

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
Χ. ΛΕΜΟΝΙΔΗΣ

ΟΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗΣ ΜΕ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΑΠΟ ΤΟ 20 ΜΕΧΡΙ ΤΟ 100

Τα τελευταία είκοσι χρόνια στη βιβλιογραφία της έρευνας για τη διδασκαλία των μαθηματικών παρουσιάστηκαν πολλές προσπάθειες για να οργανωθούν οι διάφορες στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές σε προσθέσεις και αφαιρέσεις με αριθμούς μέχρι το 100. Μια σύνθεση αυτών των στρατηγικών παρουσιάζουμε στον παρακάτω πίνακα.

	Στρατηγική		Παραδείγματα	
			Πρόσθεση (38+25)	Αφαίρεση (63-25)
1	Στρατηγική διαχωρισμού (1010)		38 + 25: 5 + 8 = 13, 30 + 20 = 50, 63 ή 38 + 25: 30 + 20 = 50, 8 + 5 = 13, 63	63 - 25: 13 - 5 = 8, 50 - 20 = 30, 38 = 60, 38 ή 63 - 25: 50 - 20 = 30, 13 - 5 = 8, 38
2	Στρατηγική συσσώρευσης (N10)		38 + 25: 38 + 5 = 43, 43 + 20 = 63 ή 38 + 25: 38 + 20 = 58, 58 + 5 = 63	63 - 25: 63 - 5 = 58, 58 - 20 = 38 (με αφαίρεση) 63 - 25: 25 + 8 = 33, 33 + 30 = 63, 38 (με πρόσθεση)
2.1	Στάση στη δεκάδα (A10)		38 + 25: 38 + 2 = 40, 40 + 23 = 63	63 - 25: 63 - 3 = 60, 60 - 20 = 40, 40 - 2 = 38 (με αφαίρεση) 63 - 25: 25 + 5 = 30, 30 + 33 = 63, 38 (με πρόσθεση)
3	Μικτή στρατηγική διαχωρισμού και συσσώρευσης (10S)		38 + 25: 30 + 20 = 50, 50 + 8 = 58, 58 + 5 = 63	63 - 25: 60 - 20 = 40, 40 + 3 = 43, 43 - 5 = 38
4	Ολιστικές στρατηγικές	Αντιστάθμιση (N10C) (Compensation)	38 + 25: 40 + 25 = 65, 65 - 2 = 63	63 - 25: 63 - 30 = 33, 33 + 5 = 38
		Εξισορρόπηση (Leveling)	38 + 25: 40 + 23 = 63,	63 - 25: 68 - 30 = 38
5	Αρίθμηση	Με μονάδες Με δεκάδες ή άλλους αριθμούς	38+25: 38, 39, 40, ... 38+25: 38+10=48, 48+10=58, 58+5=63	63-25: 63, 62, 60,... 63-25: 63-10=53, 53-10=43, 43-5=38

6	Νοητική εικόνα του αλγορίθμου με μολύβι και χαρτί			Σκέφτονται και εκτελούν νοερά τη μέθοδο του τυπικού γραπτού αλγορίθμου
---	---	--	--	--

Πίνακας: Στρατηγικές πρόσθεσης και αφαίρεσης με αριθμούς μέχρι το 100

1) Στρατηγική διαχωρισμού (1010). Η πιο συνηθισμένη στρατηγική πρόσθεσης ή αφαίρεσης είναι η **στρατηγική διαχωρισμού**, αποκαλείται έτσι επειδή οι αριθμοί που προστίθενται ή που αφαιρούνται διαχωρίζονται σε πολλαπλάσια του δέκα και στις μονάδες. Στην βιβλιογραφία η μέθοδος αυτή ονομάζεται και με τη συντομογραφία **1010 (δέκα-δέκα)**.

$$43 + 26$$

69 γιατί 40 και 20 κάνουν 60... τρία και έξι... εννιά... 60 και εννιά κάνει 69.

Εδώ χρησιμοποιείται η στρατηγική του διαχωρισμού. Ο μαθητής χώρισε το 43 σε 40 και 3, χώρισε το 26 σε 20 και 6, πρόσθεσε μαζί τα δύο πολλαπλάσια του δέκα (40 και 20), πρόσθεσε το 3 και το 6 και τέλος πρόσθεσε μαζί τα δύο υποαθροίσματα (60 και 9) για να πάρει τη σωστή απάντηση 69.

Στην αφαίρεση η στρατηγική αυτή δεν είναι τόσο βολική όταν στον αφαιρετέο ο αριθμός των μονάδων είναι μεγαλύτερος από αυτόν του μειωτέου, δηλαδή χρειάζεται να δανειστούμε. Για παράδειγμα, στην αφαίρεση 43-25, λέμε 13-5=8, 30-20=10, άρα 18.

Ενώ στην αφαίρεση 47-23, η στρατηγική αυτή εφαρμόζεται πιο απλά, 40-20=20, 7-3=4, 20+4=24.

2) Στρατηγική συσσώρευσης (N10). Συναντιέται λιγότερο στην εκπαίδευση της Ελλάδας από ότι η προηγούμενη στρατηγική. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή κρατούμε σταθερό τον πρώτο όρο, διασπούμε το δεύτερο όρο σε μονάδες και δεκάδες και προσθέτουμε ή αφαιρούμε διαδοχικά από τον πρώτο όρο τις μονάδες και τις δεκάδες.

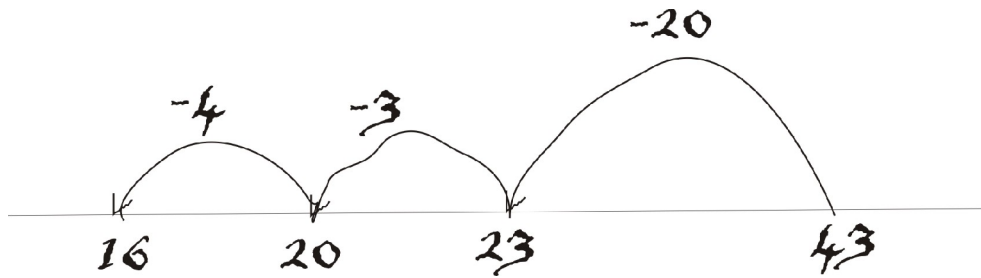
$$43 - 15$$

Βγάζω 5 από το 43 και μου μένουν 38... από το 38 βγάζω 10 και έχω 28.

Εναλλακτικές ονομασίες για αυτήν την στρατηγική είναι η συντομογραφία **N10** και λέγεται επίσης **μέθοδος άλματος**. Στη στρατηγική αυτή δίνεται το όνομα *άλμα* επειδή μπορεί να αναπαρασταθεί εύκολα - εμπειρικά ή νοητικά - σε μια αριθμογραμμή, όπου αρχίζεις από έναν αριθμό και κινείσαι προς την απάντηση με άλμα επάνω στη γραμμή προσθέτοντας ή αφαιρώντας κατάλληλα μέρη του δεύτερου αριθμού όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα(σχήμα 1).

$$43 - 27$$

27... Πήρα 20 τα έβγαλα από 43... για να πάρω 23... και πήρα τρία από 23 που γίνονται 20... και έβγαλα άλλα τέσσερα για να πάρω 16



Σχήμα 1

2.1) Στάση στη δεκάδα (A10). Η στρατηγική αυτή μπορεί να θεωρηθεί υποκατηγορία της συσσωρευτικής στρατηγικής (N10) ή ανεξάρτητη στρατηγική. Συμβολίζεται και με την συντομογραφία A10. Είναι μια στρατηγική που χρησιμοποιείται πολύ συχνά στην πράξη όταν κάνουμε νοερούς υπολογισμούς. Όπως στη στρατηγική συσσώρευσης κρατούμε σταθερό τον πρώτο όρο και προσθέτουμε ή αφαιρούμε μέρη από το δεύτερο όρο. Η ιδιαιτερότητα είναι ότι προσθέτουμε ή αφαιρούμε στον πρώτο όρο ένα τέτοιο αριθμό από το δεύτερο ώστε να φτάσει στην πλησιέστερη δεκάδα γιατί και ονομάζεται **στάση στη δεκάδα**.

$$48 + 27$$

Κρατώ τα 48 και προσθέτω 2 για να γίνουν 50... τώρα από τα 27 έμειναν 25... 50 που είχα και 25 είναι 75.

3) Μικτή στρατηγική διαχωρισμού και συσσώρευσης (10S). Πολλοί την ονομάζουν μέθοδο διαχωρισμού-άλματος (*split-jump method*), ή μικτή μέθοδο, ή μέθοδο 10S. Πρόκειται για ένα συνδυασμό της στρατηγικής διαχωρισμού και συσσώρευσης.

$$38 + 25$$

63..., επειδή, ξέρετε, έκανα 30 και 20 είναι 50 ... και 58 και ένα άλλο δύο από τα πέντε είναι 60 ... και έχω τρία δεξιά, έτσι 63.

Σε αυτήν την περίπτωση ο μαθητής χωρίζει και τους δύο αριθμούς: $38=30+8$ και $25=20+5$, προσθέτει $30+20=50$, προσθέτει το 8 (ο μεγαλύτερος των δύο μονάδων) στο 50, $(50+8=58)$ και προσθέτει άλλα δύο $58+2=60$ για να γεφυρώσει στις δεκάδες. Τέλος προσθέτει και τα υπόλοιπα 3, $60+3=63$.

4) Ολιστικές στρατηγικές. Αυτές οι στρατηγικές ονομάζεται ολιστικές γιατί οι αριθμοί χρησιμοποιούνται με ένα ολιστικό τρόπο, ονομάζεται επίσης και **“κοντά στα πολλαπλάσια του δέκα”** γιατί εφαρμόζονται συνήθως για αριθμούς που είναι κοντά στα πολλαπλάσια του δέκα. Η μέθοδος αυτή απαιτεί σύνθετους νοητικούς χειρισμούς και η χρήση της από τους μαθητές είναι συνήθως ένδειξη ευελιξίας για το μαθητή. Ευέλικτος είναι ο μαθητής ο οποίος μπορεί να επιλέγει και να εφαρμόζει σωστά την κατάλληλη στρατηγική σύμφωνα με τους αριθμούς που έχει μια πράξη. Με βάση τη στρατηγική αυτή οι μαθητές κάνουν προσθαφαιρέσεις στους όρους της πράξης, έτσι ώστε να προκύψουν αριθμοί οι οποίοι να μπορούν να προστεθούν ή να αφαιρεθούν πιο εύκολα. Οι ολιστικές στρατηγικές χωρίζεται σε δύο υποκατηγορίες:

Στρατηγική αντιστάθμισης (N10C). Για τη στρατηγική αυτή χρησιμοποιείται η συντομογραφία N10C διότι μπορεί να θεωρηθεί ως μια στρατηγική συσσώρευσης (N10) που κινείται στην πλησιέστερη δεκάδα. Η στρατηγική αντιστάθμισης (*compensation*) χρησιμοποιείται παρακάτω.

$$28 + 16$$

44 ... 30 και 16 θα ήταν 46... αν βγάλουμε δύο μας δίνουν 44.

Βλέπουμε εδώ ο μαθητής ξεκινάει με το 28 και το στρογγυλοποιεί στην πλησιέστερη δεκάδα που είναι το 30. Έτσι μπορεί να κάνει εύκολα την πρόσθεση $30+16=46$, αλλά στο τέλος αφαιρεί τον αριθμό που πρόσθεσε για να στρογγυλοποιήσει, δηλαδή το δύο $46-2=44$.

Στρατηγική εξισορρόπησης. Η στρατηγική αυτή μοιάζει με την προηγούμενη διαφέρει όμως στο εξής: ότι προσθαφαιρούμε στον πρώτο όρο της πράξης, το προσθαφαιρούμε και στον δεύτερο όρο ώστε οι δύο παρεμβάσεις να αλληλοεξουδετερώνονται και να έχουμε τελικό αποτέλεσμα μηδέν ή ισορροπία ($\alpha+\beta=\gamma \Rightarrow (\alpha-\nu)+(\beta+\nu)=\gamma$).

$$28 + 15$$

43 ... κάνω 30 το 28 και 13 το 15 ... και έχω 30 και 13 ίσον 43

Εδώ ο μαθητής στρογγυλοποιεί το 38 στην πλησιέστερη δεκάδα το 30 προσθέτοντας το δύο, αλλά αυτό το δύο το αφαιρεί από το 15 και γίνεται 13. Έτσι προσθέτει 30 και 13 και βρίσκει το 43.

5) Αρίθμηση. Εδώ οι μαθητές μετρούν βήμα – βήμα με βάση την ακολουθία των αριθμών, ξεκινούν από τον πρώτο όρο και ανεβαίνουν (πρόσθεση) ή κατεβαίνουν (αφαίρεση) τόσα βήματα όσα δείχνει ο δεύτερος όρος της πράξης. Η αρίθμηση είναι μια βασική μέθοδος που μαθαίνεται στην πρώτη σχολική ηλικία αλλά όταν χρησιμοποιείται όψιμα δείχνει αδυναμία στην εκτέλεση νοερών πράξεων. Η στρατηγική αυτή χωρίζεται σε δύο υποκατηγορίες ανάλογα με το αν οι μαθητές χρησιμοποιούν μονάδες ή δεκάδες στην αρίθμηση:

Αρίθμηση με μονάδες. Ξεκινώντας από τον ένα όρο, συνήθως το μεγαλύτερο, ανεβαίνουν ή κατεβαίνουν ένα – ένα, τόσα βήματα όσα είναι ο άλλος όρος.

$$38 + 25$$

63 ... είπα 38 και ένα 39 ... 40, 41, 42, ..., 63

Αρίθμηση με δεκάδες. Ξεκινώντας από τον ένα όρο, ανεβαίνουν ή κατεβαίνουν ανά δέκα ή άλλους αριθμούς σύμφωνα με τον τρόπο που αναλύουν τον άλλο όρο της πράξης.

$$63 - 25$$

38 ... σκέφτηκα 63 βγάξω 10, 53, βγάξω άλλα 10, 43... βγάξω 3, 40, βγάξω 2, 38.

Εδώ ο μαθητής ξεκινά από τον πρώτο όρο το 63 στην αρχή κατεβαίνει ανά 10 και στη συνέχεια ανά 3 και 2. Αναλύει δηλαδή τον αριθμό 25 σε $10+10+3+2$.

6) Νοητική αναπαράσταση του τυπικού αλγορίθμου. Εδώ χρησιμοποιείται νοερά η μέθοδος του τυπικού γραπτού αλγορίθμου της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης. Δηλαδή τοποθετούν τους αριθμούς τον ένα κάτω από τον άλλον, όπως στο χαρτί, και εκτελούν την πράξη, από δεξιά προς τα αριστερά.

$$38 + 25$$

63 ... είπα 8 και 5 κάνει 13 ... τρία και ένα το κρατούμενο... ένα και δύο, τρία και τρία 6... άρα 63.