Ambrosio, U, (2001) "What is ethnomathematics, and how can it help children in schools?" στο *Teaching Children Mathematics* 7, no6 F 2001

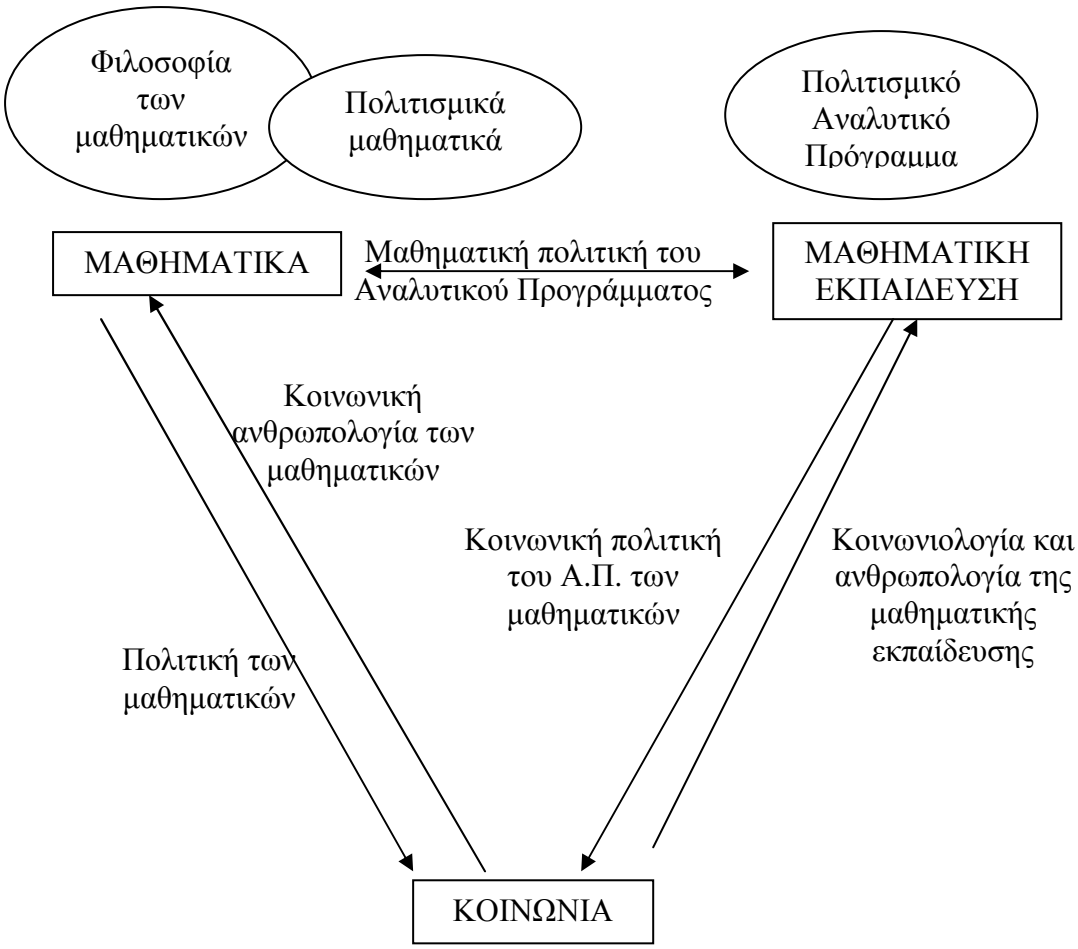
[2] Gerdes, P. (1988) "On Culture, Geometrical Thinking, and Mathematics Education." Στο *Educational Studies in Mathematics* 19

Σημαντικό ρόλο για την ανάπτυξή των Εθνομαθηματικών έπαιξαν επίσης διαπιστώσεις ερευνών ότι οι μαθητές διαφορετικής εθνικής καταγωγής, κυρίως στις αποικίες των δυτικών κρατών, παρουσίαζαν σημαντική διαφορά στις επιδόσεις, πράγμα που αποδόθηκε στο «ξενόφερτο» αναλυτικό πρόγραμμα που τους επιβλήθηκε και ήταν εντελώς διαφορετικό από τις δικές τους πολιτισμικές πρακτικές και αντιλήψεις. Έτσι τα εθνομαθηματικά απέκτησαν από την αρχή έναν χαρακτήρα ριζοσπαστικού κινήματος με σαφείς πολιτικές διαστάσεις

Σαφής ορισμός για τα Εθνομαθηματικά δεν υπάρχει στη βιβλιογραφία. Ο κάθε ερευνητής ανάλογα με τη θεωρητική του σκοπιά και τις ιδιαίτερες συνθήκες ορίζει διαφορετικά την έννοια. Κοινή παραδοχή αποτελεί η σύνδεση των μαθηματικών με την κουλτούρα αλλά το τι ακριβώς εννοεί ο καθένας με τον όρο κουλτούρα μπορεί να διαφέρει αρκετά. Οι διαφοροποιήσεις μάλιστα δεν συναντώνται μόνο ανάμεσα στους διάφορους ερευνητές αλλά και στον ίδιο ερευνητή σε διαφορετικής χρονικής περιόδου έργα του.[3] Μια προσπάθεια αποσαφήνισης των διαστάσεων των εθνομαθηματικών γίνεται από τον Barton[4], οποίος προτείνει ένα τρίγωνο στις κορυφές του οποίου βρίσκονται τα μαθηματικά, ο πολιτισμός και η εκπαίδευση. Μέσα σε αυτές τις περιοχές ταξινομεί την πλειοψηφία των έργων των ερευνητών που ασχολήθηκαν με τα Εθνομαθηματικά.

[3] για μια ανασκόπηση των ορισμών που κατά καιρούς έχουν δοθεί: Σταθοπούλου, Χ. (2006) Εθνομαθηματικά, Αθήνα: Ατραπός, σ.33-103

[4] Barton, B. (1996) Making sense of Ethnomathematics: Ethnomathematics is making sense. Educational studies in mathematics 31 201-233



Μια βασική διάκριση

Οι ερευνητές των Εθνομαθηματικών συνήθως εξετάζουν πώς οι άνθρωποι μαθαίνουν και χρησιμοποιούν τα μαθηματικά σε δύο περιοχές: (α) σε ξεχωριστούς πολιτισμούς και (β) καθημερινές καταστάσεις μέσα στους πολιτισμούς. Στη δεύτερη περιοχή, η έρευνα έχει εστιάσει σε ένα πλαίσιο κατάστασης ή εργασίας μέσα σε έναν πολιτισμό, ενώ στην πρώτη περιοχή οι ερευνητές εξετάζουν τις μαθηματικές πρακτικές ενός ολόκληρου πολιτισμού. Μερικά παραδείγματα του πρώτου τύπου έρευνας περιγράφονται παρακάτω.

Ο Saxe[5] μελέτησε τη φυλή Oksapmin στην Παπούα- Νέα Γουϊνέα και βρήκε πολλές διαφορές μεταξύ των γηγενών μαθηματικών πρακτικών και των δικών του. Παρατήρησε αυτές τις διαφορές σε δραστηριότητες όπως η οικοδόμηση των σπιτιών, η παραγωγή κεφαλών για βέλη, η ύφανση τσαντών και διάφοροι υπολογισμοί. Ο Gerdes [6] εξέτασε τις μαθηματικές ιδέες που αναπτύχθηκαν στον παραδοσιακό πολιτισμό της Μοζαμβίκης. Άρχισε με την εξέταση των γεωμετρικών μορφών και των σχεδίων που βρίσκονταν σε αντικείμενα και πράγματα της καθημερινής ζωής, όπως καλάθια, χαλιά, δοχεία, σπίτια, και των παραδοσιακών παγίδων για το ψάρεμα.

Η δεύτερη κατεύθυνση της έρευνας δεν ενδιαφέρεται για έναν ολόκληρο πολιτισμό, αλλά για το πως οι άνθρωποι διαφορετικών ομάδων μαθαίνουν και χρησιμοποιούν τα μαθηματικά σε καθημερινές καταστάσεις μέσα στους πολιτισμούς. Παραδείγματος χάριν, ο Lave συνεργάστηκε με τους Murtaugh και De la Rocha[7] για να ερευνήσει τις αριθμητικές πρακτικές των πελατών και των ιδιοκτητών παντοπωλείων στην Καλιφόρνια των Η.Π.Α. Και οι δύο έρευνες εστίασαν στη σχέση μεταξύ του σχηματισμού και της επίλυσης προβλήματος. Η Masingila[8] εξέτασε τις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες

---

[5] Saxe, G. (1982) Culture and the development of numerical cognitionQ studies among the Oksapmin of Papua New Guinea in C.G. Brainerd (ed.) Children's Logical and Mathematical Cognition, Springer-Verlag.

[6] Gerdes, Paulus.(1985) "Conditions and Strategies for Emancipatory Mathematics Education in Underdeveloped Countries." For the Learning of Mathematics 5: 15-20.

[7] Lave, Jean, Michael Murtaugh, and Olivia de la Rocha.(1984) "The Dialectic of Arithmetic in Grocery Shopping." In Everyday Cognition: Its Development in Social Context, edited by Barbara Rogoff and Jean Lave, pp. 67-94. Cambridge, Mass.: Harvard University Press,

[8] Masingila, Joanna O. (1995) "Carpet Laying: An Illustration of Everyday Mathematics." In Connecting Mathematics across the Curriculum, 1995 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by Peggy A. House, pp. 163-69. Reston, Va.:

που χρησιμοποιούσαν ανθρώπους που τοποθετούσαν μοκέτες για τον υπολογισμό των διαστάσεων και την εγκατάσταση.

4.3. Προβλήματα και περιορισμοί

Ένα βασικό πρόβλημα που προκύπτει σε κάποιον που μελετά τα μαθηματικά μιας συγκεκριμένης κουλτούρας είναι οι περιορισμοί που τίθενται από τη δική του κουλτούρα. Έτσι το τι ο ίδιος ο ερευνητής θεωρεί ως μαθηματική δραστηριότητα είναι καθοριστικής σημασίας για την κωδικοποίηση της συμπεριφοράς της ομάδας που μελετά, η οποία μπορεί να μην αντιλαμβάνεται κάποια συγκεκριμένη δραστηριότητα ως μαθηματική. Η δυσκολία, όπως έχει σημειώσει η Millroy, είναι ότι είναι "αδύνατο να αναγνωριστεί και να περιγραφεί οτιδήποτε χωρίς τη χρήση των πλαισίων μέσα στα οποία σκέφτεται καποιος"[9]. Κατά συνέπεια, ένας ερευνητής που εξετάζει τα Εθνομαθηματικά ενός ορισμένου πολιτισμού ερμηνεύει όλα όσα βλέπει σύμφωνα με τις δικές του ιδέες για το τι είναι τα μαθηματικά.

Ένα δεύτερο ζήτημα είναι ότι η ίδια η χρήση του όρου Εθνομαθηματικά μόνο για ότι είναι διαφορετικό από τα επίσημα ή ακαδημαϊκά μαθηματικά στερεί από τα τελευταία το αυτονόητο. Ότι δηλαδή και αυτά είναι προϊόν μιας συγκεκριμένης πολιτισμικής κοινότητας και ότι και αυτά έχουν μια διάσταση σχετική με την κουλτούρα. Όπως διευκρινίζει ο Gerdes: *τα Εθνομαθηματικά είναι τα μαθηματικά μιας συγκεκριμένης κουλτούρας. Με*

National Council of Teachers of Mathematics

[9] Millroy, W. L. (1992). An Ethnographic Study of the Mathematical Ideas of a Group of Carpenters. Journal for Research in Mathematics Education Monograph No. 5. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, p. 11

αυτήν την έννοια τα λεγόμενα ακαδημαϊκά μαθηματικά είναι επίσης Εθνομαθηματικά για κάποιους ανθρώπους.[10]

Ο συλλογισμός αυτός τοποθετεί τα πράγματα σε νέα βάση. Αυτό που για κάποιους είναι ακαδημαϊκά μαθηματικά για κάποιους άλλους μπορεί να είναι Εθνομαθηματικά.(π.χ. το πυθαγόρειο θεώρημα ή η ευκλείδεια γεωμετρία για τους Λατινοαμερικάνους και για τους Έλληνες αντίστοιχα) Σε συνέχεια αυτού θα μπορούσαμε να πούμε ότι η προσέγγιση ενός αντικειμένου μπορεί να είναι η ειδοποιός διαφορά και όχι ο τόπος προέλευσης του. Το πυθαγόρειο θεώρημα δηλαδή μπορεί να μην αποτελεί εθνομαθηματικό παράδειγμα ακόμα και για τους ίδιους τους Έλληνες, αν στη διδασκαλία του προσεγγίζεται με ένα στείρο φορμαλιστικό τρόπο και δεν δίνεται σημασία στο πολιτισμικό περιβάλλον που το δημιούργησε.

Ένα τρίτο πρόβλημα είναι η χρήση του προθέματος εθνο- που πολλές φορές είναι αρκετά πολιτικά φορτισμένος, παραπέμποντας στην έννοια του εθνικισμού[11]. Στο σύνολο σχεδόν της βιβλιογραφίας από τον D'Ambrosio, που εισήγαγε τον όρο, ως και πολύ πρόσφατους ερευνητές διευκρινίζεται ότι ο όρος έθνο- δεν εννοεί τις ξεχωριστές φυλές με αυστηρά εθνικιστικά κριτήρια, αλλά τη συνεισφορά της ιδιαίτερης κουλτούρας στη δημιουργία μαθηματικών. Έχει δηλαδή να κάνει κυρίως με την ερευνητική παράδοση της εθνογραφίας και της ανθρωπολογίας. Παρόλα αυτά πολλοί ερευνητές αποφεύγουν να τον χρησιμοποιούν και προτιμούν όρους όπως εξωσχολικά μαθηματικά, πολυπολιτισμικά μαθηματικά, μαθηματικά με νόημα ή μαθηματικά σε πλαίσιο[12].

---

[10] Σταθοπούλου, Χ. (2006) *Εθνομαθηματικά*, Αθήνα: Ατραπός, σ.71

[11] Για μια σύγχρονη θεώρηση της έννοιας του εθνικισμού βλ: Λιάκος, Α., (2005) Πως είδαν το έθνος αυτοί που θέλησαν να αλλάξουν τον κόσμο. Αθήνα: Πόλις

[12] Σταθοπούλου, Χ. (2006) όπ., σ.73-76

Εθνομαθηματικά και εκπαίδευση

«Τα Εθνομαθηματικά αναφέρονται σε ένα σύνολο από ιδέες που περιλαμβάνει την ιστορία των μαθηματικών, τις πολιτισμικές τους ρίζες, τα υπονοούμενα μαθηματικά της καθημερινότητας και τη μαθηματική εκπαίδευση. Τα Εθνομαθηματικά ως μια εκπαιδευτική ιδέα προτείνουν ότι το πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης μπορεί να αντλεί τις πηγές του από τα υπονοούμενα μαθηματικά ενός πολιτισμού, με τα οποία το παιδί έχει οικειότητα. Όμως η αναφορά στα Εθνομαθηματικά δε γίνεται από τη σκοπιά της μαθηματικής εκπαίδευσης, αλλά επίσης για τα υπονοούμενα μαθηματικά μιας ιδιαίτερης ομάδας του πληθυσμού»

Από την αρχή της ανάπτυξης τους τα Εθνομαθηματικά συνδέθηκαν με την εκπαίδευση. Θεωρούνται ως εργαλείο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην τάξη, στο μάθημα των μαθηματικών για να βοηθήσει τους μαθητές να κάνουν τις συνδέσεις και να αναπτύξουν τη βαθύτερη μαθηματική κατανόηση.

Στην βιβλιογραφία θεωρείται ότι υπάρχουν δύο τρόποι με τους οποίους τα Εθνομαθηματικά μπορεί να είναι ένα εργαλείο στην τάξη: (1) ως μαθηματική πρακτική των άλλων, και (2) ως δική μας μαθηματική πρακτική. Διάφορες δημοσιεύσεις έχουν γίνει στον χώρο των πολυπολιτισμικών μαθηματικών. Μέσω αυτών των δημοσιεύσεων για πολυπολιτισμικές δραστηριότητες στη διδασκαλία των μαθηματικών, επιδιώκεται οι δάσκαλοι " να προωθήσουν τη διεθνή κατανόηση με την έκθεση των μαθητών στις μαθηματικές πρακτικές άλλων λαών[13]" και πιστεύεται ότι οι δραστηριότητες αυτές μπορούν "να φέρουν στο... πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών τη ζωτικότητα της πολιτισμικής ποικιλομορφίας[14]"

Αυτές οι δραστηριότητες είναι παραδείγματα των Εθνομαθηματικών ως

[13] Zaslavsky, Cl. , (1993) Multicultural Mathhematics: Interdisciplinary Cooperative-Learning Activities. Portland, Maine: J. Weston Walch Publisher. , σελ. vii

[14] Krause, Marina C. (1983) Multicultural Mathematics Materials. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics,. σελ. iv

πρακτική ξεχωριστών πολιτισμών, σύμφωνα και με τη διάκριση που είδαμε προηγούμενα. Οι δραστηριότητες καλύπτουν μια σειρά περιεχομένων όπως: διαφορετικά συστήματα αρίθμησης και οι ιδιότητές τους, ιδέες Γεωμετρίας και μέτρησης στην τέχνη, τα σύμβολα, τα καλάθια, και τις μορφές των σπιτιών και λογική και πιθανότητες στα παιχνίδια.

Μπορούμε όμως να βρούμε και παραδείγματα Εθνομαθηματικών στη βιβλιογραφία που είναι σχετικά με τους τύπους προβλημάτων που οι άνθρωποι αντιμετωπίζουν σε καθημερινές καταστάσεις μέσα στους πολιτισμούς.[15]Άλλα παραδείγματα μπορούν να βρεθούν σε βιβλία με δραστηριότητες για την τάξη ή σε εγχειρίδια. Παραδείγματος χάριν, ένα μάθημα σχετικό με την περίμετρο, το εμβαδό, και τον όγκο σε ένα σχολικό εγχειρίδιο μπορεί να προτείνει στους μαθητές να ερευνήσουν την διαδικασία τοποθέτησης μοκέτας σε ένα δωμάτιο και την εγκατάσταση περβαζιών[16], όπως θα έκαναν οι αντίστοιχοι τεχνίτες.

Άλλες ιδέες μπορούν να προέλθουν από τον εξωσχολικό χώρο. Προτείνεται για παράδειγμα ένας εκπαιδευτικός να παροτρύνει τους μαθητές να γράψουν σε διάφορους ανθρώπους σε μια κοινότητα και να τους ζητήσουν να περιγράψουν τα μαθηματικά που χρησιμοποιούν στη δουλειά που κάνουν και σχετίζονται με ζητήματα που αντιμετωπίζουν καθημερινά[17].(παραγγελίες, μετρήσεις, υπολογισμοί κ.α.) Με προβλήματα όπως αυτά δίνεται η δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να βρει διάφορα πραγματικά πλαίσια για να εισάγει τις

---

[15] Masingila, Joanna O. (1995) "Carpet Laying: An Illustration of Everyday Mathematics." In Connecting Mathematics across the Curriculum, 1995 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by Peggy A. House, pp. 163-69. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics,

[16] Chapin, Suzanne H., Mark Illingworth, Marsha S. Landau, Joanna O. Masingila, and Leah McCracken. (1995) Middle Grades Mathematics: An Interactive Approach, Course 2. Needham, Mass.: Prentice Hall

[17] Masingila, Joanna O, (1997) Using Ethnomathematics as a Classroom Tool,Yearbook (National Council of Teachers of Mathematics) 115-20 '97

διαφορετικές μαθηματικές έννοιες. Δεδομένου ότι οι μαθητές λύνουν τα προβλήματα σε ένα πλαίσιο, τα μαθηματικά γίνονται πιο ζωντανά και οι μαθητές είναι πιθανότερο να καταλάβουν τις μαθηματικές έννοιες και τις σχετικές διαδικασίες.

Αν και η πρακτική των άλλων μπορεί, όπως είδαμε, να είναι ένα πολύτιμο εργαλείο που χρησιμοποιείται στην τάξη, υπάρχει και μια άλλη πηγή εύκολα διαθέσιμη , που αγνοείται συχνά, τα Εθνομαθηματικά των ίδιων των μαθητών και του δασκάλου. Για να μπορέσουν οι δάσκαλοι να χρησιμοποιήσουν αυτήν την πηγή εντούτοις, πρέπει μαζί με τους μαθητές τους να αντιληφθούν ότι χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στις καθημερινές καταστάσεις και για να γνωρίσουν πώς τα χρησιμοποιούν.

Μια μέθοδος προτείνεται στη βιβλιογραφία[18] για να προωθηθεί αυτή η κατανόηση είναι οι μαθητές να ενημερώνουν ένα αρχείο για το πως νομίζουν ότι χρησιμοποίησαν τα μαθηματικά οι ίδιοι στη ζωή τους για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, όπως μια ημέρα ή μια εβδομάδα. Με τον τρόπο αυτόν μπορεί ο δάσκαλος να αποκτήσει την επίγνωση πώς οι μαθητές του αντιλαμβάνονται ότι χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στις καθημερινές καταστάσεις και έπειτα να χρησιμοποιήσει ότι έχει μάθει ως πλαίσιο για δημιουργία και επίλυση προβλήματος. Φυσικά υπάρχουν αρκετές διαφορές ανάμεσα στα μαθηματικά του σχολείου και τα μαθηματικά της καθημερινότητας. Οι διαφορές αυτές στη βιβλιογραφία εξηγούνται από τα εξής:

1. τα προβλήματα στις καθημερινές καταστάσεις ενσωματώνονται στα πραγματικά πλαίσια που είναι σημαντικά για αυτούς που λύνουν ένα

[18] Masingila, Joanna O. (1994)"Middle School Students' Perceptions of Their Everyday Mathematics Practice." In Proceedings of the 16th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, edited by David Kirshner, vol. 2, pp. 77-83. Baton Rouge, La.: Louisiana State University

πρόβλημα, και αυτό ενθαρρύνει και στηρίζει τη δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος[19] και

2. "τα μαθηματικά που χρησιμοποιούνται έξω από το σχολείο είναι ένα εργαλείο στην υπηρεσία κάποιου ευρύτερου στόχου, και όχι τα ίδια και η μάθησή τους ένας αυτοτελής στόχος, όπως είναι στο σχολείο[20]".

4.5. Οφέλη από την εισαγωγή των Εθνομαθηματικών στην τάξη.

«*Τα Εθνομαθηματικά μπορεί να είναι ένα πολύτιμο εργαλείο στην τάξη στο μάθημα των μαθηματικών. Με την ενθάρρυνση των μαθητών για να κάνουν τα μαθηματικά που χρησιμοποιούν οι άλλοι και οι ίδιοι, οι δάσκαλοι μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να κάνουν συνδέσεις, να αναπτύξουν βαθύτερους μαθηματικούς όρους, και να επεκτείνουν τις πεποιθήσεις τους για το τι είναι τα μαθηματικά.*»[21]

Η ενσωμάτωση πολυπολιτισμικών δραστηριοτήτων στην διδασκαλία των μαθηματικών θεωρείται από πολλούς πως βοηθά και ενθαρρύνει τις αντιλήψεις που θέλουν τα μαθηματικά ως σημαντικό στοιχείο του πολιτισμού. Ειδικότερα, οι πολυπολιτισμικές δραστηριότητες μπορούν να συμβάλουν στην αφαίρεση του στίγματος των μαθηματικών ως μια ελιτιστική επιστήμη που αφορά λίγους και εκλεκτούς.

---

[19] Lester, Frank K. Jr.,(1989) "Mathematical Problem Solving in and out of School." Arithmetic Teacher 37 (November 1989): 33-35.

[20] Nunes, Terezinha.(1993) "The Socio-Cultural Context of Mathematical Thinking: Research Findings and Educational Implications." In Significant Influences on Children's Learning of Mathematics, edited by Alan J. Bishop, Kathleen Hart, Stephen Lerman, and Terezinha Nunes, pp. 27-42. Paris: UNESCO

[21] Davidson E; Kramer L, (1997) Integrating with Integrity: Curriculum, Instruction, and Culture in the Mathematics Classroom,Yearbook (National Council of Teachers of Mathematics) 1997 131-41 '97

Οι σύγχρονες εκπαιδευτικές θεωρίες και πρακτικές υπογραμμίζουν μια σφαιρική προοπτική που προωθεί το διασύνδεση των γνωστικών αντικειμένων στο σχολικό πρόγραμμα σπουδών[22]. Τα πρόσφατα κινήματα μεταρρύθμισης έχουν προωθήσει την πολυπολιτισμικότητα ως κεντρικό θέμα στα σχολικά προγράμματα σπουδών, και αυτές οι προσπάθειες έχουν οδηγήσει στην αναγνώριση των συνεισφορών πολλών διαφορετικών πολιτισμών στην τέχνη, τη μουσική, τη λογοτεχνία, τη θρησκεία, κ.λπ.

Οι μαθητές ίσως θεωρούν παραδοσιακά τα μαθηματικά ως στατικό θέμα που αναπτύχθηκε πλήρως αρκετά χρόνια πριν από «λευκούς άντρες Ευρωπαίους μαθηματικούς». Υπάρχει μια οξεία ανάγκη να αλλάξει αυτή η αντίληψη για τα μαθηματικά και το ρόλο που οι διάφοροι πολιτισμοί έχουν παίξει στην ανάπτυξή τους.

Οι πολυπολιτισμικές δραστηριότητες μπορούν επίσης να βοηθήσουν τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν για το πώς διαφορετικοί πολιτισμοί έδωσαν διαφορετικές λύσεις στα προβλήματα, χρησιμοποιώντας διαφορετικές τεχνικές. Παραδείγματος χάριν, οι μαθητές στα σύγχρονα δημοτικά σχολεία αποκτούν την ικανότητα στον πολλαπλασιασμό δύο αριθμών με την εφαρμογή ενός γνωστού αλγορίθμου χρησιμοποιούμενου παγκοσμίως. Μια πολυπολιτισμική προσέγγιση παρέχει στους μαθητές μια ευκαιρία να ερευνήσει τους εναλλακτικούς τρόπους με τους οποίους άλλοι πολιτισμοί έχουν εξετάσει το ίδιο πρόβλημα.

Παραδείγματος χάριν, κατά τη διάρκεια του 17ου και 18ου αιώνα οι λαοί της Ανατολικής Ευρώπης χρησιμοποίησαν μια μέθοδο πολλαπλασιασμού βασισμένη στην έννοια της διχοτόμησης ενός παράγοντα και του διπλασιασμού άλλου. Αν και αυτός ο αλγόριθμος είναι τώρα ιστορικού ενδιαφέροντος μόνο, βελτιώνει τις γνώσεις των μαθητών στον πολλαπλασιασμό και τους εξοικειώνει με την ιδέα ότι υπάρχουν σημαντικές διαφοροποιήσεις συνηθειών και πρακτικών μεταξύ των διαφορετικών πολιτισμών ακόμη και όσον

[22] Σε αυτήν τη κατεύθυνση κινείται, όπως είδαμε, το ελληνικό Δ.Ε.Π.Π.Σ.

αφορά μια δραστηριότητα τόσο τεχνική, όπως η εκτέλεση ενός αλγόριθμου. Ακόμα η μέθοδος του ελληνικού πολλαπλασιασμού μπορεί πέρα από την ιστορική του αξία να οδηγήσει σε μια καλύτερη κατανόηση του ευρέως χρησιμοποιούμενου κάθετου αλγορίθμου[23].

Η πολυπολιτισμικότητα στο μάθημα των μαθηματικών παρέχει τις ευκαιρίες και για το δάσκαλο και για τους μαθητές να εξετάσουν την εξέλιξη μιας μαθηματικής ιδέας ή μιας έννοιας από μια ευρύτερη και πλουσιότερη ιστορική προοπτική. Συχνά, όπως δείχνει το παρακάτω παράδειγμα, ερχόμαστε στην διαπίστωση ότι μια ιδιαίτερη μαθηματική ιδέα ή μια ανακάλυψη προέκυψε από διάφορους διαφορετικούς πολιτισμούς σε όλο τον κόσμο και στους διαφορετικούς χρόνους.

Ας δούμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα. Για πολλές δεκαετίες, θεωρήθηκε ότι η προέλευση ενός πολύ σημαντικού κλάδου των σύγχρονων μαθηματικών, γνωστού ως θεωρία γραφικών παραστάσεων, είχε τις ρίζες της στη δυτική Ευρώπη κατά τη διάρκεια του δέκατου όγδοου αιώνα, πρώτιστα βασισμένη στην εργασία του Leonhard Euler, διάσημου Ελβετού μαθηματικού. Στις αρχές όμως αυτού του αιώνα, οι ανθρωπολόγοι που εργάζονται κοντά στις αφρικανικές φυλές στο Ζαϊ'ρ ανακάλυψαν ότι τα παιδιά των ιθαγενών κατασκεύαζαν συχνά παρόμοιες γραφικές παραστάσεις και γνώριζαν τους όρους κάτω από τους οποίους μια γραφική παράσταση ήταν ανιχνεύσιμη καθώς και τρόπους να κατασκευαστεί η γραφική παράσταση αποτελεσματικά. Ανακαλύψεις όπως αυτή υποστηρίζουν την άποψη ότι οι πολυάριθμες μαθηματικές έννοιες που αποδίδονται μέχρι μια χρονική περίοδο σε έναν συγκεκριμένο μαθηματικό ή χώρα έχουν προέλευση που μπορεί να επισημανθεί σε διάφορους διαφορετικούς πολιτισμούς σε όλο τον κόσμο και

[23] Davidson E; Kramer L, (1997) Integrating with Integrity: Curriculum, Instruction, and Culture in the Mathematics Classroom,Yearbook (National Council of Teachers of Mathematics) 1997 131-41 '97

ίσως αιώνες νωρίτερα[24].

Κάποιες πολυπολιτισμικές έρευνες στα μαθηματικά[26] αποκαλύπτουν ότι πολλές πρακτικές είναι κοινές στις σύγχρονες τάξεις μαθηματικών και σε λαούς που επιχείρησαν να λύσουν διάφορους τύπους προβλημάτων πολλούς αιώνες πριν. Παραδείγματος χάριν, οι αρχαίες αιγυπτιακές πηγές αποκαλύπτουν ότι η επίλυση των εξισώσεων επιτεύχθηκε με μια μέθοδο δοκιμής και λάθους γνωστής ως «κανόνας της ψευδούς θέσης». Για να λύσουν μια εξίσωση όπως X + x/4 = 30, οι Αιγύπτιοι έκαναν μια υπόθεση όπως X = 4. Όταν αντικατέστησαν το X με 4 στην εξίσωση, η αριστερή πλευρά της εξίσωσης είχε αξία 5. Σκέφτηκαν επομένως ότι η σωστή λύση πρέπει να είναι 6 φορές μεγαλύτερη από την εικασία δεδομένου ότι το 30 είναι 6 φορές το 5. Επομένως, η σωστή λύση είναι 24.

Η παραγωγή των λογικών υποθέσεων είναι μια στρατηγική επίλυσης προβλήματος που ενθαρρύνεται συχνά όταν αντιμετωπίζουν οι μαθητές σύνθετα προβλήματα.

Πολλές κλασικές εργασίες στη λογοτεχνία όπως τα *ταξίδια του Γκιούλιβερ* και *η Αλίκη στη χώρα των θαυμάτων* και στις εικαστικές τέχνες περιέχουν έναν πλούτο μαθηματικών και λογικών ιδεών. Χρησιμεύουν να καταδείξουν στους μαθητές πώς τα μαθηματικά διαπερνούν όλες τις φάσεις του πολιτισμού μας, αρκετά πέρα από τις συμβολές τους στην επιστήμη και τις επιχειρήσεις.

Τα παραδείγματα που αναφέρονται παραπάνω παρουσιάζουν τα μαθηματικά ως μια συνολική ανθρώπινη δραστηριότητα και τους μαθηματικούς ως άτομα και από όλους τους πολιτισμούς, τα δύο γένη, και όλες τις κοινωνικοοικονομικές ομάδες. Τα μαθηματικά δεν είναι μια δραστηριότητα που γίνεται μόνο από τους επαγγελματίες μαθηματικούς. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές τους να οικοδομήσουν

---

[24] Davidson E; Kramer L, (1997) ,ό.π. σ. 134

[25] Davidson E; Kramer L, (1997) ,ό.π. σ. 136

[26] Davidson E; Kramer L, (1997) ,ό.π. σ.131

αυτές τις αντιλήψεις και έτσι να δουν τα μαθηματικά από μια άλλη οπτική, ως μέρος της ζωής τους και του πολιτισμού.

4.6. Αλλαγές στο πρόγραμμα σπουδών στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών

Οι αλλαγές στο πρόγραμμα σπουδών είναι, από πολλές απόψεις, οι πιο κοινές και προσιτές των αλλαγών που μπορούμε να κάνουμε. Πολλά πολυπολιτισμικά προγράμματα σπουδών είναι διαθέσιμα[27] και προσφέρουν ένα καλό σημείο εκκίνησης για την εισαγωγή των πολυπολιτισμικά μαθηματικά. Αλλά η αλλαγή του προγράμματος σπουδών μόνο δεν οδηγεί απαραιτήτως στις αλλαγές στη σκέψη για τη διδασκαλία και την μάθηση. Για να είναι οι ισχυρότερες, οι αλλαγές στο πρόγραμμα σπουδών πρέπει να ενσωματωθούν και αλλαγές και στην διδασκαλία και την κουλτούρα των τάξεων.

Ακόμη και μια αλλαγή στο πρόγραμμα σπουδών μόνο, εντούτοις, μπορεί να γίνει ισχυρότερη εάν πληροί κάποιους όρους, όπως αυτοί που παρουσιάζουμε παρακάτω.

Είναι σημαντικό οι μαθηματικές ιδέες, οι έννοιες, και τα συστήματα από όλο τον κόσμο να ενσωματώνονται στην καθημερινή ζωή της τάξης. Χρησιμοποιώντας συχνά αυτά τα μαθηματικά, οι μαθητές επίσης μαθαίνουν ότι όλοι οι λαοί του κόσμου χρησιμοποιούν και έχουν χρησιμοποιήσει σημαντικά μαθηματικά.

Αυτή η προσέγγιση διαφέρει από την αντίληψη ότι τα πολυπολιτισμικά μαθηματικά είναι χωριστά από τα "κανονικά" μαθηματικά και γίνονται ως

[27] Eicholz, R(1992). Building Bridges to Mathematics: Cultural Connections. 9 vols. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co.

Zaslavsky, Cl.(1993) Multicultural Mathematics: Interdisciplinary Cooperative Learning Activities. Portland, Maine: J. Weston Walch Publisher,

διασκέδαση, αλλά όχι ως βάση για την ουσιαστική μαθηματική μάθηση[28]

Ο δεύτερος, δυσκολότερος τύπος αλλαγής περιλαμβάνει την επανεξέταση του τρόπου διδασκαλίας. Οι επιλογές για τη διεξαγωγή μιας διδασκαλίας που θα συνδέει τα μαθηματικά με τον πολιτισμό, συνεπάγονται και κάποιες διδακτικές επιλογές, όπως κονστρουκτιβισμός αντί για αφήγηση από το δάσκαλο, και συνεργατική μάθηση στη θέση της μεμονωμένης ή ανταγωνιστικής μάθησης. Όλες αυτές οι επιλογές μας απαιτούν να εξετάσουμε τις προσωπικές πεποιθήσεις μας για το πώς μαθαίνουν οι μαθητές και να περάσουμε από τη γνώση που μεταδίδεται από τους δασκάλους στη γνώση που κατασκευάζεται από τους μαθητές. Πρέπει επίσης να εξετάσουμε τους ίδιους τους μαθητές μας -- τα υπόβαθρα, τις δυνατότητες και τις ανάγκες τους.

Ο Banks κάνει λόγω για μια προσπάθεια μεταστροφής στην πολυπολιτισμική εκπαίδευση. Σε αυτήν την προσέγγιση, αλλαγές απαιτούνται όχι μόνο στα υλικά του προγράμματος σπουδών, αλλά και στις αντιλήψεις του δασκάλου και των μαθητών και στις μεθόδους διδασκαλίας. Αυτή η προσέγγιση μετασχηματισμού καθορίζεται από διάφορους σημαντικούς παράγοντες που επηρεάζουν την διδασκαλία. Ένας από αυτούς είναι η κατασκευή της γνώσης, η βοήθεια στους μαθητές να κατανοήσουν τις πολιτιστικές προοπτικές των μαθηματικών και η βοήθεια στο να γίνονται κατασκευαστές της γνώσης. Μια άλλη είναι μείωση της προκατάληψης και των πεποιθήσεων. Μια τρίτη περιοχή είναι η δίκαιη παιδαγωγική, η τροποποίηση των προσεγγίσεων διδασκαλίας για να προσφερθούν ίσες ευκαιρίες σε παιδιά διαφορετικών πολιτισμών. [29]

---

[28] Derman-Sparks, L,(1989). Anti-Bias Curriculum Tools for Empowering Young Children. Washington, D.C.: National Association for the Education of Young Children, σ.7

[29] Banks, James A. "Transforming the Mainstream Curriculum." Educational Leadership 51, no. 8 (1994): 4-8

4.7. Επιφυλάξεις

Φυσικά εκτός από τους υποστηρικτές τους τα Εθνομαθηματικά έχουν και τους επικριτές τους. Η κριτική που τους έχει ασκηθεί παρουσιάζει ενδιαφέρον, καθώς μας δίνει την ευκαιρία να δούμε κάποιες από τις αδυναμίες τους. Βασικό σημείο αυτής της κριτικής είναι πως δεν πρέπει το επίσημο σχολικό πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών να αντικατασταθεί πλήρως από ένα πρόγραμμα Εθνομαθηματικών. Εκτός από τις οποιεσδήποτε πολιτισμικές διαφορές, τα μαθηματικά αποτελούν μια διεθνή γλώσσα και το σχολείο δεν πρέπει σε καμία περίπτωση να στερήσει τους μαθητές του από τη δυνατότητα να την χρησιμοποιούν. Δεν μπορεί, σύμφωνα με τους επικριτές των Εθνομαθηματικών, η ανακάλυψη του Πυθαγορείου θεωρήματος να αντικατασταθεί με μελέτη υφαντών και μοτίβων από τον λαϊκό πολιτισμό και το σχολείο, αντί να ασχολείται με τη μελέτη του πολιτισμικού παρελθόντος, θα ήταν καλύτερο να προετοιμάζει τους μαθητές για ένα καλύτερο μέλλον[30]
Οι οπαδοί των Εθνομαθηματικών απαντούν σε αυτές τις αιτιάσεις λέγοντας πως δεν έρχονται να αντικαταστήσουν τα ισχύοντα αναλυτικά προγράμματα σπουδών, αλλά να τα εμπλουτίσουν και να τους δώσουν νόημα[31].

---

[30] Περισσότερα στοιχεία για την κριτική που έχει ασκηθεί στα εθνομαθηματικά στο: Rowlands, S. and Carson, R.: 2002, 'Where would formal, academic mathematics stand in a curriculum informed by ethnomathematics? A critical review of ethnomathematics', *Educational Studies in Mathematics* 50(1), 79–102. στα ελληνικά υπάρχει το άρθρο των Ζαχάρου, Κ., Χασάπη, Δ. (2000) Κριτική παρουσίαση της ερευνητικής και εκπαιδευτικής προσέγγισης των εθνομαθηματικών. Αντιτετράδια της Εκπαίδευσης.

[31] Adam, S., Alangui, W. and Barton, B.: 2003, 'A comment on: Rowlands and Carson "Where Would Formal, Academic Mathematics Stand in a Curriculum Informed by Ethnomathematics? A Critical Review" ', *Educational Studies in Mathematics* 52(3), 327–335.

5.Θεωρία για τη δημιουργία και την αξιολόγηση Προγραμμάτων σπουδών Γεωμετρίας

Αφού είδαμε το πλαίσιο διδασκαλίας της γεωμετρίας στις 3 πρώτες τάξεις του δημοτικού, τις νέες τάσεις για τη διδασκαλία της και τις προτάσεις των Εθνομαθηματικών, και πριν προχωρήσουμε στην κατασκευή ενός διδακτικού πακέτου, θεωρούμε χρήσιμο να εξετάσουμε τη βιβλιογραφία σχετικά με τη δημιουργία και την αξιολόγηση Προγραμμάτων σπουδών Γεωμετρίας.

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία λοιπόν η ανανέωση των υπαρχόντων προγραμμάτων σπουδών Γεωμετρίας είναι ένας πολύ σύνθετος στόχος. Πρέπει να συνεκτιμηθούν οι ακόλουθες πλευρές-διαστάσεις ενός τέτοιου προγράμματος [1]

- *Η επιστημολογική διάσταση* (η συνεχώς μεταβαλλόμενη εικόνα των μαθηματικών και της μαθηματικής δραστηριότητας).
- *Η παιδαγωγική διάσταση* (η υπάρχουσα γνώση για τη διαδικασία μάθησης και την λειτουργία της διδασκαλίας).
- *Η τεχνολογική διάσταση* (αλλαγές στις διευκολύνσεις που παρέχει η τεχνολογία για να "κάνουμε" και να μαθαίνουμε μαθηματικά).
- *Η πολιτική διάσταση* (αλλαγές στα γενικότερα κοινωνικά ζητήματα και προβλήματα).

Οι στόχοι που ένα πρόγραμμα σπουδών Γεωμετρίας πρέπει να έχει, είναι σύμφωνα με τον Hansen[2], οι εξής:

1ον. *Να δημιουργεί γνώσεις για το χώρο και τα επίπεδα.*

Οι γνώσεις για το χώρο και τα επίπεδα περιλαμβάνουν την εξερεύνηση

[1] Hansen, V. L. (1998). General considerations on curricula designs in geometry. In C. Mammana & V. Villani (edit.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (an ICMI Study), 235-243. Dordrecht-Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

[2] Hansen, V. L. (1998). ο.π.

και την ανακάλυψη των κύριων ιδιοτήτων των βασικών γεωμετρικών σχημάτων με όλα τα πιθανά εργαλεία. Σε ένα προηγμένο επίπεδο πρέπει να ενθαρρύνεται η μελέτη νέων τύπων καμπυλών και επιφανειών με την βοήθεια του υπολογιστή. Έννοιες όπως η συμμετρία, η γραμμικότητα, η κυρτότητα, η συνεκτικότητα και η συνοχή πρέπει να μελετηθούν με έμφαση στην απλότητα την εμβάθυνση.

2ον. *Να προετοιμάζει τους μαθητές για εφαρμογές της Γεωμετρίας.*

Οι εφαρμογές της Γεωμετρίας είναι άφθονες. Η παρουσίαση των εφαρμογών πρέπει να κάνει μια κατάλληλη διάκριση μεταξύ αυτών που χρησιμοποιούνται μέσα σε άλλα μαθηματικά πεδία και αυτών που χρησιμοποιούνται σε μη μαθηματικές "περιοχές".

3ον. *Να παρουσιάζει τα σημαντικά επιτεύγματα κατά την εξέλιξη της Γεωμετρίας.*

Μέσα σ' αυτά περιλαμβάνονται τα θεωρήματα του Θαλή και του Πυθαγόρα, τα στοιχεία του Ευκλείδη, η ιδέα της αναλυτικής Γεωμετρίας, κ.τ.λ.

4ον. *Να αναπτύσσει δεξιότητες και ικανότητες στους μαθητές.*

Η δυνατότητα διαφορετικής προσέγγισης για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων, η ικανότητα διατύπωσης λογικών υποθέσεων για γεωμετρικές λύσεις, η ικανότητα γρήγορων εκτιμήσεων αριθμητικών αποτελεσμάτων κατά προσέγγιση, η ικανότητα χρήσης γεωμετρικών μοντέλων για την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων, η δυνατότητα "ερμηνείας" γεωμετρικών καταστάσεων. Επιπλέον η ανάπτυξη της οπτικής κατανόησης και αναγνώρισης, η υποκίνηση της δημιουργικής σκέψης. Η χρήση των υπολογιστών μπορεί να αποδειχθεί αρκετά χρήσιμη στα παραπάνω.

5ον. *Να ισχυροποιεί την επαγωγική και παραγωγική σκέψη.*

Αφορά δραστηριότητες όπως η εύρεση των "καλών" στρατηγικών για τη λύση προβλημάτων, η διατύπωση γενικεύσεων των συμπερασμάτων που ξεκινούν από μεμονωμένες περιπτώσεις, το ψάξιμο για διαφορετικές αποδείξεις διάφορων ισχυρισμών, η αναζήτηση μιας ενιαίας, συνεπούς οργάνωσης της θεωρίας.

Ο Τριανταφυλλίδης[3], θεωρεί πως οι γεωμετρικές έννοιες διδάσκονται αποσπασματικά, ενώ η ίδια η Γεωμετρία ως γνωστικό αντικείμενο φαντάζει να έχει απορροφηθεί από το κυρίαρχο υπόδειγμα που διέπει τη διδασκαλία των μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο, το οποίο δεν είναι άλλο από αυτό της αριθμητικής. Η Τζεκάκη[4] υποστηρίζει πως ένα σύγχρονο πρόγραμμα σπουδών μπορεί να προέλθει μόνο μέσα από την έρευνα στη διδακτική της Γεωμετρίας. Η έρευνα επιτρέπει την μαθηματικά ορθή παρουσίαση των γεωμετρικών εννοιών σε οποιοδήποτε επίπεδο, δηλαδή τον διδακτικό μετασχηματισμό τους που τις μετατρέπει σε διδάξιμη γνώση και την αποφυγή ανάπτυξης λανθασμένων αντιλήψεων από τους μαθητές στην προσέγγιση της Γεωμετρίας. Η έρευνα μόνο μπορεί να δώσει απαντήσεις:

α) στην οργάνωση των αναλυτικών προγραμμάτων με τρόπο ώστε να δομείται σταδιακά η γεωμετρική γνώση σύμφωνα με τις εμπειρίες και το επίπεδο των μαθητών,

β) στη συγγραφή διδακτικών βιβλίων όπου παρουσιάζονται οι γεωμετρικές γνώσεις με τρόπο ώστε να αποφεύγονται οι λανθασμένες αντιλήψεις και η δημιουργία διδακτικών εμποδίων στην ανάπτυξη της γεωμετρικής γνώσης, και

γ) στην επεξεργασία διδακτικών προσεγγίσεων που επιτρέπουν την ανάπτυξη των κατάλληλων γεωμετρικών εμπειριών με τρόπο ώστε να οδηγούνται οι

---

[3] Τριανταφυλλίδης, Τ. (2001) Γεωμετρία: ο φτωχός συγγενής του αναλυτικού προγράμματος μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο. Στο Α. Αρβανιτογεώργος, Β. Παπαντωνίου & Δ. Ποτάρη (επιμ.), *Ερευνητικές προσεγγίσεις στη διδακτική της Γεωμετρίας – Πρακτικά 4ου Πανελληνίου Συνεδρίου Γεωμετρίας,* (σελ. 133-135). Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη.

[4] Τζεκάκη, Μ. (2001) Η σημασία της έρευνας στη διδακτική της Γεωμετρίας στην εκπαίδευση και επιμόρφωση των εκπαιδευτικών. Στο Α. Αρβανιτογεώργος, Β. Παπαντωνίου & Δ. Ποτάρη (επιμ.), *Ερευνητικές προσεγγίσεις στη διδακτική της Γεωμετρίας – Πρακτικά 4ου Πανελληνίου Συνεδρίου Γεωμετρίας,* (σελ. 132-133). Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη.

μαθητές στην επιδιωκόμενη, από το αναλυτικό πρόγραμμα, γεωμετρική γνώση.

5.1 Εναλλακτικά προγράμματα σπουδών γεωμετρίας

Πέρα από τα γενικά προγράμματα για τη γεωμετρία, έχουν κάνει την εμφάνισή τους και κάποια εναλλακτικά. Εκτός από τα «Ρεαλιστικά Μαθηματικά» και τα Εθνομαθηματικά, που έχουμε δει αναλυτικά σε προηγούμενο κεφάλαιο, άλλες προτάσεις είναι οι δραστηριότητες της «Κοινής Λογικής» (ημερολόγια, χρήματα, θερμόμετρα, χάρτες κ.α.) που αναπτύχθηκαν από την ομάδα της Γένοβα στην Ιταλία, γύρω από την έννοια του «πεδίου εμπειριών»[5], το Αναλυτικό Πρόγραμμα που στηρίζεται σε Project (project based curriculum) και ξεκίνησε από τη φιλοσοφία της κριτικής μαθηματικής εκπαίδευσης[6], καθώς και τα Everyday Mathematics, ένα πρόγραμμα που αναπτύχθηκε στο Πανεπιστήμιο του Σικάγου.[7]

Όλα αυτά τα προγράμματα έχουν πολλές διαφορές μεταξύ τους τόσο στη φιλοσοφία, όσο και στους στόχους και τις δραστηριότητες που προτείνουν. Κοινή τους όμως συνισταμένη είναι ο προβληματισμός τους για τον αυξανόμενο αριθμό μαθητών που αποτυγχάνουν στα μαθηματικά και χάνουν το ενδιαφέρον τους για αυτά, καθώς γίνονται ολοένα και πιο απομακρυσμένα

---

[5] Bussi, M.: 1996, 'Mathematical discussion and perspective drawing in primary school',*Educational Studies in Mathematics* 31, 11–41.

[6] Frankenstein, M. (1998) *Reading the World with Maths: Goals for a Critical Mathematics Literacy Curriculum*, Paper presented in the Mathematics Education and Society Conference, Nottingham: September 1998 σ. 180–190.

[7] Isaacs, A. C., Carroll, W. M., & Bell, M. (1998). A research-based curriculum: The research foundations of the UCSMP Everyday Mathematics curriculum. Chicago: UCSMP. [http://everydaymath.uchicago.edu/educators/references.shtml.]

και αποκομμένα από την καθημερινή ζωή. Μοιράζονται επίσης την αφοσίωση σε έναν κοινό στόχο. Να ενδυναμωθούν οι μαθητές, έτσι ώστε να αναγνωρίζουν και να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στη ζωή τους[8].

[8] Chronaki, A. (2000) Teaching Maths Through Theme-Based Resources: Pedagogic Style, 'Theme' And 'Maths' In Lessons, Educational Studies in Mathematics 42(2): 141-163; Jan 2000

6.Διαμόρφωση ενός προγράμματος διδασκαλίας της Γεωμετρίας.

6.1 Η διδακτική μας πρόταση.

Εξετάζοντας όλο αυτό το θεωρητικό πλαίσιο δημιουργήσαμε ένα εκπαιδευτικό πακέτο για τη διδασκαλία της γεωμετρίας στις 3 πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου, στο πνεύμα των Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής, που μπορεί να λειτουργήσει συμπληρωματικά στη διδασκαλία και να την εμπλουτίσει.

Για να επιλέξουμε τα περιεχόμενα του πακέτου στηριχτήκαμε στις ενότητες Γεωμετρίας που προβλέπουν τα Δ.Ε.Π.Π.Σ. για αυτά τα περιεχόμενα βρήκαμε κατάλληλα πλαίσια προερχόμενα από το χώρο των Εθνομαθηματικών. Ως προς τις διδακτικές προσεγγίσεις που προτείνουμε λαμβάνουμε υπόψη τις νεότερες τάσεις της διδασκαλίας της γεωμετρίας, έτσι όπως τις περιγράψαμε στο θεωρητικό πλαίσιο.

6.2 βασικές αρχές

Σύνδεση των μαθηματικών με τον πολιτισμό

Τα νέα αναλυτικά προγράμματα σπουδών για το δημοτικό σχολείο έχουν αλλάξει σε σχέση με το παρελθόν τόσο ως προς το περιεχόμενο όσο και προς τις μεθόδους. Κύρια έννοια που αναδεικνύεται είναι η διαθεματικότητα, τόσο ανάμεσα στα αντικείμενα που διδάσκονται, όσο και ανάμεσα στις έννοιες που εμπεριέχονται σε κάθε ξεχωριστό αντικείμενο.

Στη δική μας πρόταση ένα ισχυρό διαθεματικό πλαίσιο είναι δεδομένο καθώς η σύνδεση Γεωμετρίας και τέχνης δεν είναι μια νέα τάση ή μια τεχνητή κατασκευή στα πλαίσια της σχολικής διαθεματικότητας, αλλά μια δυνατή

σχέση που υπάρχει αιώνες τώρα στον εξωσχολικό κόσμο[1] Αυτό που επιχειρούμε είναι η γεφύρωση του χάσματος ανάμεσα στη σχολική Γεωμετρία και στη Γεωμετρία που χρησιμοποιείται στη ζωή και την τέχνη, βασισμένοι στο θεωρητικό πλαίσιο που παρουσιάσαμε ως τώρα.

Πολυπολιτισμικότητα

Στο ελληνικό δημοτικό σχολείο φοιτούν πλέον μαθητές διαφόρων εθνικοτήτων και γίνονται πολλές προσπάθειες για την ανάπτυξη μιας εκπαίδευσης που θα σέβεται και θα αξιοποιεί τη διαφορετικότητα. Οι μαθητές αυτοί, φέρνουν μαζί τους στο σχολικό περιβάλλον μια πολιτισμική παράδοση διαφορετική, ικανή να πλουτίσει τη διδασκαλία πολλών μαθημάτων και ειδικά της Γεωμετρίας. Ακόμα και μαθητές με φαινομενικά κοινή καταγωγή, μπορεί να έχουν διαφορετικό πολιτισμικό υπόβαθρο που το σχολείο μπορεί να αναδείξει και να αξιοποιήσει. Στην περίπτωση αυτή βέβαια ένα προτεινόμενο πακέτο διδασκαλίας έχει ενδεικτικό χαρακτήρα και σε καμία περίπτωση δεν εξαντλεί τις δυνατότητες για δραστηριότητες.

Βιωματική μάθηση

Οι νέες τάσεις που περιγράψαμε παραπάνω κάνουν λόγο για την απόκτηση δεξιοτήτων, όπως η σύνθεση παζλ, οι χαράξεις και οι μετασχηματισμοί, υιοθετώντας μια πιο δυναμική άποψη σε σχέση με το παρελθόν, και η πρότασή μας αξιοποιεί αυτό το στοιχείο. Οι μαθητές έρχονται σε επαφή με έργα τέχνης, όχι παθητικά, ως απλοί παρατηρητές, αλλά αναλύουν τα μορφικά στοιχεία τους και τα ανασυνθέτουν, απομονώνουν τις φόρμες και τα μοτίβα, βρίσκουν

[1] Masingila, J,O, King, J, (1997) "Using *Ethnomathematics* as a Classroom Tool" Yearbook (National Council of Teachers of Mathematics)

συμμετρίες και ασυμμετρίες, φτιάχνουν παζλ και πλακόστρωτα. Οι περισσότερες δραστηριότητες που προτείνονται έχουν βιωματικό χαρακτήρα.

Δυναμικότητα –ευελιξία

Το πακέτο του διδακτικού υλικού που κατασκευάσαμε δίνει στο δάσκαλο τη δυνατότητα να προσαρμόσει τη διδασκαλία του στα ενδιαφέροντα και τις ανάγκες των μαθητών του, να χρησιμοποιήσει παραδείγματα από την παράδοση των μαθητών του και τη δική του και να φέρει τους μαθητές του σε επαφή με τυχόν καλλιτέχνες του τόπου όπου ζουν.

6.3.δομή

Σε κάθε ενότητα υπάρχει ένα μικρό εισαγωγικό κείμενο που δίνει πληροφορίες σχετικές με το θέμα και στη συνέχεια αναλύονται οι στόχοι της ενότητας και δίνονται κάποιες διδακτικές οδηγίες. Έπειτα ακολουθούν οι προτεινόμενες δραστηριότητες και άλλες πληροφορίες που μπορούν να αξιοποιηθούν από το δάσκαλο. Φυσικά χρησιμοποιώντας το υλικό κάθε ενότητας μπορεί κάποιος να σχεδιάσει και να υλοποιήσει δικές του δραστηριότητες, ανάλογα με τα ενδιαφέροντα και του στόχους του. Σε κάποιες ενότητες υπάρχει και ηλεκτρονικό υλικό που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην τάξη. Συχνά το ηλεκτρονικό υλικό μας δίνει έναν εύκολο και εποπτικό τρόπο να ασχοληθούν οι μαθητές μας με γεωμετρικές έννοιες και μπορεί να φανεί πολύ χρήσιμο.

6.4.Περιεχόμενα

Η επιλογή των περιεχομένων ενός διδακτικού υλικού είναι μια δύσκολη δραστηριότητα. Όσο κι αν προσπαθήσει κανείς να τη θεμελιώσει σε ένα ισχυρό θεωρητικό και ερευνητικό πλαίσιο, παραμένει σε ένα μεγάλο μέρος αυθαίρετη και υποκειμενική. Εμείς προσπαθήσαμε να επιλέξουμε τα περιεχόμενα με βάση 3 άξονες:

1. Τα περιεχόμενα και τη φιλοσοφία του ΔΕΠΠΣ, , έτσι όπως τα περιγράψαμε στο 2ο κεφάλαιο, καθώς και τις νεότερες τάσεις για τη διδασκαλία της γεωμετρίας στις 3 πρώτες τάξεις. Έτσι αναζητήσαμε παραδείγματα που να μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη διδασκαλία εννοιών όπως, η συμμετρία, τα μοτίβα, τα γεωμετρικά σχήματα και τα είδη των γραμμών, τα παζλ και τα πλακόστρωτα κ.α.
2. Την έρευνα στο χώρο των εθνομαθηματικών. Όπως είδαμε η ερευνητική παράδοση στο χώρο των εθνομαθηματικών έχει αναδείξει κάποια περιεχόμενα, όπως τα αφρικανικά sona, την ύφανση χαλιών και φορεσιών κ.α.
3. Μια προσπάθεια να χρησιμοποιήσουμε παραδείγματα από διαφορετικές πολιτισμικές κοινότητες από όλο τον κόσμο, χωρίς να περιοριζόμαστε στον ελλαδικό ή τον ευρωπαϊκό χώρο. Έτσι ενσωματώσαμε περιεχόμενα από την Αφρική, την Κίνα ή την Ιαπωνία κ.α.

Ας δούμε όμως τις ενότητες του ντοσιέ μια μια

Γεωμετρικά αγγεία

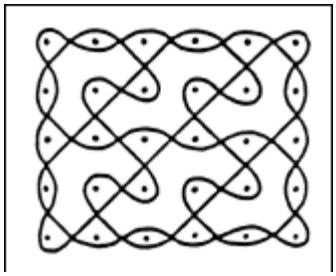
Γεωμετρική ονομάζεται η τέχνη που αναπτύχθηκε μετά την Μυκηναϊκή, στην περίοδο ύστερα από την καταστροφή του μυκηναϊκού κόσμου (από το 1000 περίπου μέχρι το 700 π.Χ.) από τους Δωριείς. Πήρε το όνομά της από τα γεωμετρικά σχήματα, που μ' αυτά διακοσμούνταν τα έργα, κυρίως τα πήλινα αγγεία, αυτής της περιόδου. Σύμφωνα με ορισμένους μελετητές, η γεωμετρική τέχνη ήταν εξέλιξη μιας υπάρχουσας σε πρωτογενή κατάσταση λαϊκής τέχνης· άλλοι υποστηρίζουν ότι αποτέλεσε επίδραση των Δωριέων, των οποίων την απλή και πρωτόγονη διακόσμηση στα όπλα και στα ρούχα αντέγραψαν οι τεχνίτες των κατακτημένων χωρών της Ελλάδας· άλλοι τέλος λένε ότι η γεωμετρική τέχνη ήταν εξέλιξη της μυκηναϊκής. Εκτός από τα αφηρημένα σχήματα (τρίγωνα, τετράγωνα, μαύρα και λευκά, ρόμβους, κύκλους, σταυρούς και προπάντων μαιάνδρους) βρίσκουμε συχνά ζώα ή ανθρώπους, που αποδίδονται με τρόπο γεωμετρικό (δηλ. με κυκλικές και τριγωνικές γραμμές), καθώς και συμπλέγματα παραστάσεων από την πρόθεση ή την εκφορά του νεκρού.

Τα αγγεία της γεωμετρικής εποχής μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη διδασκαλία πολλών θεμάτων. Αρχικά μπορούν να δώσουν πλούσιο υλικό για τις χαράξεις καθώς πάνω στα αγγεία υπάρχει ποικιλία γραμμών και σχημάτων. Η χάραξη, όπως έχουμε δει είναι θεμελιώδης δεξιότητα που οι μαθητές πρέπει να αποκτήσουν στη γεωμετρία.

Μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για να εντοπίσουμε μοτίβα που επαναλαμβάνονται με κάποια κανονικότητα. Η αναγνώριση, η σύγκριση και η ανάλυση των μοτίβων είναι σημαντικές έννοιες για τη νοητική ανάπτυξη των μαθητών. Τα μοτίβα αποτελούν έναν τρόπο οργάνωσης και οι δραστηριότητες αυτού του είδους αποσκοπούν στην άσκηση της παρατηρητικότητας, της

ακρίβειας και της προσεκτικής εκτέλεσης συγκεκριμένων και διαδοχικών βημάτων (αλγόριθμων). Τα γεωμετρικά αγγεια δίνουν τη δυνατότητα να δουν οι μαθητές χαρακτηριστικά ελληνικά μοτίβα, όπως οι μαίανδροι

Sona: μονοκοντυλιές από την Αφρική



Τα sona είναι κάποιες ιδιαίτερες ζωγραφιές στο χώμα που φτιάχνουν οι Tchokwe (περίπου 1 εκατομμύριο άνθρωποι) που ζουν στο βορειοανατολικό μέρος της Αγκόλα, την περιοχή Lunda. Όταν οι Tchokwe συναντιόντουσαν στο κέντρο του χωριού τους, γύρω από τη φωτιά περνούσαν την ώρα τους λέγοντας ιστορίες και κάνοντας συζητήσεις τις οποίες απεικόνιζαν με σχέδια που έκαναν με το δάχτυλο στο χώμα. Πολλές από αυτές τις ζωγραφιές έχουν μια μεγάλη ιστορία, καθώς αναφέρονται σε μύθους, παροιμίες και αινίγματα. Η σχεδίαση μιας τέτοιας ζωγραφιάς χωρίς να σηκώσουν καθόλου το δάχτυλο από το χώμα (μονοκοντυλιά) ήταν κατά κάποιον τρόπο μια επίδειξη δεξιοτεχνίας για αυτόν που το έκανε. Για να διευκολυνθούν στην χάραξη οι έμπειροι σχεδιαστές επινόησαν μια τεχνική. Πρώτα χάραζαν ένα ορθογώνιο δίκτυο από ισαπέχουσες τελείες σε τόσες στήλες και γραμμές όσες απαιτούσε το σχέδιο που ήθελαν να κάνουν, ένα πρωτόλειο σύστημα συντεταγμένων. Έτσι κάποιος ξέροντας των αριθμό των τελειών και ένα γεωμετρικό αλγόριθμο μπορούσε πολύ ευκολότερα να σχεδιάσει κάτι.

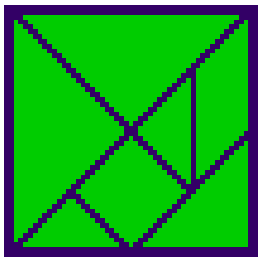
Με βάση το παράδειγμα των sona οι μαθητές μπορούν να εξασκηθούν συστηματικά στις χαράξεις γραμμών. Σημαντική βοήθεια σε αυτό προσφέρουν το τετραγωνισμένο χαρτί ή το χαρτί με κουκίδες, όπως γίνεται και στο παράδειγμα των sona.

.

Ταγκραμ: ένα παλιό κινέζικο παιχνίδι

Για τη λέξη Tangram υπάρχουν πολλές ετυμολογικές ερμηνείες. Στην Ασία ονομάζεται «Οι Εφτά πλάκες της Σοφίας».

Το Τάνγκραμ ξεκίνησε στην Ανατολή πριν τον 18^{ο} αιώνα και στην συνέχεια διαδόθηκε πολύ γρήγορα στην Δύση. Στα 1818, πολλές δημοσιεύσεις σχετικά με το Τάνγκραμ παρουσιάστηκαν στις ΗΠΑ, Γερμανία, Ιταλία, Γαλλία και Αγγλία. Τον 19^{ο} αιώνα ήταν τόσο δημοφιλές στην Κίνα ώστε τα γεωμετρικά του σχήματα εμφανίστηκαν σε σχέδια πιάτων ακόμη και τραπεζιών.



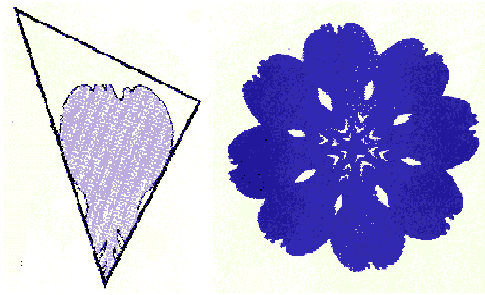
Αποτελείται μόνον από εφτά κομμάτια, γνωστά σαν Τανς. Τα κομμάτια είναι απλές μορφές: δύο μικρού μεγέθους ίσα τρίγωνα, ένα μεσαίου μεγέθους τρίγωνο, δύο μεγάλου μεγέθους ίσα τρίγωνα, ένα παραλληλόγραμμο και ένα τετράγωνο. Όλα μαζί τοποθετημένα δημιουργούν ένα μεγάλο τετράγωνο.

Ο σκοπός είναι η τοποθέτηση των κομματιών για την δημιουργία συνθέσεων όπως γεωμετρικά σχήματα, ανθρώπινες μορφές σε κίνηση, κτίρια, ζώα, γράμματα της αλφαβήτου.

Τα Τάνγκραμ ενδιαφέρουν την διδασκαλία των μαθηματικών με την γεωμετρία τους και τις αναλογίες των κομματιών.

Πρόκειται για παζλ τα οποία επιτρέπουν και υποβοηθούν την ανάπτυξη χωρικών και οπτικών δεξιοτήτων τα οποία μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για την εισαγωγή ή την ενίσχυση, σε ένα ανώτερο στάδιο ενασχόλησης με την εν λόγω δραστηριότητα, γεωμετρικών εννοιών όπως η ισότητα, η ομοιότητα, η συμμετρία κ.ά.

Κιριγκάμι: χαρτοκοπτική από τη Ιαπωνία



Στην Κίνα και την Ιαπωνία η χαρτοδιπλωτική (οριγκάμι) και η χαρτοκοπτική (κιριγκάμι ή μον-κιρί) είναι πολύ διαδεδομένες χειροτεχνικές μέθοδοι. Είναι γνωστές πάνω από 1500 χρόνια και τα σχέδιά τους μπορεί να είναι εξαιρετικά πολύπλοκα και λεπτοδουλεμένα.

Οι δραστηριότητες δίπλωσης και κοπής είναι πολύ χρήσιμες σε αυτό το στάδιο για την εμπειρική μελέτη της συμμετρίας. Οι μαθητές έχουν την ικανότητα να βρίσκουν τον άξονα συμμετρίας με τη δίπλωση και σχεδιάζοντας και κόβοντας να δημιουργούν οι ίδιοι με έναν εύκολο τρόπο εντυπωσιακά σχέδια.

Τέχνη στο πάτωμα: πολύχρωμα χαλιά

Τα χαλιά είναι μια πανάρχαια τέχνη. Όλοι σχεδόν οι πολιτισμοί έχουν τα δικά τους χαλιά με πολύχρωμα και περίτεχνα σχέδια. Ιδιαίτερα φημισμένα είναι τα χαλιά της ανατολής. Στην Περσία φτιάχτηκαν περίφημα χαλιά και εξακολουθούν να φτιάχνονται μέχρι και σήμερα.

Τα χαλιά υφαίνονται συνήθως σε έναν αργαλειό ο οποίος μπορεί να διαφέρει από χώρα σε χώρα. Ανάλογα με το σχέδιο τους διακρίνονται σε 3 κύριες κατηγορίες: τα καμπυλόγραμμα (όπου κυριαρχούν οι καμπύλες γραμμές), τα γεωμετρικά (όπου κυριαρχουν οι ευθείες γραμμές) και τα ζωγραφικά, όπου απεικονίζονται ολόκληρες παραστάσεις

Πολλά παραδοσιακά χαλιά είναι γεμάτα μοτίβα που επαναλαμβάνονται ή περιστρέφονται και συμμετρικά σχέδια. Οι μαθητές σίγουρα έχουν δει χαλιά και μπορούν να μεταφέρουν τις εμπειρίες τους. Πολλά από αυτά τα σχέδια

μάλιστα έχουν και κάποιες συγκεκριμένες συμβολικές σημασίες. Εκτός βέβαια από τα παραδοσιακά σχέδια χαλιών υπάρχουν και σχέδια μοντέρνα. Οι μαθητές μπορούν εύκολα να κάνουν μια τέτοια διάκριση. Τα μοντέρνα χαλιά συχνά έχουν γεωμετρικά στοιχεία που μπορούμε να αξιοποιήσουμε στη διδασκαλία.

Παραδοσιακές φορεσιές

Όλοι οι λαοί έχουν τις δικές τους παραδοσιακές ενδυμασίες. Συνήθως αυτές προσφέρουν μια ποικιλία σχεδίων που είναι συμμετρικά ή περιέχουν ενδιαφέροντα μοτίβα ή ακόμα και διακόσμηση με γραμμές. Από τα απλά σκωτσέζικα καρό με τα οποία φτιάχνονται τα γνωστά κιλτ, ως τα περίτεχνα σχέδια των κιμονό, τις ελληνικές παραδοσιακές φορεσιές και τα ρούχα των λαών της Αφρικής.

Οι τεχνικές της διακόσμησης της κάθε φορεσιάς μπορεί να διαφέρουν. Κάποια σχέδια υφαίνονται εξαρχής στο ύφασμα με την κατασκευή του. Κάποια άλλα κεντιούνται από πάνω στο ύφασμα, αφού έχει φτιαχτεί η ενδυμασία με πολύχρωμες κλωστές, βαμβακερές ή μεταξωτές ή και με μικρές χάντρες, όπως για παράδειγμα οι φορεσιές των ινδιάνων. Τέλος κάποιες φορεσιές από την Γκάνα της Δυτικής Αφρικής (ADINKRA) φτιάχνονται από ύφασμα το οποίο ζωγραφίζεται με διάφορα σχέδια, χρησιμοποιώντας μελάνι και ειδικές σφραγίδες. Τα σχήματα μάλιστα που χρησιμοποιούνται έχουν και συγκεκριμένη συμβολική σημασία.

Τα μικρά παιδιά πολλές φορές μέσα από την καθημερινή ζωή και τα παιχνίδια τους έχουν κάποιες διαισθητικές γνώσεις για την κίνηση(περιστροφή, μετατόπιση) των γεωμετρικών μορφών. Η γνώση αυτή μπορεί να αξιοποιηθεί στη διδασκαλία με δραστηριότητες βασισμένες στο υλικό των παραδοσιακών φορεσιών που θα οδηγήσουν τους μαθητές να ερευνήσουν εμπειρικά κινήσεις

όπως η μετατόπιση, η αναστροφή και η αντιστροφή. Υλικά όπως οι καθρέφτες, η δίπλωση και τα διάφανα χαρτιά μπορούν να βοηθήσουν.

Τέλος με τις παραδοσιακές φορεσιές οι μαθητές μπορούν να ασχοληθούν με τα μοτίβα, μέσα από τα οποία παρατηρούν την εξέλιξη και την διαδοχή καταστάσεων. Είναι απαραίτητο οι μαθητές να μπορούν να απομονώνουν το σχέδιο που επαναλαμβάνεται, να ανακαλύπτουν τον τρόπο της επανάληψης και να συνεχίζουν το μοτίβο. Οι δραστηριότητες αυτού του είδους αποσκοπούν κυρίως στην άσκηση της παρατηρητικότητας, της ακρίβειας και της προσεκτικής εκτέλεσης συγκεκριμένων και διαδοχικών βημάτων (αλγόριθμων).

Πολύχρωμα πλακόστρωτα και μωσαϊκά

Η κάλυψη μια επιφάνειας με άλλες μικρότερες είναι μια τεχνική πολύ παλιά και συναντάται σε πολλούς διαφορετικούς πολιτισμούς. Τη συναντάμε ήδη από το 4000 πΧ. στους Σουμέριους που στόλιζαν τα σπίτια και τους ναούς τους με πλάκες ξερού πηλού που κατασκεύαζαν οι δούλοι. Πλακοστρώσεις βρίσκουμε σε πολλούς πολιτισμούς (Αιγύπτιοι, Έλληνες, Πέρσες, Ρωμαίοι, Άραβες, Ιάπωνες και Κινέζοι). Τα σχήματα που χρησιμοποιούνται στις πλακοστρώσεις διαφέρουν από πολιτισμό σε πολιτισμό, όπως και οι τεχνικές χρωματισμού και στολίσματος.

Περίφημα είναι τα πλακόστρωτα στον Ισλαμικό κόσμο που δημιουργούν γεωμετρικούς σχηματισμούς, καθώς η απεικόνιση οποιασδήποτε μορφής ζωής απαγορεύεται. Το παλάτι Αλχάμπρα στη Γρανάδα της Ισπανίας είναι ξακουστό για τα πλακόστρωτά του. Σήμερα τα πλακόστρωτα εξακολουθούν να είναι επίκαιρα και τα σχέδιά τους εμπνέουν πολλές διακοσμήσεις σε υφάσματα, ταπετσαρίες, κεραμικά κ.α. Δύο σύγχρονοι καλλιτέχνες οι Maurits Escher και Victor Vasarely χρησιμοποίησαν τα πλακόστρωτα στη ζωγραφική τους και τους έδωσαν νέα διάσταση.

Η χρησιμότητα δραστηριοτήτων όπως το παζλ και το πλακόστρωτο είναι αρκετά μεγάλη γιατί εφαρμόζονται οι οπτικές διεργασίες της ανάλυσης και της σύνθεσης των γεωμετρικών σχημάτων και με τον τρόπο αυτό οι μαθητές αναπτύσσουν οπτικές γεωμετρικές ικανότητες. Οι μαθητές ασκούνται τόσο στην ανάλυση ενός σύνθετου σχήματος στα επιμέρους σχήματα από τα οποία συγκροτείται, όσο και στη σύνθεση ενός σχήματος με πρότυπα σχήματα (ή σχήματα μοντέλα) ή στην κάλυψη μιας επιφάνειας.

Δραστηριότητες τέτοιου είδους βοηθούν τους μαθητές να αντιμετωπίσουν την έννοια της επιφάνειας εμπειρικά πριν μάθουν για το εμβαδόν και με το χειρισμό των γεωμετρικών σχημάτων να εμβαθύνουν στις ιδιότητες τους (π.χ. κάποια σχήματα καλύπτουν πλήρως μια επιφάνεια, αν τοποθετηθούν το ένα δίπλα στο άλλο και κάποια άλλα όχι). Ταυτόχρονα τα μωσαϊκά και τα πλακόστρωτα δίνουν την ευκαιρία να αναδείξουμε την πολιτιστική διάσταση των μαθηματικών και να καλλιεργήσουμε στους μαθητές την καλαισθησία, προσφέροντας ένα γόνιμο πεδίο για την ανάπτυξη διαθεματικών δραστηριοτήτων που συνδέουν τη γεωμετρία με την τέχνη.

7. Εφαρμογή του προγράμματος σε 2 τάξεις του δημοτικού σχολείου

Θεωρώντας ότι οποιοδήποτε εκπαιδευτικό υλικό, όσο καλά κι αν είναι φτιαγμένο και όσο κι αν υποστηρίζεται θεωρητικά ως προς την πληρότητα και την αναγκαιότητα του, δεν μπορεί να είναι ολοκληρωμένο αν δε δοκιμαστεί έστω και σε μικρό βαθμό στην πράξη, επιλέξαμε να το δοκιμάσουμε πειραματικά με 3 περιπτώσεις εκπαιδευτικών. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε αναλυτικά αυτή τη διαδικασία και τα αποτελέσματά της.

7.1 Επιλογή συμμετεχόντων

Θεωρούμε ότι το πακέτο του εκπαιδευτικού υλικού που δημιουργήσαμε είναι κατάλληλο για να προφέρει δραστηριότητες σχετικές με τη γεωμετρία που απευθύνονται κυρίως στις 3 πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν μπορεί να βρει εφαρμογές και σε μεγαλύτερες τάξεις. Εμείς επιλέξαμε να το εφαρμόσουμε στην $3^{η}$ τάξη του δημοτικού σχολείου.
Για την εφαρμογή του επιλέξαμε 3 διαφορετικές περιπτώσεις εκπαιδευτικών. Η πρώτη είναι μια δασκάλα που για περίπου εννιά χρόνια διδάσκει τα μαθηματικά με τη λογική των μαθηματικών της φύσης και της ζωής έτσι όπως την περιγράψαμε και στο θεωρητικό μέρος. Η δεύτερη είναι μια δασκάλα με πολλά επίσης χρόνια υπηρεσίας που όμως διδάσκει μαθηματικά με το κλασικό υλικό των ήδη υπαρχόντων σχολικών εγχειριδίων. Η τρίτη περίπτωση είναι μια φοιτήτρια του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης Φλώρινας, η οποία παρακολουθεί τη διδακτική των μαθηματικών και στα πλαίσια αυτού του μαθήματος καλείται να προετοιμάσει και να διεξάγει μια διδασκαλία μαθηματικών στην τάξη. Πιστεύουμε ότι αυτές οι 3 διαφορετικές περιπτώσεις μπορούν να μας δώσουν ενδιαφέροντα δείγματα της εφαρμογής ενός τέτοιου υλικού, χωρίς σε καμία περίπτωση να είναι αντιπροσωπευτικές του πληθυσμού των δασκάλων. Άλλωστε στόχος της εφαρμογής αυτής δε είναι να εξετάσει την

αντιμετώπιση από ένα μεγάλο δείγμα πληθυσμού, αλλά μάλλον να εστιάσει σε συγκεκριμένες περιπτώσεις για τις μελετήσει σε βάθος.

7.2.Σχεδιασμός της έρευνας

Αφού επιλέξαμε τις 3 εκπαιδευτικούς αρχίσαμε να σχεδιάζουμε την έρευνα. Λαμβάνοντας υπόψη μας και παρόμοιες προσπάθειες[1] θεωρήσαμε χρήσιμο να κάνουμε αρχικά μια προσπάθεια να ανιχνεύσουμε τον τρόπο διδασκαλίας και μάθησης των μαθητών και του δασκάλου πριν από την επαφή με την νέα μας πρόταση. Αυτό κρίθηκε χρήσιμο, για πολλούς λόγους. Αρχικά θα μας έδινε τη δυνατότητα να εξετάσουμε τα αποτελέσματα της παρέμβασης συγκρίνοντας τα με την προηγούμενη κατάσταση. Επιπλέον όμως πιστεύουμε ότι θα μας έδινε ενδιαφέροντα στοιχεία με τα οποία θα μπορούσαμε να συσχετίσουμε και να ερμηνεύσουμε κάποιες ενέργειες η συμπεριφορές του δασκάλου και των μαθητών που θα παρατηρούσαμε στη συνέχεια.

Τα ερευνητικά μας εργαλεία σε αυτήν τη φάση θα είναι μια συνέντευξη με τις δασκάλες των τάξεων και την υποψήφια εκπαιδευτικό και παρατήρηση της διδασκαλίας των δύο εκπαιδευτικών των τάξεων (όπως εύκολα καταλαβαίνει κανείς στην περίπτωση της φοιτήτριας δεν ήταν δυνατή η παρακολούθηση διδασκαλιών πριν από την επαφή με το νέο υλικό)και ατομικές συνεντεύξεις με τους μαθητές

[1] Chronaki, A., (1997) Case studies in the teaching of Mathematics, through the use of art-based acivities, Bath:Αδημοσίευτη Διδακτορική Διατριβή

7.2.1Συνεντεύξεις εκπαιδευτικών

Η συνέντευξη θεωρήθηκε ως πρόσφορο μέσο για να έρθουμε σε μια πρώτη επαφή με τα υποκείμενα και να δούμε άμεσα τις απόψεις τους[2]. Συγκεκριμένα η συνέντευξη επιλέχτηκε, γιατί θα μας προσέφερε τη δυνατότητα να προσεγγίσουμε τα υποκείμενα προσωπικά που εκ των πραγμάτων σε μια τέτοιου είδους μελέτη περιπτώσεων είναι απαραίτητο στοιχείο[3]. Επιπλέον επιλέξαμε ημιδομημένη συνέντευξη για να αντιμετωπίσουμε τις διαφορετικές συνιστώσες που μας ενδιέφεραν σε κάθε περίπτωση. Π.χ. οι ερωτήσεις σχετικά με την διδακτική πρακτική και την καθημερινότητα της οργάνωσης ενός μαθήματος δεν τέθηκαν στη φοιτήτρια γιατί δεν διέθετε σχετική εμπειρία. Έτσι η συνέντευξη σε αυτή τη περίπτωση προσανατολίστηκε στην ανίχνευση γενικότερων αντιλήψεων για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους και σε υποθετικές περιπτώσεις. Αντίστοιχα στην περίπτωση της δασκάλας που δίδασκε με τα μαθηματικά της φύσης και της ζωής έγιναν ερωτήσεις σχετικές με την πορεία από την αρχή της χρήσης αυτού του υλικού μέχρι και σήμερα, ενώ στην άλλη δασκάλα προσανατολιστήκαμε στη συζήτηση της χρήσης του υπάρχοντος υλικού.

Βασικοί άξονες της συνέντευξης ήταν οι παρακάτω:

- <u>γενικά στοιχεία</u>

Εδώ διερευνήθηκαν κάποια βασικά στοιχεία όπως τα χρόνια υπηρεσίας κ.α.

- <u>προσωπική στάση απέναντι στα μαθηματικά</u>

---

[2] Βάμβουκας, Μ, Ι, (1998), *Εισαγωγή στην ψυχοπαιδαγωγική έρευνα και μεθοδολογία*, Αθήνα:Εκδόσεις Γρηγόρης, σ. 230

[2] Βάμβουκας, Μ, Ι, ό.π., σ. 194- 195

[3] Cohen, L & Manion L, (2000) *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας,* 4η έκδοση, Αθήνα: Μεταίχμιο, σ. 373

Στον άξονα αυτό μας ενδιέφερε κατά πόσο οι ερωτώμενες είχαν θετική ή αρνητική στάση απέναντι στα μαθηματικά, όταν οι ίδιες ήταν μαθήτριες καθώς και τώρα ως εκπαιδευτικοί.

- προσωπική στάση απέναντι στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών

Εδώ διερευνήθηκαν οι απόψεις τους για τα μαθηματικά ως γνωστικό αντικείμενο και για τους τρόπους που τα μαθηματικά διδάσκονται και μαθαίνονται αποτελεσματικά.

- τρόπος διδασκαλίας των μαθηματικών

Με κατάλληλες ερωτήσεις προσπαθήσαμε να ανιχνεύσουμε τον τρόπο που οι δασκάλες περιγράφουν τη διδασκαλία τους στα μαθηματικά. Για αυτό το πεδίο αντλήσαμε επίσης πλούσιο υλικό και από την παρατήρηση των τάξεων, όπως θα αναφέρουμε και στη συνέχεια.

- Χρήση του υλικού στη διδασκαλία

Προσπαθήσαμε να δούμε πως οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν γενικά το υλικό(βιβλία, εποπτικά μέσα, πίνακα κ.α.) στη διδασκαλία τους, τι επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν και πως κάνουν αυτές τις επιλογές τους

- Εμπειρία στη χρήση πρόσθετου υλικού/προαιρετικών προγραμμάτων κ.α.

Ρωτήσαμε αν οι εκπαιδευτικοί έχουν πάρει μέρος σε προγράμματα περιβαλλοντικής εκπαίδευσης, το πρόγραμμα Μελίνα και άλλα εναλλακτικά προγράμματα και ποια είναι η εμπειρία τους από αυτά.

Και οι 3 συνεντεύξεις ηχογραφήθηκαν και στη συνέχεια απομαγνητοφωνήθηκαν.

7.2.2.Παρατήρηση των τάξεων

Η παρατήρηση των τάξεων επιλέχθηκε ως μέθοδος συμπληρωματική της συνέντευξης σε μια προσπάθεια να βοηθήσει στην αξιοπιστία της έρευνας.

Από την παρατήρηση αναμέναμε να μας βοηθήσει να πάρουμε απαντήσεις στα ερωτήματα σχετικά με τον τρόπο της διεξαγωγής της διδασκαλίας στα μαθηματικά. Η παρατήρηση στη βιβλιογραφία προτείνεται ως τρόπος για να παρακολουθήσουμε από κοντά διαδικασίες[4], όπως είναι η διεξαγωγή μιας διδασκαλίας. Επίσης επιλέχθηκε για να μας βοηθήσει να δούμε πως λειτουργούν στην πράξη όσα δηλώθηκαν στη συνέντευξη.

Παρατηρήσαμε δύο διδασκαλίες μαθηματικών σε κάθε τάξη. Η αρχική μας πρόταση να βιντεοσκοπηθούν οι διδασκαλίες αντιμετωπίστηκε με επιφύλαξη από τις δασκάλες που δήλωσαν ότι θα αισθάνονταν άβολα και πίστευαν ότι η ύπαρξη της κάμερας θα επηρέαζε σημαντικά τη διδασκαλία. Έτσι σεβαστήκαμε αυτό το αίτημα και οι διδασκαλίες ηχογραφήθηκαν και ταυτόχρονα κρατούσαμε πρωτόκολλο παρατήρησης. Μετά το τέλος κάθε διδασκαλίας απομαγνητοφωνούσαμε τις διδασκαλίες και συνδυάζαμε τις μη λεκτικές συμπεριφορές που εμφανίζονταν στα κείμενα των παρατηρήσεων.

7.2.3.Συνέντευξη των μαθητών

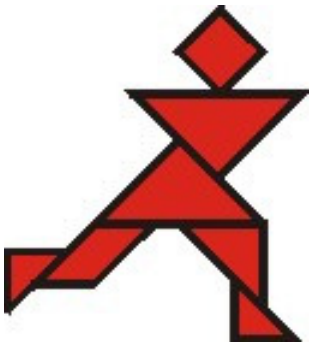
Οι μαθητές κάθε τμήματος εξετάστηκαν σε κάποιες βασικές δεξιότητες στη γεωμετρία με ατομικές συνεντεύξεις. Οι συνεντεύξεις αυτές έγιναν στο χώρο του σχολείου σε ένα ειδικά διαμορφωμένο ήσυχο χώρο, όπου είχαμε συγκεντρώσει όλα τα απαραίτητα υλικά. Οι μαθητές προσέρχονταν ένας ένας και εκτελούσαν τα διάφορα έργα που τους αναθέταμε. Συνολικά εξετάσαμε 66 μαθητές, 32 αγόρια και 34 κορίτσια από τις τρεις τάξεις. Το πρώτο τμήμα είχε 24 μαθητές το δεύτερο και το τρίτο από 21 μαθητές το καθένα.

Από μεθοδολογικής άποψης η προσωπική συνέντευξη προτιμήθηκε έναντι του ερωτηματολογίου για πολλούς λόγους. Αρχικά πιστεύουμε ότι

[4] Φίλιας, Β,(1998) (εποπ.) Εισαγωγή Στη Μεθοδολογία Και Τις Τεχνικές Των Κοινωνικών Ερευνών, Αθήνα : GUTENBERG, σ.97-98

έχοντας προσωπική επαφή με τον κάθε μαθητή μπορούμε να συλλέξουμε δεδομένα που θα «χάνονταν σε ένα ερωτηματολόγιο». Με δεδομένο δηλαδή ότι στην εξέταση αυτή δεν μας ενδιέφερε μόνο το αποτέλεσμα αλλά και όλη η διαδικασία μέσω της οποίας τα παιδιά φτάνουν σε αυτό, με τα ενδεχόμενα λάθη τους δισταγμούς και τις διορθώσεις τους η συνέντευξη μας παρείχε την ευκαιρία για κάτι τέτοιο. Έπειτα ο χρόνος που οι μαθητές χρειάστηκαν για να φέρουν σε πέρας την κάθε δραστηριότητα καθώς και οι αντιδράσεις τους, ήταν στοιχεία αδύνατα να παρατηρηθούν σε ένα ερωτηματολόγιο.

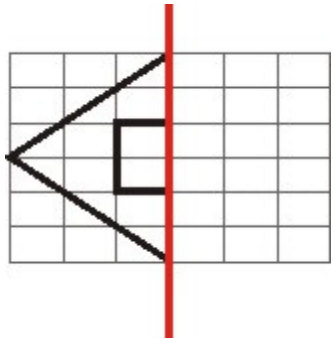
7.2.3.1.Περιγραφή των δραστηριοτήτων της συνέντευξης



Η πρώτη δραστηριότητα αφορούσε το τάγκραμ. Δόθηκε σε κάθε παιδί μια κόλλα Α4 με σχηματισμένη επάνω την φιγούρα ενός ανθρώπου με τα κομμάτια του τάγκραμ, όπως φαίνεται δίπλα. Στη συνέχεια η ερευνήτρια τους ζητούσε να την παρατηρήσουν και παρέχοντας τους ένα σετ κομματιών, τους ζητούσε να την επαναλάβουν. Το μέγεθος των σχημάτων που χειρίζονταν οι μαθητές και του προτύπου που τους δινόταν ήταν ακριβώς το ίδιο, όπως και το χρώμα. Αρχικά ζητήθηκε από τους μαθητές να κατασκευάσουν τη φιγούρα. Μόλις δήλωναν ότι τελείωσαν τους ζητούσαμε να ξαναδούν τα δυο σχέδια και μας πουν αν είναι εντάξει. Αν εντόπιζαν κάποιο λάθος, τους παροτρύναμε να το διορθώσουν. Αν θεωρούσαν ότι όλα είναι σωστά, συνεχίζαμε με την επόμενη δραστηριότητα.

Η δεύτερη δραστηριότητα ήταν σχετική με τα μοτίβα. Παρουσιάζονταν στους μαθητές τα δύο κοσμήματα που φαίνονται στο διπλανό σχήμα, οι χάντρες των οποίων ακολουθούσαν μια πρότυπη σειρά και τους ζητούσαμε αφού ανακαλύψουν τη λογική της επανάληψης να

συνεχίζουν, ζωγραφίζοντας δίπλα την επόμενη χάντρα. Το πρώτο μοτίβο ήταν της μορφής Α-Β-Β-Α-Β-Β… και το δεύτερο συνθετότερο της μορφής Α-Β-Γ-Β-Α-Β-Γ-Β…..



Η τρίτη δραστηριότητα είχε σχέση με τη συμμετρία. Δόθηκε στους μαθητές το μισό ενός σχεδίου από κάποιο χαλί πάνω σε τετραγωνισμένο χαρτί, όπως δείχνει η διπλανή εικόνα. Λέγαμε στον κάθε μαθητή να φανταστεί ότι τοποθετεί ένα καθρέφτη κατά μήκος της κόκκινης γραμμής. Στη συνέχεια του ζητούσαμε να φανταστεί το σχέδιο που θα έβλεπε να εμφανίζεται στον καθρέφτη και να το σχεδιάσει δίπλα. Η χρήση του τετραγωνισμένου χαρτιού έγινε για να διευκολυνθεί η χάραξη. Αφού σχεδίαζε αυτό που φανταζόταν, το δίναμε έναν καθρέφτη, τον τοποθετούσε στην κόκκινη γραμμή και έβλεπε το συμμετρικό του σχήματος. Μετά του ζητούσαμε να αποφανθεί, αν το σκίτσο που έφτιαξε είναι σωστό ή όχι. Αν θεωρούσε ότι ήταν σωστό η δραστηριότητα τερματίζονταν, ανεξάρτητα από το αν ήταν πραγματικά σωστή. Αν θεωρούσε ότι αυτό που σχεδίασε ήταν λάθος, το ρωτούσαμε αν μπορεί να το διορθώσει σβήνοντας και ξανασχεδιάζοντάς το. (Εμείς κρατούσαμε αντίγραφο και του αρχικού και του τελικού σχεδίου, προκείμενου να μπορούμε να κάνουμε τη σύγκριση). Υπήρχαν ορισμένοι μαθητές που σε αυτήν τη δραστηριότητα δήλωναν ότι δεν μπορούν αρχικά να φανταστούν τι θα έβλεπαν στον καθρέφτη. Αφού τους παροτρύναμε να προσπαθήσουν κάποιοι αποπειράθηκαν και κάποιοι άλλοι ήταν κατηγορηματικοί. Σε αυτούς της τελευταίας κατηγορίας δώσαμε καθρέφτες και στη συνέχεια δοκίμασαν να σχεδιάσουν τα συμμετρικά σχήματα.

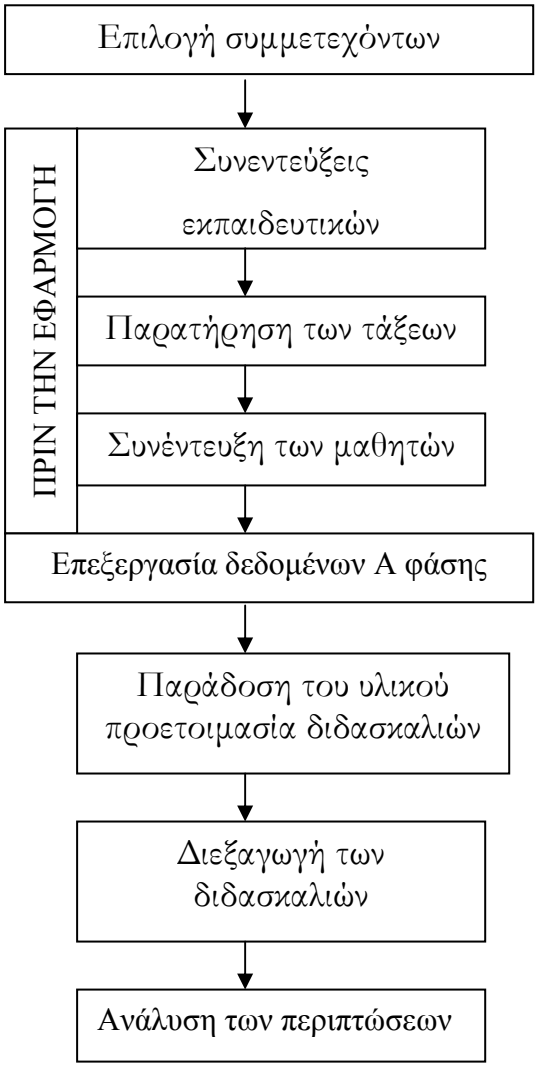
7.2.4.Παράδοση του υλικού στις δασκάλες-προετοιμασία διδασκαλιών

Παραδώσαμε το ντοσιέ και τα συμπληρωματικά υλικά στις δασκάλες και συζητήσαμε μαζί τους για την προετοιμασία δύο διδασκαλιών στη γεωμετρία για τις οποίες θα χρησιμοποιήσουν το υλικό που τους δώσαμε.
Αρχικά προτείναμε στις δύο έμπειρες εκπαιδευτικούς να προετοιμάσουν δύο διδασκαλίες πάνω στη συμμετρία και τα μοτίβα, δύο περιοχές που περιλαμβάνονταν στο πρόγραμμα σπουδών της μία τάξης , αλλά όχι στο πρόγραμμα της άλλης που ακολουθούσε το υφιστάμενο σχολικό εγχειρίδιο. Τελικά μετά από συζήτηση μαζί τους αποφασίσαμε η πρώτη δασκάλα να ετοιμάσει μια διδασκαλία πάνω στη συμμετρία και μια πάνω στα μοτίβα, η δεύτερη να ετοιμάσει μια πάνω στη συμμετρία και μια στα γεωμετρικά σχήματα, περιεχόμενο που υπήρχε και στα βιβλία που χρησιμοποιούσε και η υποψήφια εκπαιδευτικός να ετοιμάσει μια διδασκαλία σχετική με τα μοτίβα.
Αφήσαμε στις δασκάλες αρκετό χρονικό διάστημα να μελετήσουν το υλικό και να σχεδιάσουν τις διδασκαλίες τους. Στη συνέχεια συναντηθήκαμε εκ νέου με την καθεμιά από αυτές και τους ζητήσαμε να μας πουν τι περίπου σκέφτονται να κάνουν, τι υλικό θα χρησιμοποιήσουν και πως σχεδιάζουν τη διδασκαλία τους. Αφού φροντίσαμε να έχουν όλα τα υλικά που απαιτούνταν για αυτό που είχαν σχεδιάσει, κανονίσαμε τις ημερομηνίες που θα διεξάγονταν οι διδασκαλίες. Για τη φοιτήτρια ο σχεδιασμός μιας διδασκαλίας ήταν μια αρκετά γνώριμη διαδικασία και χρειάστηκε το λιγότερο χρόνο από όλους για να μελετήσει το πακέτο και να ετοιμάσει τη διδασκαλία της. Η δασκάλα που δίδασκε με το παρόν βιβλίο από την άλλη πλευρά, δυσκολεύτηκε αρκετά στο να σχεδιάσει διδασκαλίες βασισμένη σε αυτό το υλικό. Για αυτόν το λόγο κάναμε επιπλέον συναντήσεις μαζί της και της δώσαμε να μελετήσει επιπλέον τις ενότητες γεωμετρίας από τα μαθηματικά της φύσης και της ζωής προκειμένου να έρθει σε επαφή με τις νέες τάσεις στη διδασκαλία της

γεωμετρίας και να πάρει μια γεύση από τον τρόπο διδασκαλίας και τα νέα περιεχόμενα που εισάγονται.

7.2.5.Διεξαγωγή των διδασκαλιών

Οι διδασκαλίες που υλοποιήθηκαν από τις 3 εκπαιδευτικούς παρατηρήθηκαν από την ερευνήτρια, η οποία κρατούσε σημειώσεις. Επιλέξαμε και πάλι να μη βιντεοσκοπηθούν οι διδασκαλίες για τους λόγους που εξηγήσαμε και προηγούμενα, αλλά τις ηχογραφήσαμε. Μετά το τέλος κάθε διδασκαλίας απομαγνητοφωνούσαμε τις διδασκαλίες και συνδυάζαμε τις μη λεκτικές συμπεριφορές που εμφανίζονταν στα κείμενα των παρατηρήσεων.
Στο σχήμα που ακολουθεί παρουσιάζεται συνοπτικά η πορεία της έρευνας.



8.Ανάλυση των περιπτώσεων

8.1.Περίπτωση Α'

8.1.1.Η δασκάλα

Η δασκάλα αυτή έχει 23 χρόνια υπηρεσίας. Δουλεύει στο ίδιο σχολείο7 χρόνια και διδάσκει στη συγκεκριμένη τάξη από την πρώτη (εδώ και 3 χρόνια). Τα τελευταία χρόνια χρησιμοποιεί το νέο υλικό των Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής και είναι αρκετά έμπειρη στο χειρισμό του.

Η ίδια δηλώνει ότι έχει μια πολύ θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά, από την εποχή που η ίδια ήταν μαθήτρια έως και τώρα. Τα μαθηματικά μαζί με τη γλώσσα είναι τα αγαπημένα της μαθήματα και δηλώνει πως απολαμβάνει να τα διδάσκει. Θεωρεί πολύ σημαντικό στοιχεία σε μια διδασκαλία, την ύπαρξη ξεκάθαρων στόχων και την ενεργό συμμετοχή των μαθητών που επιτυγχάνεται κυρίως με τη δημιουργία κινήτρων στους μαθητές.

γιατί το παιδί για να μάθει πρέπει να έχει κίνητρα. Αν δεν έχω κίνητρο δε μαθαίνω. Και μαθαίνω πως; Όταν οι γνώσεις μου δεν είναι ξερές γνώσεις ξεκομμένες, αλλά είναι πράγματα που ζω. Άλλο η σκέψη να συνδέεται πάνω σε βίωμα και δράση και άλλο ξεκομμένη σκέψη.

Το νέο υλικό είναι αρκετά συμβατό με την αντίληψη της για τη διδασκαλία των μαθηματικών και η ίδια. Στη συνέντευξή της αναφέρει πως και πριν αρχίσει να δουλεύει με αυτό είχε έναν τρόπο διδασκαλίας πολύ κοντά σε αυτόν που έχει και τώρα. Απλά με ο νέο υλικό ο τρόπος αυτός συστηματοποιήθηκε και η ίδια διευκολύνθηκε αρκετά στο να βρίσκει υλικό και ιδέες.

Διδάσκει αρκετά μαθητοκεντρικά. Χρησιμοποιεί την ομαδοσυνεργατική μορφή διδασκαλίας αρκετά συχνά, αλλά, αν χρειάζεται, εναλλάσσει τις μορφές. Στις διδασκαλίες που παρακολουθήσαμε είδαμε πολλές φορές τους μαθητές να εργάζονται σε ομάδες.

Στην προετοιμασία της διδασκαλίας της δηλώνει ότι εστιάζει στους στόχους τού μαθήματος και κινείται με βάση αυτούς Στην αρχή του μαθήματος, όπως λέει, κάνει τις εισαγωγικές δραστηριότητες που προτείνονται από το βιβλίο και στη συνέχεια επιλεκτικά κάποιες ασκήσεις. Θεωρεί τις εισαγωγικές δραστηριότητες αναπόσπαστο μέρος της διδασκαλίας και πιστεύει ότι πρέπει να είναι ουσιαστικές και όχι να στοχεύουν απλά στον εντυπωσιασμό, όπως θα μπορούσε να πιστέψει κάποιος.

Πρέπει να δω τι έχω να διδάξω, κάθε μάθημα έχει κάποιους στόχους. Πρέπει να καταλάβουν τα παιδιά, να επιστήσω την προσοχή μου… Οπότε εστιάζω, βρίσκω τους στόχους του μαθήματος και προσπαθώ να δω πως θα γίνει το μάθημα πιο ευχάριστο για τα παιδιά.

Διδάσκει αρκετά διαθεματικά και την ενδιαφέρει να συνδέει τα μαθηματικά με την καθημερινότητα. Σε μια από τις διδασκαλίες που παρακολουθήσαμε σχετική με τα κλάσματα, στην ώρα της ευέλικτης ζώνης, έφερε στους μαθητές μια συνταγή για αλμυρό ζυμάρι, κατάλληλο για χειροτεχνία, όπου οι ποσότητες του νερού, των χρωμάτων και των άλλων υλικών αναφέρονταν με κλασματικούς αριθμούς. Έδωσε στις ομάδες των μαθητών τα υλικά και δοσομετρητές και τους ζήτησε να φτιάξουν το ζυμάρι. Στη συνέχεια με αυτό έφτιαξαν διάφορα στολίδια.

Προσπαθεί στη διδασκαλία να προβληματίσει τους μαθητές της και τους προσφέρει ενθάρρυνση όταν εκφράζουν τις απόψεις τους, χωρίς να «βιάζεται» να φτάσει στην τελική απάντηση. Ας δούμε ένα απόσπασμα από τη διδασκαλία:

(Η δασκάλα αναθέτει στους μαθητές να τραβήξουν τους άξονες συμμετρίας κάποιων σχημάτων. Στη διάρκεια της εργασίας τους περνάει από τα θρανία και τους ενθαρρύνει. Κάποιοι μαθητές συνεργάζονται μεταξύ τους στις ομάδες. Μόλις τελειώσουν τους ρωτάει)

Δ: *πόσους άξονες συμμετρίας έχει ο κύκλος;*

Μ: *έναν*

Μ: *δύο*

Μ: *πέντε*

Δ: *ωραία κάποια ομάδα έφερε έναν κάποιοι δύο κάποιοι πέντε; Πόσους άξονες μπορώ να φέρω στον κύκλο;*

Μ: *Τέσσερις*

Μ: *Οχτώ*

Δ: *Εσύ λες οχτώ. Κάποιος άλλος;*

Μ: *Δώδεκα.*

Δ: *Μπορώ και περισσότερους από δώδεκα;*

Μ: *Ναι, μπορούμε όσους θέλουμε.*

Δ: *Α! ωραία όσους θέλουμε, πόσους δηλαδή;*

Μ: *Κυρία, αμέτρητους μπορούμε.*

Δ: *Πολύ ωραία αμέτρητους και στα μαθηματικά τους αμέτρητους μπορούμε να τους πούμε και άπειρους.*

Αντιμετώπιζε τα λάθη των μαθητών ως μια ευκαιρία να εντοπίσει τα σημεία που δεν κατανόησε κάποιος και αφήνει τους υπόλοιπους μαθητές να εξηγήσουν πως σκέφτηκαν, παρά να δώσει η ίδια έναν τρόπο.

Δ: *Σαράντα φορές το δύο; Σταύρο;*

Μ: *Δεν μπορώ*

Δ: *Για κάνε μια προσπάθεια πως θα το σκεφτείς για πες μου*

Μ: *(Σκέφτεται για λίγο) …Ογδόντα δύο…*

Δ: *Συμφωνείτε παιδιά;*

Μ: *Όχι*

Δ: *Εσύ τι λες Μαριάνθη;*

Μ: *Σκέφτηκα τέσσερις φορές το δύο οχτώ, βάζω και το μηδέν και γίνεται ογδόντα.*

Δ: *Αααα! Πολύ ωραία Μαριάνθη. Άλλος τρόπος;*

Μ: *Κυρία σαράντα φορές το δύο είναι δυο φορές το σαράντα. Σαράντα και σαράντα ογδόντα*

Δ: *Πολύ ωραία. Εσύ Σταύρο που μπερδεύτηκες για να δούμε; Πες μας πως σκέφτηκες.*

Μ: *Είπα δύο φορές το 4 οχτώ δηλαδή ογδόντα βάζω και το δύο…. Αλλά το δύο δεν ξαναμπαίνει.*

Δ: Α! *Κατάλαβες που μπερδεύτηκες*

Μ: *Ναι,ναι*

Δ: *Για πες μας πόσο κάνει 30 φορές το 3*

Μ: *30φορές το 3 … ενενήντα*

Δ: *Μπράβο Σταύρο, το κατάλαβες!*

8.1.2.Οι μαθητές

Η τάξη έχει 24 μαθητές, 12 αγόρια και 12 κορίτσια. Οι μαθητές της τάξης γενικά έχουν μια θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά. Στις συνεντεύξεις τους δήλωσαν είτε έντονη είτε μέτρια συμπάθεια για το μάθημα. Η δασκάλα της τάξης στη συνέντευξή της είπε πως πιστεύει πως 3-4 παιδιά δε συμπαθούν ιδιαίτερα τα μαθηματικά.

Όσο αφορά την επίδοσή τους σε κάποιες βασικές γεωμετρικές έννοιες που εξετάσαμε φαίνεται να επιβεβαιώνεται αυτό που δήλωσε στη συνέντευξή της η δασκάλα της τάξης ότι 4-5 παιδιά δεν τα καταφέρνουν τόσο καλά. Ας δούμε τις επιμέρους δραστηριότητες αναλυτικά

Το τάγκραμ περισσότεροι από τους μισούς μαθητές το φτιάχνουν σωστά με την πρώτη δοκιμή και άλλοι 4 φτιάχνουν μια φιγούρα που καταλαβαίνουν ότι είναι λάθος και τη διορθώνουν μόνοι τους. Συνολικά δηλαδή ένα ποσοστό περίπου 83% των μαθητών στο τέλος έχει παρουσιάσει ένα σωστό αποτέλεσμα. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν και οι δηλώσεις αρκετών

μαθητών (καταγράφηκαν 12 τέτοιες δηλώσεις) ότι το τάγκραμ τους αρέσει πολύ και έχουν στο σπίτι τους ένα παρόμοιο με το οποίο παίζουν με τους γονείς ή τα αδέλφια τους.

ΤΑΓΚΡΑΜ				
	χωρίς λάθη	με λάθη που διορθώνει μόνος/η	με λάθη	Σύνολο
Αριθμός παιδιών	16	4	4	24
ποσοστό	66,7%	16,7%	16,7%	100,0%

Στο πρώτο μοτίβο, που είναι απλούστερο, όλοι οι μαθητές απαντούν σωστά. Στο δεύτερο που είναι αρκετά πιο σύνθετο 22 από τους 24 μαθητές της τάξης απαντούν σωστά(91,7%), ενώ 2 απαντούν λάθος.

Στη δραστηριότητα σχετικά με τη συμμετρία οι περισσότεροι μαθητές τα καταφέρνουν καλά από την αρχή, χωρίς να χρησιμοποιήσουν τον καθρέφτη. Είναι χαρακτηριστικό ότι, όταν τους ρωτήσαμε στη συνέντευξη, αν θέλουν να χρησιμοποιήσουν τον καθρέφτη για να επιβεβαιώσουν το αποτέλεσμα 5 παιδιά μας απάντησαν: δε χρειάζεται είμαι σίγουρος/η. Από τους υπόλοιπους μαθητές τώρα, δύο μπερδεύονται στον προσανατολισμό του σχήματος σχεδιάζοντας ο δηλαδή στην αντίθετη κατεύθυνση, σα να είχαμε μετατόπιση και όχι ανάκλαση π.χ. << αντί για <>. Μόλις όμως τοποθετούν τον καθρέφτη καταλαβαίνουν το λάθος τους και το διορθώνουν μόνοι τους. 5 μαθητές σχεδιάζουν αρχικά το σχήμα με σωστό προσανατολισμό, αλλά λάθος μέγεθος, το κάνουν δηλαδή μικρότερο από ότι το σχήμα που τους δίνεται. Αφού δοκιμάσουν και με τον καθρέφτη, δε θεωρούν ότι αυτό που σχεδίασαν είναι λάθος και επιλέγουν να το αφήσουν ως έχει.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ				
σωστά χωρίς καθρέφτη	με λάθη προσανατολισμού που διορθώνει με τον καθρέφτη	με λάθη προσανατολισμού και μετά τη χρήση καθρέφτη	με λάθη μεγέθους και μετά τη χρήση καθρέφτη	Σύνολο
18	2	-	4	24

8.1.3.Διδασκαλία με το εκπαιδευτικό πακέτο «γεωμετρία από όλο τον κόσμο»

1^{Η} ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ: Συμμετρία

Περιγραφή της Διδασκαλίας.

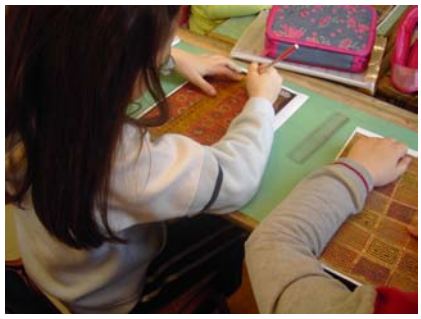
Εισαγωγική δραστηριότητα

Η δασκάλα δίνει στους μαθητές ανά δύο έναν καθρέφτη και τους ζητά να παρατηρήσουν ένα αντικείμενο που έχουν μπροστά τους. (Π.χ. μολύβι). Μέσα από συζήτηση καταλήγουν στον όρο συμμετρία.

Δεύτερη δραστηριότητα

Στη συνέχεια η δασκάλα δίνει ανά δύο μαθητές μια διαφάνεια που πάνω υπάρχει ένα σχήμα συμμετρικό και ένα μη συμμετρικό. Τους ζητάει να διπλώσουν για να εντοπίσουν τη συμμετρία. Μετά από συζήτηση καταλήγουν στον όρο άξονας συμμετρίας.

Τρίτη δραστηριότητα



Στη συνέχεια δίνει σε κάθε ομάδα παιδιών μια φωτοτυπία παραδοσιακού χαλιού και τους ζητάει να εντοπίσουν αν είναι συμμετρικό και να χαράξουν τον άξονα συμμετρίας. Αφού ολοκληρώσουν οι ομάδες παρουσιάζουν τη δουλειά τους.

Τέταρτη δραστηριότητα

Οι ομάδες μιλούν και για επιμέρους σχήματα που είδαν στα χαλιά τους. Συζητούν για το αν τα γεωμετρικά σχήματα είναι συμμετρικά και η δασκάλα δίνει μια κόλλα χαρτιού με σχεδιασμένα δύο γεωμετρικά σχήματα, ζητώντας από τις ομάδες να χαράξουν άξονες συμμετρίας. Μέσα από τη συζήτηση

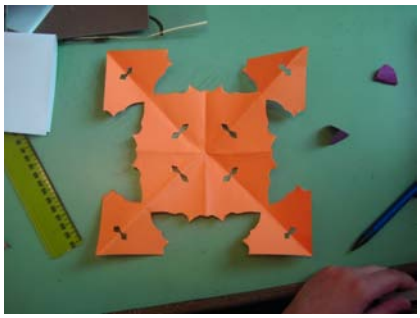
προκύπτει ότι κάποια σχήματα έχουν περισσότερους από έναν άξονα συμμετρίας.

Πέμπτη δραστηριότητα

Η δασκάλα δίνει στους μαθητές μια σελίδα τετραγωνισμένου χαρτιού και αυτοί σχεδιάζουν επάνω ένα συμμετρικό σχήμα που μπορεί να είναι εμπνευσμένο από τα χαλιά που είδαν προηγουμένως.

Έκτη δραστηριότητα.

Με την τεχνική κιριγκάμι που προτείνεται στο εκπαιδευτικό υλικό, οι μαθητές με διπλώσεις και κοψίματα δημιουργούν συμμετρικά σχήματα σε χρωματιστό χαρτί. Στη συνέχεια τα ανοίγουν, παρατηρούν τη συμμετρία και μιλούν για αυτή.



Ανάλυση της διδασκαλίας

Επιλογή περιεχομένων

Η δασκάλα επιλέγει διαφορετικά περιεχόμενα, όπως είναι τα χαλιά και το κιριγκάμι για να διδάξει τη συμμετρία. Κατά τη διδασκαλία της εναλλάσσει εύκολα δραστηριότητες που έχουν μια εθνομαθηματική λογική και καθαρά μαθηματικές δραστηριότητες. Εκτός από τις ιδέες για τα περιεχόμενα αντλεί από το εκπαιδευτικό μας πακέτο και ιδέες για τα μέσα τα οποία προσφέρονται για τη διδασκαλία της συμμετρίας. Επιλέγει μια πληθώρα δραστηριοτήτων διαφορετικού χαρακτήρα. Αρχικά η μαθητές εντοπίζουν τη συμμετρία σε ήδη υπάρχοντα σχήματα και στις δύο τελευταίες δραστηριότητες αφήνει περιθώρια στους μαθητές για προσωπική έκφραση και για τη δημιουργία δικών τους πρωτότυπων έργων.

Διδακτική μεθοδολογία

Στις δύο πρώτες δραστηριότητες επιλέγει η διδασκαλία να έχει ένα διερευνητικό χαρακτήρα και αφήνει χώρο στους μαθητές να πειραματιστούν και να εκφράσουν τις παρατηρήσεις τους. Σε κάποιες εργασίες οι μαθητές δουλεύουν ομαδικά σε κάποιες εταιρικά και σε άλλες μόνοι τους. Γενικά ο λόγος των μαθητών φαίνεται να κυριαρχεί στο μάθημα. Οι μαθητές συζητούν μεταξύ τους στις ομάδες και συγκρίνουν αυτά που έφτιαξαν.

2^{Η} ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ:Μοτίβα

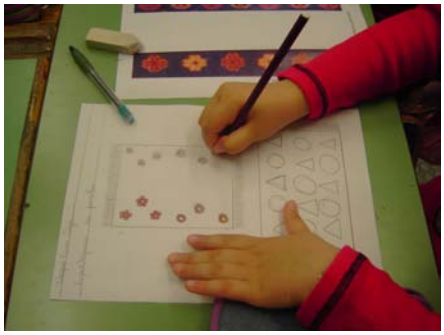
Περιγραφή της διδασκαλίας

Εισαγωγική δραστηριότητα

Η δασκάλα δίνει στους μαθητές μια φωτοτυπία με μοτίβα από παραδοσιακά χαλιά και συζητούν για το που αλλού βρίσκουν μοτίβα στο σπίτι(κουρτίνες, χαλιά, τραπεζομάντιλα). Στη συνέχεια τους δείχνει μοτίβα από παραδοσιακές φορεσιές και συζητούν για το αν έχουν δει στην πραγματικότητα τέτοια μοτίβα.

Δεύτερη δραστηριότητα

Στη συνέχεια η δασκάλα τους δίνει μισοτελειωμένα μοτίβα από χαλιά και τους ζητά να τα συμπληρώσουν.



Τρίτη δραστηριότητα

Η δασκάλα δίνει σειρές μοτίβων και οι μαθητές αφού τις μελετήσουν στην ομάδα μιλούν για την κανονικότητα με την οποία επαναλαμβάνονται.

Τετάρτη δραστηριότητα

Η δασκάλα μοιράζει στις ομάδες των μαθητών φωτοτυπίες από παραδοσιακές ποδιές. Τις παρατηρούν και συζητούν για τα μοτίβα που υπάρχουν πάνω σε αυτές. Στη συνέχεια οι μαθητές δημιουργούν ο καθένας τη δική του ποδιά.

Πέμπτη δραστηριότητα

Η δασκάλα μοιράζει στις ομάδες των φοιτητών πηλό σε διάφορα χρώματα και τους ζητά να φτιάξουν μια βάση χαλιού και να τις διακοσμήσουν με χρωματιστά μοτίβα.

Ανάλυση της διδασκαλίας

Επιλογή περιεχομένων

Και πάλι η δασκάλα διαλέγει περιεχόμενα από διαφορετικά πλαίσια. Αυτή τη φορά μένει πιο κοντά στην εθνομαθηματική προσέγγιση και επιλέγει δραστηριότητες πλαισιωμένες.
Στην αρχή και πάλι επιλέγει πιο κλειστές δραστηριότητες και στη συνέχεια πιο ανοιχτές με δημιουργία έργων από τους μαθητές.

Διδακτική μεθοδολογία

Οι μορφές εργασίας εναλλάσσονται. Οι μαθητές δουλεύουν κυρίως ομαδικά, αλλά σε μερικές δραστηριότητες και ατομικά. Στην τάξη ο διάλογος είναι πολύ συχνός και πολλά από τα ερωτήματα των παιδιών ή και τα λάθη τους δεν προσπερνιούνται, αλλά συζήτιουνται σε βάθος. Η δασκάλα αφήνει και πάλι χώρος στους μαθητές να εκφραστούν και χειρίζεται πολύ επιδέξια τη συζήτηση για να φτάσει εκεί που θέλει. Η εισαγωγική δραστηριότητα έχει και πάλι διερευνητικό χαρακτήρα και οδηγεί σε πλούσια συζήτηση.

Γενικά και στις δύο διδασκαλίες η δασκάλα χειρίστηκε με άνεση το πακέτο, και η ημιδομημένη του μορφή της άφησε περιθώριο να αναπτύξει ενδιαφέρουσες δραστηριότητες. Ο τρόπος εργασίας της τάξης δε φαίνεται να άλλαξε ιδιαίτερα σε ότι αφορά τη μεθοδολογία, αλλά μάλλον εμπλουτίστηκε σε υλικό και ιδέες. Η ίδια δήλωσε πολύ ικανοποιημένη από το υλικό και προτίθεται να το χρησιμοποιήσει και στο μέλλον.

8.2. Περίπτωση Β

*8.2.1.*Η δασκάλα

Η δασκάλα του δεύτερου σχολείου έχει 27 χρόνια υπηρεσίας και βρίσκεται 13 χρόνια στο ίδιο σχολείο. Διδάσκει στη συγκεκριμένη τάξη μόνο τη φετινή χρονιά, για αυτό και εκφράζει επιφυλακτικότητα κάθε φορά που μιλάει για τους μαθητές της τάξης της. Διδάσκει με τα υπάρχοντα εγχειρίδια των μαθηματικών και γενικά προτιμά τις μεγάλες τάξεις.

Η ίδια δηλώνει ότι τις αρέσει να διδάσκει μαθηματικά, αλλά πιο πολύ γλώσσα. Ως μαθήτρια η ίδια δηλώνει πως δεν αντιμετώπιζε πρόβλημα με τα μαθηματικά. Θεωρεί την τάξη της γενικά καλή σε όλα τα μαθήματα και στα μαθηματικά. Πιστεύει πως μια καλή διδασκαλία μαθηματικών κρίνεται από τη εκπλήρωση των στόχων της και από την κατανόηση του νέου γνωστικού αντικειμένου από τους μαθητές.

Από την στιγμή που θα ξεκινήσει και θα το παρουσιάσει, εξαρτάται από τη μεταδοτικότητα που θα έχει πως θα το παρουσιάσει και τι θα πάρουν τα παιδιά

Αν το πήραν, τα παιδιά, νομίζω πως είναι καλή.

Η ίδια διδάσκει αρκετά δασκαλοκεντρικά. Χρησιμοποιεί εποπτικό υλικό, το οποίο χειρίζεται η ίδια. Όπως περιγράφει:

Μπαίνω μες στην τάξη και το διδάσκω εγώ.. πρώτα το παραδίδω, χρησιμοποιώ εποπτικό υλικό, στον πίνακα, εξηγώ στον πίνακα, κάνω παραδείγματα… ότι θέλει και μετά μπαίνουμε στο βιβλίο.

Κάποιες φορές εισάγει τη νέα έννοια με κάποια αφόρμηση, που δε φαίνεται όπως να δίνει ιδιαίτερο λόγο στους μαθητές.

Ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα που δηλώνει πως αντιμετωπίζει είναι η ύλη. Για αυτό επιλέγει να ξεκινά τη διδασκαλία νωρίτερα από την περίοδο που εμφανίζεται στα βιβλία. Θεωρεί ότι με την επανάληψη πετυχαίνεται καλύτερη μάθηση.

Για παράδειγμα τώρα πρέπει να μάθουνε… έχω αρχίσει από την αρχή της χρονιάς… τη διαίρεση με βάση τον πολλαπλασιασμό και λοιπά, τα γράφουν τα ξαναγράφουν τα λέμε τα ξανάλεμε, γιατί πρέπει να τα μάθουν

Η διδασκαλίες που παρακολουθήσαμε εμείς ήταν μετωπικές. Όπως είπε η δασκάλα στη συνέντευξή της τη φετινή χρονιά δεν οργάνωσε ομάδες, ενώ άλλες χρονιές που είχε μεγαλύτερες τάξεις, οι μαθητές δούλευαν πολλές φορές και εταιρικά.

Αυτό που γίνεται κατά κύριο λόγο στη διάρκεια της διδασκαλίας σηκώνεται έναν μαθητής στον πίνακα και ένας άλλος του διαβάζει το πρόβλημα. Ταυτόχρονα η δασκάλα αποκωδικοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος, επαναλαμβάνοντας τα βασικά στοιχεία. Ο μαθητής που είναι στον πίνακα γράφει τα βασικά αυτά στοιχεία και στη συνέχεια λύνει το πρόβλημα. Οι υπόλοιποι μαθητές παρακολουθούν από τα θρανία τους. Πολλές φορές η δασκάλα του κάνει παρατηρήσεις είτε γιατί είναι πιο μπροστά είτε πιο πίσω από τον μαθητή που είναι στον πίνακα.

Σε όλη τη διαδικασία της επίλυσης η δασκάλα έχει έναν έντονο καθοδηγητικό ρόλο. Απευθύνει ερωτήσεις στους μαθητές τις οποίες πολλές φορές απαντά η ίδια. Ας δούμε ένα χαρακτηριστικό επεισόδιο:

Δ: *Τι βρήκαμε παιδιά τα τζάμια που έχει η μία αίθουσα και αφού ξέρουμε πόσα έχει η μία. Οι έξι πόσο θα έχουνε;*

Μ*: έξι….*

Δ*: Έξι φορές το δεκαέξι Όλο το σχολείο έχει τι έχει; Δεκαέξι επί έξι.*

Μ*: Έξι φορές το έξι τριανταέξι*

Δ*: Ωραία. Γράφω λοιπόν το έξι… Γράψτο ….και κρατάω το 3. Μία φορά το έξι έξι και τα τρία που κρατήσαμε εννιά. Πόσο βρήκαμε δηλαδή;*

Μ*: Ενενήντα έξι*

Δ*: Τι είναι αυτό το 96; Τζά…;*

Μ*: Τζάμια*

Δ*: Τζάμια σωστά!*

Αφού τελειώσει με τα προβλήματά του βιβλίου δίνει και η ίδια δικά της προβλήματα τα οποία οι μαθητές γράφουν στα τετράδια τους. Για τη λύση αυτών των προβλημάτων ακολουθείται η ίδια διαδικασία. Στη συνέντευξή της η δασκάλα δηλώνει ότι ένα από τα βασικά προβλήματα που αντιμετωπίζει είναι ότι οι μαθητές δεν είναι σε θέση να διατυπώνουν τον τρόπο σκέψης τους και να εκφράζουν τις στρατηγικές που ακολούθησαν. Ωστόσο στις δύο διδασκαλίες που εμείς παρακολουθήσαμε οι μαθητές δεν είχαν την ευκαιρία να αναπτύξουν τη σκέψη τους, αφού η δασκάλα έκανε σύντομες απανωτές ερωτήσεις και συμπλήρωνε η ίδια ότι ξεκινούσαν να λένε οι μαθητές.

8.2.2.Οι μαθητές.

Η τάξη έχει 21 μαθητές 12 κορίτσια και 9 αγόρια. Σε γενικές γραμμές αντιμετωπίζουν θετικά τα μαθηματικά. Υπάρχουν 2 παιδιά που στις συνεντεύξεις δήλωσαν ότι δεν τους αρέσουν και τόσο. Η δασκάλα τους δήλωσε ότι γενικά είναι τάξη με καλές επιδόσεις. Στις συνεντεύξεις βέβαια δεν τα πήγαν τόσο καλά, αφού τα περιεχόμενα στα οποία εξετάστηκαν δεν περιλαμβάνονται

στο πρόγραμμα που ακολουθούν σε αντίθεση με τις άλλες δύο τάξεις που εξετάζουμε.

Το τάγκραμ από τους 22 μαθητές 6 καταφέρνουν να το κατασκευάσουν σωστά από την αρχή και άλλοι 6 αφού κάνουν κάποια λάθη, που διαπιστώνουν και διορθώνουν μόνοι τους. 9 μαθητές δεν τα καταφέρνουν καθόλου. Το κομμάτι που δυσκόλεψε τους περισσότερους ήταν το παραλληλόγραμμο, το οποίο αν και περιέστρεφαν δεν σκέφτηκαν να το αναποδογυρίσουν (flip). Είναι μάλιστα χαρακτηριστικό ότι κάποια παιδιά που δυσκολεύονταν πολύ, δοκίμασαν να τοποθετήσουν τα σχήματα που είχαν στα χέρια τους πάνω ακριβώς στο χαρτί με τη φιγούρα, αλλά ακόμα και σα αυτήν την περίπτωση δεν κατάφεραν να τοποθετήσουν το παραλληλόγραμμο, όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στην διπλανή εικόνα.

ΤΑΓΚΡΑΜ				
	χωρίς λάθη	με λάθη που διορθώνει	με λάθη	Σύνολο
Αριθμός μαθητών	6	6	9	21
ποσοστό	28,6%	28,6%	42,9%	100,0%

Στο πρώτο από τα δύο μοτίβα που είναι και απλούστερο από τα δύο, δύο παιδιά δεν τα κατάφεραν και συμπλήρωσαν λάθος χάντρα, ενώ στο δεύτερο 7 μαθητές δεν βρήκαν τη σωστή απάντηση. 14 μαθητές, δηλαδή τα 2/3 της τάξης, απάντησαν σωστά, παρόλο που δεν είχαν διδαχτεί ποτέ για τα μοτίβα.

Στη δραστηριότητα σχετικά με τη συμμετρία, 7 παιδιά κατάφεραν να σχεδιάσουν το σωστό χωρίς να χρησιμοποιήσουν καθρέφτη. 3 παιδιά σχεδίασαν το συμπλήρωμα με λάθος προσανατολισμό και το διόρθωσαν με τη βοήθεια του καθρέφτη, ενώ το εντυπωσιακό είναι ότι 2 μαθητές ακόμα και μετά τη χρήση καθρέφτη δε διέκριναν το λάθος προσανατολισμό του σχήματός τους. 6 μαθητές σχεδίασαν ένα σχήμα μικρότερο από το αρχικό και δεν το διόρθωσαν μετά από τη χρήση του καθρέφτη, ενώ 2 ενώ αρχικά είχαν σχεδιάσει ένα μικρότερο σχήμα, στη συνέχεια το διορθώνουν. Μια μαθήτρια

δε συμπλήρωσε αυτή την άσκηση και έτσι έχουμε αποτελέσματα για 20 από τα 21 παιδιά.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ					
	σωστά χωρίς καθρέφτη	με λάθη προσανατολισμού που διορθώνει με τον καθρέφτη	με λάθη προσανατολισμού και μετά τη χρήση καθρέφτη	με λάθη μεγέθους και μετά τη χρήση καθρέφτη	με λάθη μεγέθους που διορθώνει με τη χρήση καθρέφτη
Αριθμός παιδιών	7	3	2	6	2
Ποσοστό	35,0%	15,0%	10,0%	30,0%	10,0%

8.2.3.Διδασκαλία με το εκπαιδευτικό πακέτο «γεωμετρία από όλο τον κόσμο»

1Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ:Γεωμετρικά σχήματα

Περιγραφή της διδασκαλίας.

Εισαγωγική δραστηριότητα

Αρχικά η δασκάλα δίνει στους μαθητές ανά δύο, φωτοτυπίες παραδοσιακών και μοντέρνων χαλιών και τους ζητάει να εντοπίσουν σε αυτά γεωμετρικά σχήματα. Αφού μιλήσουν για αυτά αναφέρουν αν τα δικά τους χαλιά στο σπίτι έχουν τέτοια γεωμετρικά σχήματα.

Δεύτερη δραστηριότητα

Οι μαθητές έχουν μαζί τους μέτρα και με αυτά σχηματίζουν διάφορα είδη σχημάτων, τετράγωνα, τρίγωνα, και παραλληλόγραμμα.

Τρίτη δραστηριότητα

Στη συνέχεια η τάξη ασχολείται με τις ασκήσεις του βιβλίου. Κάποιος μαθητής διαβάζει και οι υπόλοιποι γράφουν στα βιβλία τους.

Τέταρτη δραστηριότητα

Αφού ολοκληρώσουν τις ασκήσεις η δασκάλα δίνει μια φωτοτυπία στους μαθητές και τους ζητάει να ζωγραφίσουν το δικό τους χαλί με γεωμετρικά σχήματα

Ανάλυση της διδασκαλίας

Επιλογή περιεχομένων

Η δασκάλα επιλέγει περιεχόμενα από τα εθνομαθηματικά για να ξεκινήσει και να τελειώσει η διδασκαλία της. Στην αρχή δυσκολεύτηκε πάρα πολύ να σχεδιάσει αυτή τη διδασκαλία, γιατί δεν ήξερε πώς να εντάξει αυτό το υλικό στο μάθημά του βιβλίου. Έτσι έκανε μια ασφαλή επιλογή. Να ξεκινήσει δίνοντας χαλιά για παρατήρηση και να τελειώσει με μια πιο ανοιχτή δραστηριότητα, η δημιουργία χαλιών με γεωμετρικά σχήματα από τους ίδιους τους μαθητές.

Διδακτική μεθοδολογία

Η εισαγωγική δραστηριότητα κινητοποίησε τους μαθητές οι οποίοι ενθουσιάστηκαν με τα χαλιά και άρχισαν να κάνουν παρατηρήσεις σε βάθος. Δούλεψαν εταιρικά κάτι που όπως είχε δηλώσει η ίδια η εκπαιδευτικός δε συνήθιζε μέχρι τότε σε αυτήν τη τάξη. Στη συνέχεια έφτιαξαν ο καθένας να δικά του σχήματα με το μέτρο και υπήρχε έδαφος για να γίνει μια αρκετά πλούσια συζήτηση για τα τρίγωνα που οι μαθητές παρατήρησαν ότι μπορεί να είναι πολύ διαφορετικά μεταξύ τους. Ωστόσο η δυνατότητα αυτή δεν αξιοποιήθηκε αρκετά, αφού κατά κύριο λόγο μίλησε για το θέμα αυτό η δασκάλα.

2^{Η} ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ: συμμετρία

Περιγραφή της διδασκαλίας

Εισαγωγική δραστηριότητα

Η δασκάλα έχει φέρει δυο φούστες στην τάξη. Μια απλή και μια με ασύμμετρα τελειώματα. Αρχικά διπλώνει τη μία και ρωτάει τους μαθητές τι παρατηρούν. Στη συνέχεια διπλώνει την ασύμμετρη και ρωτάει τους μαθητές τι παρατηρούν τη δεύτερη φορά. Τα παιδιά λένε ότι τη μια φορά το ένα κομμάτι πέφτει πάνω στο άλλο, ενώ στην άλλη περισσεύει. Τους λέει για τη συμμετρία και τον άξονα συμμετρίας

Δεύτερη δραστηριότητα

Στη συνέχεια δίνει στους μαθητές χαρακτηριστικά σχέδια από χαλιά και παραδοσιακές φορεσιές κομμένα στη μέση και τους ζητάει να τοποθετήσουν κατάλληλα τον καθρέφτη για να το δουν ολόκληρο. Οι μαθητές ενθουσιάζονται με τη δραστηριότητα. Αφού τελειώσουν τους δείχνει και αυτή το μισό από διάφορα σχέδια που είναι συμμετρικά και ασύμμετρα.

Τρίτη δραστηριότητα

Ζητάει από τους μαθητές να σκεφτούν συμμετρικά κεφαλαία γράμματα της ελληνικής αλφαβήτας. Σηκώνει κάποια παιδιά στον πίνακα, σχεδιάζουν διάφορα γράμματα και τραβούν τους άξονες συμμετρίας. Στη συνέχεια τους δίνει ένα χαρτί με τέσσερα γράμματα συμμετρικά και τους ζητάει να τα διπλώσουν στον άξονα συμμετρίας.

Αφού ολοκληρώσουν τους λέει να φτιάξουν οι ίδιοι δύο γράμματα που να έχουν 2 άξονες συμμετρίας το καθένα.

Ανάλυση της διδασκαλίας

Επιλογή περιεχομένων

Η δασκάλα άντλησε περιεχόμενα από τα χαλιά και τις παραδοσιακές φορεσιές, αλλά και ιδέες από τα μαθηματικά της φύσης και της ζωής, όπως η συμμετρία στα ρούχα και στα γράμματα. Εδώ που έπρεπε να δημιουργήσει μόνη της υλικό, χωρίς να υπάρχει αντίστοιχο μάθημα στο βιβλίο κινήθηκε πιο ελεύθερα από την προηγούμενη διδασκαλία. Οι περισσότερες δραστηριότητες αφορούσαν την εύρεση άξονα συμμετρίας από τους μαθητές και μόνο το δεύτερο μέρος της τελευταίας δραστηριότητας είχε να κάνει με τη δημιουργία συμμετρικών γραμμάτων από τα παιδιά.

Στη διδασκαλία αυτή η δασκάλα προσπάθησε να δώσει και κάποια στοιχεία πολιτισμικά και κάποιες αναφορές έγιναν στην αισθητική αξία της συμμετρίας.

Σε σχέση δηλαδή με την πρώτη διδασκαλία το εθνομαθηματικό περιεχόμενο ήταν πιο έντονο.

Διδακτική μεθοδολογία

Στη εισαγωγική δραστηριότητα ακολουθήθηκε η μέθοδος της επίδειξης από τη δασκάλα. Ωστόσο στη συνέχεια δόθηκε η δυνατότητα στους μαθητές να εξερευνήσουν μόνοι τους με τους καθρέφτες τη συμμετρία. Η δραστηριότητα αυτή βέβαια δεν αξιοποιήθηκε αρκετά στη συνέχεια, αφού δασκάλα μονοπώλησε το λόγο, αντί να αφήσει τους μαθητές να εκφράσουν αυτά που διαπίστωσαν οι ίδιοι. Υπήρχαν στιγμές εταιρικής εργασίας, αλλά και ατομικής. Η δασκάλα σήκωσε κάποιους μαθητές στον πίνακα να δείξουν συμμετρικά γράμματα.

Γενικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι σε αυτή η διδασκαλία η δασκάλα κινήθηκε πιο ανοιχτά και με μεγαλύτερη ελευθερία από την προηγούμενη και σίγουρα αρκετά διαφορετική από αυτές που είχαμε δει στην πρώτη φάση της έρευνας, τουλάχιστον σε επίπεδο σχεδιασμού. Η δασκάλα δηλαδή μοιάζει αποφασισμένη να κάνει δραστηριότητες πιο μαθητοκεντρικές και προσανατολισμένες στην ανακαλυπτική μέθοδο, αλλά μερικές φορές οι διδακτικές της πρακτικές ακυρώνουν αυτή τη προσπάθεια.

8.3.Περίπτωση Γ

8.3.1.Η υποψήφια εκπαιδευτικός

Η φοιτήτρια βρίσκεται στο 3^{ο} έτος των σπουδών της και κατά τη διάρκεια του εαρινού εξαμήνου 2006 παρακολούθησε το μάθημα της διδακτικής μεθοδολογίας και πρακτικής άσκησης στα μαθηματικά. Σε παλιότερα εξάμηνα είχε παρακολουθήσει δύο μαθήματα με γνωστικό αντικείμενο τα μαθηματικά

και ένα μάθημα διδακτικής των Μαθηματικών. Γενικά παρουσιάζει μέτριες ως καλές επιδόσεις.

Η ίδια δηλώνει ότι της αρέσουν τα μαθηματικά. Ως μαθήτρια ήταν καλή στα μαθηματικά και πέρασε στο Παιδαγωγικό Τμήμα από τη θετική κατεύθυνση.

Η άποψή της για τη διδασκαλία των μαθηματικών δεν είναι ξεκάθαρη και εδραιωμένη, καθώς βρίσκεται σε ένα στάδιο εκπαίδευσης και τώρα διαμορφώνει στάσεις και απόψεις. .στη συνέντευξή της φαίνεται πως έχει επηρεαστεί από τη λογική των μαθηματικών της φύσης και της ζωής με την οποία ήρθε πρόσφατα σε επαφή. Διαπιστώνει διαφορές ανάμεσα στον τρόπο με τον οποίο η ίδια είχε διδαχτεί τα μαθηματικά στο δημοτικό σχολείο και σε αυτόν με τον οποίο καλείται να τα διδάξει αυτή.

Όταν ήμουν στο σχολείο κάναμε τα παλιά βιβλία. Τα παιδιά δε συμμετείχαν τόσο, ούτε κάναμε εισαγωγικές δραστηριότητες και project.

Δηλώνει ότι βρίσκει ενδιαφέρουσα την νέα αυτή πρόταση. Θεωρεί χρήσιμη την πραγματοποίηση εισαγωγικών δραστηριοτήτων και την ομαδοσυνεργατική διδασκαλία

Είναι πιο κοντά στα παιδιά και την καθημερινότητα δεν είναι θεωρητικά πράγματα, μακριά από τη ζωή.

Κάποιοι παλιοί δάσκαλοι μου λένε ότι αυτά τα βιβλία είναι δύσκολα και η ύλη είναι πιο μεγάλη, αλλά εγώ νομίζω ότι είναι καλύτερα για τα παιδιά, αν και μερικές φορές μπορεί να είναι πιο δύσκολα για τους δασκάλους, ειδικά τους παλιούς.

Η φοιτήτρια ενδιαφέρεται για την παραγωγή υλικού και το ίδιο εξάμηνο παρακολουθεί και ένα ανάλογο μάθημα επιλογής, με το οποίο δηλώνει γενικά ευχαριστημένη, λέγοντας πως τη βοήθησε.

8.3.2.Οι μαθητές

Οι μαθητές της τάξης είναι 21, 11 αγόρια και 10 κορίτσια. Δηλώνουν ότι τους αρέσουν τα μαθηματικά εκτός από 4 παιδιά που λένε ότι δεν τα συμπαθούν

ιδιαίτερα. Από την πρώτη τάξη διδάσκονται με το πακέτο των μαθηματικών της φύσης και της ζωής. Η δασκάλα της τάξης τους δεν είναι έμπειρη στη χρήση του υλικού αυτού, το οποίο είναι διαφορετικό από το διδακτικό της στυλ. Έτσι συχνά στις διδασκαλίες που παρακολουθήσαμε πριν από την εφαρμογή του προγράμματος, βλέπαμε ότι η διδακτική πρακτική της ακύρωνε την ίδια τη φιλοσοφία του.

Στο τάγκραμ 14 μαθητές τα καταφέρνουν με την πρώτη και ένας κάνει λάθος, το οποίο διορθώνει μόνος του. Οι υπόλοιποι έξι δεν είναι σε θέση να αναδημιουργήσουν τη φιγούρα του τάγκραμ. Όταν τους ρωτούσαμε αν αυτό που έφτιαξαν ήταν σωστό ή λάθος απαντούσαν πως δεν ξέρουν και ζητούσαν από μας να τους πούμε.

ΤΑΓΚΡΑΜ				
	χωρίς λάθη	με λάθη που διορθώνει	με λάθη	Σύνολο
Αριθμός παιδιών	14	1	6	21
Ποσοστό	66,7%	4,8%	28,6%	100,0%

Στο πρώτο μοτίβο όλοι οι μαθητές συμπληρώνουν σωστά την ακολουθία, ενώ στο δεύτερο δύο μαθητές δεν τα καταφέρνουν και συμπληρώνουν άλλη χάντρα. Οι υπόλοιποι 19 συμπληρώνουν τη σωστή.

Στη δραστηριότητα τη σχετική με τη συμμετρία 14 παιδιά τα καταφέρνουν αρχικά να συμπληρώσουν σωστά το συμμετρικό σχήμα, ενώ 5 σχηματίσουν ο υπόλοιπο μισό σχήμα με τη σωστή φορά, αλλά μικρότερο από το συμμετρικό του. Όταν τοποθετούν τον καθρέφτη δε διακρίνουν αυτό ο λάθος και υποστηρίζουν ότι αυτό που σχεδίασαν είναι σωστό. 2 μαθητές σχεδιάζουν το σχήμα με λάθος προσανατολισμό και ούτε η τοποθέτηση του καθρέφτη στον άξονα συμμετρίας φαίνεται ικανή να τους κάνει να διακρίνουν το λάθος τους.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ						
	σωστά χωρίς καθρέφτη	με λάθη προσανατολισμού που διορθώνει με τον καθρέφτη	με λάθη προσανατολισμού και μετά τη χρήση καθρέφτη	με λάθη μεγέθους και μετά τη χρήση καθρέφτη	με λάθη μεγέθους που διορθώνει με τη χρήση καθρέφτη	Σύνολο
Αριθμός παιδιών	14		2	5		21
ποσοστό	66,7%		9,5%	23,8%		100,0%

*8.3.3.*Διδασκαλία με το εκπαιδευτικό πακέτο «γεωμετρία από όλο τον κόσμο»

1Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ:μοτίβα

Περιγραφή της Διδασκαλίας

Εισαγωγική δραστηριότητα

Αρχικά η φοιτήτρια αναρτά στον πίνακα τις φωτογραφίες δύο χαλιών-ενός παραδοσιακού και ενός μοντέρνου. Στη συνέχεια διεξάγεται στην τάξη μια σχετική συζήτηση για τα συγκεκριμένα χαλιά και αναφέρουν οι μαθητές εμπειρίες τους σχετικές με χαλιά. Αναφέρεται η Περσία, ως χώρα φημισμένη για τα χαλιά της και η φοιτήτρια αναρτά στον πίνακα έναν χάρτη και εντοπίζει

την Περσία. Στη συνέχεια η συζήτηση στρέφεται στον τρόπο κατασκευής των χαλιών και παρουσιάζονται φωτογραφίες με υφάντρες.

Δεύτερη Δραστηριότητα

Σ' αυτό το σημείο μοιράζονται στους μαθητές οι εικόνες δύο χαλιών, τα οποία έχουν κάποιο μοτίβο. Στους μισούς μοιράζεται η εικόνα ενός παραδοσιακού χαλιού και στους υπόλοιπους η εικόνα ενός μοντέρνου χαλιού.

Αφού τα παιδιά συνεργαστούν με το διπλανό τους ,στη συνέχεια παρουσιάζουν στην τάξη ότι παρατηρήσανε στο συγκεκριμένο χαλί που έχουν.

Όταν οι δύο μεγάλες ομάδες ολοκληρώσουν τις παρατηρήσεις τους για το κάθε χαλί, γίνεται σύγκριση των δυο με τη μορφή διαλόγου.

Τρίτη Δραστηριότητα

Ζητείται από τους μαθητές να βοηθήσουν τι υφάντρες και να συνεχίσουν ένα αρχινισμένο μοτίβο και να το χρωματίσουν κατάλληλα.

Αφού το ολοκληρώσουν κάποιοι μαθητές αναφέρουν τον τρόπο που σκέφτηκαν για να συνεχίσουν το μοτίβο.

Τέταρτη Δραστηριότητα

Έπειτα, μοιράζονται ανά δύο στους μαθητές αυτοκόλλητα με κάποια χαρακτηριστικά παραδοσιακά μοτίβα που επαναλαμβάνονται σε διάφορα χαλιά και λευκές κόλλες και αυτοί φτιάχνουν το δικό τους χαλί με μοτίβα.

Πέμπτη Δραστηριότητα

Σαν τελευταία δραστηριότητα είχε σχεδιαστεί να δοθούν στα παιδιά χρωματιστές πλαστελίνες και αυτά να κατασκευάσουν το δικό τους βραχιόλι ή κομπολόι με κάποιο συγκεκριμένο μοτίβο.

Αφού ολοκλήρωναν τα έργα τους θα ανέλυαν η λογική των μοτίβων τους. Αυτή η δραστηριότητα δεν πραγματοποιήθηκε, επειδή τελείωσε η διδακτική ώρα

Ανάλυση της διδασκαλίας

Επιλογή περιεχομένων

Για τη διδασκαλία των μοτίβων η υποψήφια εκπαιδευτικός διάλεξε ο θέμα των χαλιών. Η φοιτήτρια κινήθηκε σε διαφορετική λογική από τις δύο έμπειρες εκπαιδευτικούς, δε δημιούργησε αυτόνομες δραστηριότητες, αλλά κατασκεύασε ένα διδακτικό σενάριο, εξολοκλήρου σχετικό με τα χαλιά. Σχεδίασε δηλαδή περισσότερο τη διδασκαλία της γύρω από το θέμα (τα χαλιά) και όχι τόσο γύρω από το μαθηματικό περιεχόμενο (μοτίβα). Μια τέτοιου είδους διδασκαλία της είναι οικεία από τις σπουδές της και η ίδια βρήκε μια καλή ευκαιρία να την εφαρμόσει. Προσέγγισε το θέμα διαθεματικά με προεκτάσεις στη γεωγραφία και την αισθητική. Η εισαγωγική δραστηριότητα αξιοποιούσε τις προϋπάρχουσες γνώσεις των παιδιών και για το τέλος επέλεξε δύο ανοιχτές δραστηριότητες κατασκευής έργων από τους ίδιους του μαθητές.

Διδακτική μεθοδολογία

Η φοιτήτρια κινήθηκε αρκετά μαθητοκεντρικά. Στη φάση της συζήτησης έδωσε πολλές ευκαιρίες στους μαθητές να εκφράσουν τα προσωπικά τους

βιώματα. Ακόμη και τις πληροφορίες που είχε σχεδιάσει να δώσει σχετικά με τα χαλιά προσπάθησε να αφήσει τους μαθητές πρώτα να πουν αυτά που ξέρουν και να συζητήσουν με τους συμμαθητές τους. Βέβαια παρουσίασε αρκετές αδυναμίες στο κατάλληλο χειρισμό της συζήτησης μα αποτέλεσμα να αναλώσει πολύ χρόνο σε αυτήν και να μην προλάβει να κάνει την τελευταία δραστηριότητα που είχε προγραμματίσει. Οι μαθητές δούλεψαν ατομικά και εταιρικά, ενώ είχε σχεδιαστεί να εργαστούν και ομαδικά στη δραστηριότητα που τελικά δεν πραγματοποιήθηκε.

Γενικά μπορούμε να πούμε ότι η παροχή ενός τέτοιου ημιδομημένου υλικού στη φοιτήτρια, είχε ως αποτέλεσμα να μην αφιερώσει πολύ χρόνο στο να ψάχνει να βρει κατάλληλο υλικό και να επικεντρωθεί περισσότερο σε ζητήματα χειρισμού αυτού του υλικού στην τάξη και διδακτικής μεθοδολογίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. έγγραφα

Αναλυτικά Προγράμματα

Προεδρικό Διάταγμα 538/1982, Φ.Ε.Κ. 107 Α'

Προεδρικό Διάταγμα 449/1983, Φ.Ε.Κ. 168 Α'

Προεδρικό Διάταγμα 528/1984, Φ.Ε.Κ. 185 Α'

Προεδρικό Διάταγμα 398/1985, Φ.Ε.Κ. 140 Α'

Φ.Ε.Κ. 1366 τ. Β'/18-10-2001

Φ.Ε.Κ. 1374 τ. Β'/18-10-2001

2. ξενόγλωσση βιβλιογραφία

Adam, S., Alangui, W. and Barton, B. (2003), «A comment on: Rowlands and Carson "Where Would Formal, Academic Mathematics Stand in a Curriculum Informed by Ethnomathematics? A Critical Review», *Educational Studies in Mathematics* 52(3), 327–335.

Banks, James A. (1994) «Transforming the Mainstream Curriculum» *Educational Leadership* 51, no. 8 4-8

Barton, B. (1996) «Making sense of Ethnomathematics: Ethnomathematics is making sense». *Educational studies in mathematics* 31, 201-233

Burger, W., & Shaughnessy, M. (1986). Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education,* 17, 31–48.

Bussi, M. (1996), 'Mathematical discussion and perspective drawing in primary school',*Educational Studies in Mathematics* 31, 11–41.

Chapin, S. H., et a. (1995) *Middle Grades Mathematics: An Interactive Approach, Course 2.* Needham, Mass.: Prentice Hall

Chronaki, A. (2000) Teaching Maths Through Theme-Based Resources: Pedagogic Style, 'Theme' And 'Maths' In Lessons, *Educational Studies in Mathematics* 42(2): 141-163

Clement, J., DiPerna E., Gavin, J., Hanner, S., James, E., Putz, A., Rohlfing, M., & Wainwright, S. (1997) *Children's Work with Data.* Madison, Wis.: Wisconsin Center for Education Research, University of Wisconsin—Madison.

D'Ambrosio, U, (2001) "What is ethnomathematics, and how can it help children in schools?" στο *Teaching Children Mathematics* 7, no6 F 2001

Davidson E; Kramer L, (1997) Integrating with Integrity: Curriculum, Instruction, and Culture in the Mathematics Classroom,Yearbook (National Council of Teachers of Mathematics) 1997, 131-41

De Moor, E. (2000). Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στην Ολλανδία (ηλικίες 4-14) – η ρεαλιστική προσέγγιση. Στο L. Streefland (edit.), *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση,* σ. 131-153. Αθήνα: Leader Books.

DeGuire, L. (1987). Geometry: An avenue for teaching problem solving in grades K-9. In M. M. Lindquist, A. P. Shulte (eds.), *Learning and Teaching Geometry, K-12,* (pp. 59-68), 1987 Yearbook, Reston: N.C.T.M.

Derman-Sparks, L, (1989). *Anti-Bias Curriculum Tools for Empowering Young Children.* Washington, D.C.: National Association for the Education of Young Children, σ.7

Eicholz, R (1992). *Building Bridges to Mathematics: Cultural Connections. 9 vols.* Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co.

Frankenstein, M. (1998) *Reading the World with Maths: Goals for a Critical Mathematics Literacy Curriculum*, Paper presented in the Mathematics Education and Society Conference, Nottingham: September1998 σ.180–190.

Gerdes, P. (1988) "On Culture, Geometrical Thinking, and Mathematics Education." *Educational Studies in Mathematics* 19

Gerdes, Paulus.(1985) "Conditions and Strategies for Emancipatory Mathematics Education in Underdeveloped Countries." *For the Learning of Mathematics* 5: 15-20.

Hansen, V. L. (1998). General considerations on curricula designs in geometry. In C. Mammana & V. Villani (edit.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (an ICMI Study), 235-243. Dordrecht-Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Isaacs, A. C., Carroll, W. M., & Bell, M. (1998). *A research-based curriculum: The research foundations of the UCSMP Everyday Mathematics curriculum*. Chicago: UCSMP.

Krause, Marina C. (1983) *Multicultural Mathematics Materials.* Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics

Lave, J., Murtaugh, M., De la Rocha, O. (1984) "The Dialectic of Arithmetic in Grocery Shopping." στο *Everyday Cognition: Its Development in Social Context*, edited by Barbara Rogoff and Jean Lave, pp. 67-94. Cambridge, Mass.: Harvard University Press

Lawson, M., & Chinnappan, M. (2000). Knowledge connectedness in geometry problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education,* 31, no1, 26-43

Lemonidis, C. (1997). A few remarks regarding the teaching of geometry, through a theoretical analysis of the geometrical figure. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications,* vol. 30, no 4, pp. 2087-2095 (Proc. 2nd World Congress of Nonlinear Analysis)

Lester, Frank K. Jr., (1989) "Mathematical Problem Solving in and out of School." *Arithmetic Teacher* 37 (November 1989): 33-35.

Masingila, Joanna O, (1997) *Using Ethnomathematics as a Classroom Tool*, Yearbook (National Council of Teachers of Mathematics) 115-20 '97

Masingila, Joanna O. (1994)"Middle School Students' Perceptions of Their Everyday Mathematics Practice." *στο Proceedings of the 16th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, edited by David Kirshner, vol. 2, pp. 77-83. Baton Rouge, La.: Louisiana State University

Masingila, Joanna O. (1995) "Carpet Laying: An Illustration of Everyday Mathematics." στο *Connecting Mathematics across the Curriculum*, 1995 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by Peggy A. House, pp. 163-69. Reston, Va.: NCTM

Meyer, M. (2001). Representation in Realistic Mathematics Education. *Yearbook (National Council of Teachers of Mathematics) 2001,* 238-250.

Millroy, W. L. (1992). An Ethnographic Study of the Mathematical Ideas of a Group of Carpenters. *Journal for Research in Mathematics Education* Monograph No. 5. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 11

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Va.: NCTM

Nunes, Terezinha.(1993) "The Socio-Cultural Context of Mathematical Thinking: Research Findings and Educational Implications." In Significant Influences on Children's Learning of Mathematics, edited by Alan J. Bishop, Kathleen Hart, Stephen Lerman, and Terezinha Nunes, pp. 27-42. Paris: UNESCO

Razel, M., & Eylon, B. (1991). «Developing Mathematics Readiness in Young Children with the Agam Program». Paper presented at the *Fifteenth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Genoa, Italy

Rowlands, S. and Carson, R.: (2002), 'Where would formal, academic mathematics stand in a curriculum informed by ethnomathematics? A critical review of ethnomathematics', *Educational Studies in Mathematics* 50(1), 79–102.

Saxe, G. (1982) «Culture and the development of numerical cognition studies among the Oksapmin of Papua New Guinea» στο C.G. Brainerd (ed.) *Children's Logical and Mathematical Cognition*, Springer-Verlag.

The Annenberg/CPB Math and Science Project. (1997-2003). *Teachers' Lab/Shape and Space in geometry/Why Geometry is Important,* (από το www.learner.org/teacherslab/math/geometry).

Treffers, A. (2000). Το διδακτικό υπόβαθρο ενός προγράμματος μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο. Στο L. Streefland (edit.), *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση,* σ. 18-58. Αθήνα: Leader Books.

Usiskin, Z. (1987). Resolving the continuing dilemmas in school geometry. στο M. M. Lindquist, A. P. Shulte (eds.), *Learning and Teaching Geometry, K-12,* Yearbook, Reston: N.C.T.M.

Zaslavsky, Cl. (1993) *Multicultural Mathematics: Interdisciplinary Cooperative Learning Activities*. Portland, Maine: J. Weston Walch Publisher

3. ελληνόγλωση βιβλιογραφία

Αγγελάκος, Κ. (Επ.) (2003) *Διαθεματικές προσεγγίσεις της γνώσης στο ελληνικό σχολείο.* Αθήνα: Μεταίχμιο.

Ζαχάρος, Κ., Χασάπης, Δ. (2000) «Κριτική παρουσίαση της ερευνητικής και εκπαιδευτικής προσέγγισης των εθνομαθηματικών». *Αντιτετράδια της Εκπαίδευσης.*

Καψάλης, Α., & Λεμονίδης, Χ. (1999). «Σύγχρονες τάσεις της Διδακτικής των Μαθηματικών». *Μακεδνόν,* 6

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών.* Αθήνα:Leader Books

Λεμονίδης, Χ. (1993). "Επίδραση των τυπικών αναπαραστάσεων στη συμπεριφορά του μαθητή. Παραδείγματα από τη Γεωμετρία". *Εισήγηση στο 4ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ψυχολογικής Έρευνας. ΕΛΨΕ* Θεσ/νίκη, 27-30 Μαΐου 1993. Περίληψη στα πρακτικά σελ. 198.

Λεμονίδης, Χ. (2003). *Μια νέα πρόταση διδασκαλίας των Μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου*, Αθήνα: Πατάκης

Λιάκος, Α., (2005) *Πως είδαν το έθνος αυτοί που θέλησαν να αλλάξουν τον κόσμο.* Αθήνα: Πόλις

Ματσαγγούρας Η. (2002) *Η Διαθεματικότητα στη Σχολική Γνώση*, εκδ. Γρηγόρη, Αθήνα

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2002) *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων, τ. 7. Ειδικό αφιέρωμα στη διαθεματικότητα.* Αθήνα:Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (στο:http://www.pischools.gr/publications/epitheorisi/).

Σταθοπούλου, Χ. (2006) *Εθνομαθηματικά*, Αθήνα: Ατραπός

Streefland L.(2000) Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση. Αθήνα: Leader Books

Τζανάκης, Κ., & Κούρκουλος, Μ. (2000). «Η παροχή μαθηματικής Παιδείας και τα χαρακτηριστικά του μαθηματικού σκέπτεσθαι: Η περίπτωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας». *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, τ.111, 66-73.

Τζεκάκη, Μ. (2001) «Η σημασία της έρευνας στη διδακτική της Γεωμετρίας στην εκπαίδευση και επιμόρφωση των εκπαιδευτικών». Στο Αρβανιτογεώργος Α., Παπαντωνίου Β. & Ποτάρη Δ. (επιμ.), *Ερευνητικές προσεγγίσεις στη διδακτική της Γεωμετρίας – Πρακτικά 4ου Πανελληνίου Συνεδρίου Γεωμετρίας,* (σελ. 132-133). Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη.

Τουμάσης, Μ. (1994). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών.* Αθήνα: Gutenberg

Τριανταφυλλίδης, Τ. (2001) «Γεωμετρία: ο φτωχός συγγενής του αναλυτικού προγράμματος μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο». ». Στο Αρβανιτογεώργος Α.,

Παπαντωνίου Β. & Ποτάρη Δ. (επιμ.), *Ερευνητικές προσεγγίσεις στη διδακτική της Γεωμετρίας – Πρακτικά 4ου Πανελληνίου Συνεδρίου Γεωμετρίας,* (σελ. 133-135). Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη.

4. ηλεκτρονικές πηγές

www.standards.nctm.org

http://everydaymath.uchicago.edu/educators/references.shtml

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α'

ΕΠΙΠΕΔΑ VAN HIELE

ΔΕΞΙΟΤΗΤΕΣ	ΕΠΙΠΕΔΟ 0 ΟΠΤΙΚΟ-ΠΟΙΗΣΗ	ΕΠΙΠΕΔΟ 1 ΑΝΑΛΥΣΗ	ΕΠΙΠΕΔΟ 2 ΑΤΥΠΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗ	ΕΠΙΠΕΔΟ 3 ΤΥΠΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗ	ΕΠΙΠΕΔΟ 4 ΑΥΣΤΗΡΟ
ΟΠΤΙΚΕΣ	Αναγνωρίζει διάφορα σχήματα από μια εικόνα. Αναγνωρίζει μια πληροφορία που δίνεται με ένα σχήμα.	Μπορεί να διακρίνει τις ιδιότητες ενός σχήματος. Εντοπίζει ένα σχήμα σαν μέρος ενός πιο σύνθετου σχήματος.	Αναγνωρίζει σχέσεις μεταξύ διαφόρων ειδών σχημάτων. Αναγνωρίζει κοινές ιδιότητες διαφόρων ειδών σχημάτων.	Χρησιμοποιεί πληροφορία σχετική με ένα σχήμα για να συμπεράνει νέα στοιχεία.	Αναγνωρίζει εσφαλμένες παραδοχές σε ένα πρόβλημα που χρησιμο-ποιήθηκαν σχήματα. Συλλαμβάνει σχέσεις σχημάτων σε διάφορα επαγωγικά συστήματα.

ΔΕΞΙΟΤΗΤΕΣ	ΕΠΙΠΕΔΟ 0 ΟΠΤΙΚΟ-ΠΟΙΗΣΗ	ΕΠΙΠΕΔΟ 1 ΑΝΑΛΥΣΗ	ΕΠΙΠΕΔΟ 2 ΑΤΥΠΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗ	ΕΠΙΠΕΔΟ 3 ΤΥΠΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗ	ΕΠΙΠΕΔΟ 4 ΑΥΣΤΗΡΟ
ΛΕΚΤΙΚΕΣ	Συσχετίζει το σχήμα με τη σωστή ονομασία. Ερμηνεύει προτάσεις που περιγράφουν σχήματα. Καταλαβαίνει από την περιγραφή για ποιο σχήμα πρόκειται.	Περιγράφει με άνεση διάφορες ιδιότητες ενός σχήματος.	Μπορεί να δίνει τον ορισμό εννοιών άνετα και συνειδητά. Διατυπώνει προτάσεις που δείχνουν τις σχέσεις μεταξύ των σχημάτων.	Κατανοεί τις διαφορές μεταξύ ορισμών αξιωμάτων και θεωρημάτων. Διακρίνει τις υποθέσεις από τα συμπερά-σματα στην εκφώνηση ενός προβλήματος.	Διατυπώνει προεκτάσεις γνωστών αποτελε-σμάτων. Περιγράφει διάφορα επαγωγικά συστήματα.

ΔΕΞΙΟΤΗΤΕΣ	ΕΠΙΠΕΔΟ 0 ΟΠΤΙΚΟ-ΠΟΙΗΣΗ	ΕΠΙΠΕΔΟ 1 ΑΝΑΛΥΣΗ	ΕΠΙΠΕΔΟ 2 ΑΤΥΠΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗ	ΕΠΙΠΕΔΟ 3 ΤΥΠΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗ	ΕΠΙΠΕΔΟ 4 ΑΥΣΤΗΡΟ
ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ	Κατασκευάζει με άνεση σχήματα και μπορεί να ονομάζει τα διάφορα μέρη τους.	Μεταφράζει προφορική πληροφορία σε εικόνα. Χρησιμοποιεί τις ιδιότητες ενός σχήματος για να κατασκευάσει το σχήμα.	Δεδομένων κάποιων σχημάτων, μπορεί να κατασκευάζει άλλα σχήματα που σχετίζονται με τα αρχικά.	Αναγνωρίζει πότε και πώς να χρησιμο-ποιήσει βοηθητικά στοιχεία σε ένα σχήμα. Από δοσμένη πληροφορία συμπεραίνει πώς να κατασκευάσει ένα συγκεκριμένο σχήμα.	Αντιλαμβά-νεται τα όρια και τις δυνατότητες διαφόρων οργάνων μέτρησης. Αναπαριστά σχηματικά έννοιες διαφόρων επαγωγικών συστημάτων.

ΔΕΞΙΟΤΗΤΕΣ	ΕΠΙΠΕΔΟ 0 ΟΠΤΙΚΟ-ΠΟΙΗΣΗ	ΕΠΙΠΕΔΟ 1 ΑΝΑΛΥΣΗ	ΕΠΙΠΕΔΟ 2 ΑΤΥΠΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗ	ΕΠΙΠΕΔΟ 3 ΤΥΠΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗ	ΕΠΙΠΕΔΟ 4 ΑΥΣΤΗΡΟ
ΛΟΓΙΚΕΣ	Συνειδητοποιεί ότι υπάρχουν διαφορές και ομοιότητες ανάμεσα στα σχήματα. Κατανοεί τη διατήρηση του σχήματος σε διάφορες θέσεις.	Κατανοεί ότι τα σχήματα μπορούν να ομαδοποιηθούν σε διάφορες κατηγορίες. Συνειδητοποιεί ότι οι ιδιότητες χρησιμεύουν για να ξεχωρίζουν τα σχήματα.	Κατανοεί τα πλεονεκτήματα ενός καλού ορισμού. Χρησιμοποιεί τις ιδιότητες των σχημάτων, για να συμπεράνει αν μια ομάδα σχημάτων εμπεριέχεται σε μια άλλη ομάδα.	Χρησιμοποιεί κανόνες της λογικής για να κατασκευάσει αποδείξεις. Μπορεί να διατυπώνει συμπεράσματα από δοσμένη πληροφορία..	Αντιλαμβάνεται τα όρια και τις δυνατότητες αξιωμάτων και προτάσεων. Γνωρίζει πότε ένα σύστημα αξιωμάτων είναι ανεξάρτητο.
ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ	Αναγνωρίζει γεωμετρικά σχήματα σε αντικείμενα της πραγματικής ζωής.	Αναγνωρίζει τις γεωμετρικές ιδιότητες φυσικών αντικειμένων. Αναπαριστά φυσικά φαινόμενα με σχέδιο ή με τη βοήθεια μοντέλου.	Κατανοεί την έννοια του μαθηματικού μοντέλου που αναπαριστά σχέσεις μεταξύ αντικειμένων του πραγματικού χώρου.	Είναι σε θέση να συμπεραίνει ιδιότητες αντικειμένων από μια πληροφορία και να λύνει προβλήματα που παρουσιάζουν σχέσεις μεταξύ αντικειμένων.	Χρησιμοποιεί μαθηματικά μοντέλα για να αναπαραστήσει αφηρημένα συστήματα. Αναπτύσσει μαθηματικά μοντέλα για φυσικά και κοινωνικά φαινόμενα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β'

ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΙΣ ΤΑΞΕΙΣ Α΄- Γ΄

Α΄ Τάξη (Προεδρικό Διάταγμα 538/1982, Φ.Ε.Κ. 107 Α΄)

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ	ΕΠΙΔΙΩΞΕΙΣ	ΜΕΡΙΚΟΤΕΡΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ	ΣΤΟΧΟΙ
Ζ. Βασικὲς γεωμετρικὲς ἔννοιες (ὧρες 6).	Νὰ ἐξοικειωθοῦν μὲ ἁπλὲς γεωμετρικὲς ἔννοιες καὶ σχήματα. Νὰ γίνουν ἱκανοὶ νὰ ἐπισημαίνουν τὰ γεωμετρικὰ σχήματα στὸ περιβάλλον τους.	1. Εἴδη γραμμῶν: Καμπύλες (ἀνοιχτὲς–κλειστές), εὐθεῖες τεθλασμένες. 2. Ἡ ἔννοια διάσταση χαρακτηριζόμενη ὡς μῆκος (Σύγκριση σὲ διαστάσεις κύβου καὶ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ὅπως καὶ τετραγώνου καὶ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου).	Νὰ ἀποκτήσουν τὴν ἔννοια τῆς καμπύλης σὲ σχέση μὲ τὸν κύκλο. Νὰ ἀναγνωρίζουν τὸν κύκλο ὡς κλειστὴ καμπύλη καὶ τὰ τόξα του ὡς ἀνοιχτὲς καμπύλες. Νὰ συνδυάσουν τὶς εὐθεῖες καὶ τὶς τεθλασμένες σὲ σχέση μὲ τὸ τετράγωνο. Νὰ ἀναγνωρίζουν καὶ νὰ σχεδιάζουν ποικίλες εὐθεῖες καὶ τεθλασμένες γραμμές. Νὰ διακρίνουν ὅτι ὁ κύβος ἔχει τὸ ἴδιο μῆκος ὡς πρὸς καὶ τὶς τρεῖς διαστάσεις, ἐνῶ τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο δὲν ἔχει τὸ ἴδιο μῆκος στὶς τρεῖς διαστάσεις. Νὰ ἀντιληφθοῦν ὅτι τὸ τετράγωνο ἔχει καὶ τὶς δύο διαστάσεις μὲ τὸ ἴδιο μῆκος, ἐνῶ τὸ ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ἔχει τὶς διαστάσεις του μὲ διαφορετικὸ μῆκος. Νὰ κατανοήσουν ἐποπτικὰ τὴν ἔννοια διάσταση σὰν ἰδιότητα τῶν γεωμετρικῶν σωμάτων καὶ σχημάτων.
		3. Σχήματα (στερεὰ γεωμετρικὰ σώματα, ἐπίπεδα γεωμετρικὰ σχήματα).	Νὰ ἐπισημαίνουν τὸ σχῆμα ὡς χαρακτηριστικὴ ἰδιότητα τῶν κανονικῶν στερεῶν σωμάτων.
		4. Γραφικὲς ἀπεικονίσεις.	Νὰ διακρίνουν τὰ σχήματα τοῦ κύκλου, τοῦ τετραγώνου καὶ τοῦ ὀρθογωνίου. Νὰ ἀπεικονίζουν μὲ ἁπλὲς γραφικὲς παραστάσεις τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων διάφορων συνόλων.

Α' Τάξη (Φ.Ε.Κ. 1366 & 1374 τ. Β'/18-10-2001)

Στόχοι	Περιεχόμενο	Ενδεικτικές δραστηριότητες	Χρόνος
Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: Να διακρίνουν τα σχήματα των στερεών: κύβου, ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου (στερεού ορθογώνιου), κυλίνδρου, σφαίρας, και των επιπέδων: του κύκλου, του τετραγώνου, του ορθογωνίου και του τριγώνου. Να χαράζουν ευθύγραμμα τμήματα με το χάρακα, ενώνοντας συγκεκριμένα σημεία. Να ανακατασκευάζουν απλά παζλ. Να τοποθετούν, να εντοπίζουν και να μετατοπίζουν αντικείμενα σε σχέση με τους ίδιους ή σε σχέση με σταθερά σημεία αναφοράς. Να παρατηρούν εικόνες και σχήματα συμμετρικά.	***Γεωμετρία και χώρος*** Σχήματα. Αναγνώριση της μορφής. Χάραξη. Προσανατολισμός στο χώρο Προσέγγιση της συμμετρίας ως προς άξονα.	***Οι μαθητές:*** Βρίσκουν αντικείμενα από την καθημερινή ζωή και περιγράφουν το σχήμα τους. Ταξινομούν σχήματα ως προς τη μορφή τους, ως προς τον αριθμό των πλευρών ή των γωνιών τους. Ενώνουν με το χάρακα σημεία 1, 2, ...10 και σχηματίζεται ένα σκίτσο. Σχηματίζουν απλά σχήματα από τα κομμάτια του «τάγκραμ». Περιγράφουν μια διαδρομή μέσα στο χώρο ή σε τετραγωνισμένο χαρτί. Καλύπτουν μια επιφάνεια με μια άλλη μικρότερη (πλακόστρωτο). Χρησιμοποιούν τους όρους: πάνω-κάτω, μπροστά-πίσω, αριστερά-δεξιά. Παρατηρούν και ελέγχουν διπλώνοντας συμμετρικές εικόνες και σχήματα. Αναπαράγουν με το διαφανές χαρτί απλά συμμετρικά σχήματα.	*8 ΩΡΕΣ* (2, 2, 2, 2 ΩΡΕΣ αντίστοιχα)

Β' Τάξη (Προεδρικό Διάταγμα 538/1982, Φ.Ε.Κ. 107 Α')

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ	ΕΠΙΔΙΩΞΕΙΣ	ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ	ΜΕΡΙΚΟΤΕΡΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ ΣΤΟΧΟΙ
ΣΤ. Βασικὲς γεωμετρικὲς ἔννοιες. (Κύκλος, τετράγωνο, ὀρθογώνιο τρίγωνο). (Ὧρες 8).	Νὰ εἰσαχθοῦν στὶς ἔννοιες τοῦ τετραγώνου, τοῦ ὀρθογωνίου καὶ τοῦ τριγώνου καὶ τοῦ κύκλου.	1. Τὰ βασικὰ ἐπίπεδα γεωμετρικὰ σχήματα. (Ὁ κύκλος, τὸ τετράγωνο, τὸ ὀρθογώνιο καὶ τὸ τρίγωνο μὲ τὰ χαρακτηριστικὰ τῆς διάκρισής τους).	Νὰ διακρίνουν καὶ νὰ δικαιολογοῦν τὰ ἀριστερὰ ἀναφερόμενα σχήματα.
		2. Σχήματα–διαστάσεις. Τὰ στερεὰ γεωμετρικὰ σώματα καὶ τὰ ἁπλὰ ἐπίπεδα σχήματα τῆς προηγούμενης τάξης: κύβος καὶ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο· ὀρθογώνιο καὶ τρίγωνο. Τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος.	συνόλων. Νὰ ἐπισημαίνουν τὸ στοιχεῖο διάκρισης τῶν δύο στερεῶν: κύβου καὶ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ὅπως ἐπίσης τῶν ἐπιπέδων σχημάτων ὀρθογωνίου καὶ τριγώνου.
		4. Γραφικὲς ἀπεικονίσεις.	Νὰ ἀντιληφθοῦν ὅτι τὰ στερεὰ σώματὰ ὅπως καὶ τὰ σχήματα ἔχουν διαστάσεις (τρόπος ἔκτασής τους μέσα στὸ χῶρο ἢ στὸ ἐπίπεδο).

Β' Τάξη (Φ.Ε.Κ. 1366 & 1374 τ. Β'/18-10-2001)

Στόχοι	Περιεχόμενο	Ενδεικτικές δραστηριότητες	Χρόνος
Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: Να αναγνωρίζουν και να χαράζουν σημεία, ευθύγραμμα τμήματα και ευθείες σε λευκό και τετραγωνισμένο χαρτί. Να αναγνωρίζουν εμπειρικά τις παράλληλες και κάθετες ευθείες. Να διακρίνουν τα γεωμετρικά στερεά: τον κύβο, το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τη σφαίρα, τον κύλινδρο. Να αναγνωρίζουν τα γεωμετρικά σχήματα: τον κύκλο, το τετράγωνο, το ορθογώνιο, το τρίγωνο. Να εξετάζουν τα χαρακτηριστικά των	***Χώρος - Γεωμετρία – Μετρήσεις*** **Χώρος και Γεωμετρία**	***Εισάγονται δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές :*** Να προσδιορίζουν κόμβους και τετράγωνα στο καρτεσιανό επίπεδο (τετραγωνισμένο χαρτί, σταυρόλεξο, χάρτες). Να περιγράφουν μια διαδρομή μέσα στο χώρο ή σε τετραγωνισμένο χαρτί. Να χρησιμοποιούν το γνώμονα, για να εξετάσουν αν δύο ευθείες είναι κάθετες. Να σχηματίζουν απλά σχήματα με τα κομμάτια του τάγκραμ. Να καλύπτουν μια επιφάνεια με μια άλλη μικρότερη (πλακόστρωτο). Να διασκεδάζουν με τάγκραμ, πλακόστρωτα, μωσαϊκά, παζλ, αριθμητικά ή λογικά παιχνίδια, επαναληπτικές	*5 ΩΡΕΣ*
γεωμετρικών σχημάτων με τη χρήση των οργάνων. Να μετρούν και να συγκρίνουν τμήματα στην αρχή με αυθαίρετες μονάδες και στη συνέχεια με συμβατικές. Να χαράζουν σχήματα με το χάρακα σε λευκό και σε τετραγωνισμένο χαρτί, να αναπαράγουν σχήματα και να ακολουθούν γραπτές εντολές για τη χάραξη ενός σχήματος. Να παρατηρούν αν ένα σχήμα έχει άξονα συμμετρίας.		κανονικότητες. Να διαπιστώνουν με το χάρακα την ισότητα των πλευρών και με το γνώμονα τις ορθές γωνίες. Να χρησιμοποιούν τη δίπλωση, για να ελέγχουν και να συμπληρώνουν τη συμμετρία.	

Γ' Τάξη (Προεδρικό Διάταγμα 449/1983, Φ.Ε.Κ. 168 Α')

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ	ΕΠΙΔΙΩΞΕΙΣ	ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ	ΜΕΡΙΚΟΤΕΡΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ ΣΤΟΧΟΙ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ: (Ανασκόπηση προηγούμενων· ρόμβος, πολύπλευρα· περίμετρος γεωμετρικών σχημάτων· περιφέρεια, κέντρο· γωνίες· στερεά γεωμετρικά σώματα· ο κύβος). (Ώρες .6.)	Να διευρύνουν τις γνώσεις τους σχετικά με ορισμένες γεωμετρικές έννοιες και να έλθουν σε πρώτη συστηματική επαφή με τα στερεά γεωμετρικά σώματα. - Να αναγνωρίζουν σωστά ορισμένα γεωμετρικά σχήματα και στερεά σώματα στο περιβάλλον τους.	1. Ανασκόπηση στα γεωμετρικά σχήματα: Κύκλος, τετράγωνο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και τρίγωνο.	- Να σταθεροποιήσουν τις σχετικές με τα γεωμετρικά αυτά σχήματα γνώσεις, που απόκτησαν στην προηγούμενη τάξη.
		2. Ρόμβος:	-Να διακρίνουν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του ρόμβου. - Να συγκρίνουν και να διακρίνουν το ρόμβο από το τετράγωνο και από τα άλλα γνωστά τετράπλευρα.
		3. Πολύπλευρα	- Να αντιληφθούν την έννοια του πολύπλευρου. - Να σχεδιάζουν ρόμβο και πολύπλευρα.
		4. Περίμετρος γεωμετρικών σχημάτων:	- Να αντιληφθούν την έννοια της περιμέτρου και να την υποδεικνύουν στα γνωστά τους γεωμετρικά σχήματα. - Να υπολογίζουν με μέτρηση το μήκος της περιμέτρου γεωμετρικών σχημάτων.
		5. Η Περιφέρεια και το κέντρο του κύκλου:	- Να αντιληφθούν την έννοια της περιφέρειας και του κέντρου.
		6. Γωνίες στα γνωστά γεωμετρικά σχήματα· ορθές γωνίες:	- Να υποδεικνύουν τις γωνίες στα γεωμετρικά σχήματα: τετράγωνου, ορθογώνιου παραλληλόγραμμου, ρόμβου και πολύπλευρου. - Να διακρίνουν τα κύρια χαρακτηριστικά μιας γωνίας και να σχεδιάζουν γωνίες. - Να διακρίνουν τις ορθές γωνίες χρησιμοποιώντας το γνώμονα και να σχεδιάζουν με αυτόν ορθές γωνίες.
		7. Στερεά γεωμετρικά σώματα· ο κύβος.	- Να εισαχθούν στην έννοια των στερεών γεωμετρικών σωμάτων. - Να διακρίνουν τα στερεά γεωμετρικά σώματα μεταξύ τους και να τα ματονομάζουν. - Να συλλάβουν την έννοια του κύβου.

Γ' Τάξη (Φ.Ε.Κ. 1366 & 1374 τ. Β'/18-10-2001)

Στόχοι	Περιεχόμενο	Ενδεικτικές δραστηριότητες	Χρόνος
Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: Να χαράζουν γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια οργάνων. Να περιγράφουν και να αναπαριστάνουν ορισμένα συνήθη γεωμετρικά στερεά (κύβος, σφαίρα). Να αναπαράγουν τα αναπτύγματα του κύβου, του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου, της τετραγωνικής πυραμίδας. Να αναπαράγουν, να	***Γεωμετρία και Χώρος*** **Χώρος και Γεωμετρία**	Εισάγονται δραστηριότητες οι οποίες δίνουν ευκαιρίες στους μαθητές να μαθαίνουν να χρησιμοποιούν συνήθη όργανα, όπως το διαφανές χαρτί, το τετραγωνισμένο χαρτί, το χάρακα, τον κανόνα και το γνώμονα. Οι μαθητές: Εργαζόμενοι πάνω σε διάφορα στερεά (αναπαραγωγή, περιγραφή, αναπαράσταση, κατασκευή), σχηματίζουν έννοιες, όπως: έδρα, κορυφή, ακμή.	***7 ΩΡΕΣ***
περιγράφουν και να κατασκευάζουν ορισμένα συνήθη επίπεδα γεωμετρικά σχήματα (ορθογώνιο, τετράγωνο). Να χαράζουν κάθετες με τη βοήθεια οργάνων. Να αντιληφθούν την έννοια της ορθής γωνίας. Να κατασκευάζουν το συμμετρικό ενός επίπεδου σχήματος ως προς άξονα συμμετρίας.		Επίσης, εργαζόμενοι πάνω σε διάφορα επίπεδα σχήματα, σχηματίζουν έννοιες, όπως: πλευρά, ευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, μέσο, γραμμή, κάθετος, γωνία, ορθή γωνία. Αναγνωρίζουν σχήματα μέσα σε ένα σύνθετο σχήμα και καταμετρούν τον αριθμό τους στο σύνθετο σχήμα. Διασκεδάζουν με τάγκραμ, πλακόστρωτα, μωσαϊκά, πάζλ, επαναληπτικές κανονικότητες, γρίφους, μαγικά τετράγωνα. Μαθαίνουν να χαράζουν δύο κάθετες ευθείες με τη βοήθεια του γνώμονα και κατανοούν την έννοια της ορθής γωνίας. Σχετικά με την αξονική συμμετρία οι μαθητές χρησιμοποιούν τη δίπλωση, για να κατασκευάζουν το συμμετρικό ενός επίπεδου σχήματος ως προς άξονα συμμετρίας. Επίσης αναγνωρίζουν άξονες συμμετρίας ενός επίπεδου σχήματος.	