ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Θέμα:
Η μοντελοποίηση στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος: Εντοπισμός ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ μαθητών Δημοτικού και φοιτητών Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης, κατά την ενασχόλησή τους με αυθεντικά προβλήματα μοντελοποίησης.

Φοιτήτρια: **Μήτσου Ευσταθία**

Α.Μ.: 2019

Υπεύθυνοι Καθηγητές:

Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος
Λεμονίδης Χαράλαμπος

Φλώρινα, Μάιος 2010

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1. Εισαγωγή....4
2. Λύση προβλήματος στα Μαθηματικά....5
3. Διανοητικές διαδικασίες που εμπλέκονται στην επίλυση προβλημάτων....7
4. Παραδοσιακή διδασκαλία στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος – ανάγκη για αλλαγή....8
5. Μοντέλο – Μαθηματικό μοντέλο – Μοντελοποίηση....12
    5.1. Μοντέλο....12
    5.2. Μαθηματικό μοντέλο.....12
    5.3. Μοντελοποίηση....13
6. Η έννοια του μοντέλου και της μοντελοποίησης....15
    6.1. Φυσικά και συμβολικά μοντέλα....15
    6.2. Νοητικά και εννοιολογικά μοντέλα....15
    6.3. Επιστημολογικές προεκτάσεις της μοντελοποίησης....17
7. Η μοντελοποίηση στη διδασκαλία και τη μάθηση....19
8. Αρχές μοντελοποίησης....21
9. Στάδια μοντελοποίησης....23
10. Η χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών κατά την εφαρμογή δραστηριοτήτων μοντελοποίησης....25

Β. ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1. Σκοπός της έρευνας.....26
2. Μεθοδολογία.....26
    2.1. Υποκείμενα.....26
    2.2. Προβλήματα.....26
    2.3. Δραστηριότητα.....29
    2.4. Συλλογή Δεδομένων και Ανάλυση.....30
3. Αποτελέσματα.....31
    3.1. Διαδικασίες Μοντελοποίησης και μαθηματικές έννοιες των Μαθητών Δημοτικού.....34
    3.2. Διαδικασίες Μοντελοποίησης και μαθηματικές έννοιες των Φοιτητών Π.Τ.Δ.Ε.....36
    3.3. Σύγκριση μαθητών δημοτικού και φοιτητών όσον αφορά στις διαδικασίες μοντελοποίησης και τις μαθηματικές έννοιες.....38
4. Συμπεράσματα.....46
5. Βιβλιογραφία.....47
6. Παράρτημα.....52

Α. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1. Εισαγωγή

Στη σύγχρονη κοινωνία της πληροφορίας και της γνώσης, όπου ο άνθρωπος κατακλύζεται συνεχώς από δεδομένα, επιτακτική ανάγκη αποτελεί ο επαναπροσδιορισμός της φύσης των μαθηματικών. Απώτερος στόχος είναι η δημιουργία πολιτών που θα διαθέτουν πληθώρα δεξιοτήτων όπως για παράδειγμα ευελιξία, δημιουργικότητα και πρωτοτυπία, δεξιότητες οι οποίες απαιτούνται από τους επαγγελματικούς χώρους και είναι απαραίτητες για την επίλυση σύνθετων προβληματικών καταστάσεων[1]. Στους βασικούς σκοπούς της διδασκαλίας των μαθηματικών, δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης, συμπεριλαμβάνονται η εφαρμογή από τους μαθητές βασικών αρχών της μαθηματικής μοντελοποίησης, η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων μιας έννοιας, η τεκμηρίωση και η αιτιολόγηση υποθέσεων και η αξιοποίηση των πλεονεκτημάτων των νέων τεχνολογιών στην ανάλυση, διαχείριση και επίλυση προβλημάτων. Οι μαθητές μπαίνουν στη διαδικασία να ασχοληθούν με σύνθετα προβλήματα τα οποία περιέχουν μαθηματικές διαδικασίες, όπως η διατύπωση υποθέσεων, η μοντελοποίηση ενός προβλήματος, η οργάνωση δεδομένων και ο αναστοχασμός στην πορεία λύσης[2].

Η παρούσα εργασία στο πρώτο μέρος της καταπιάνεται με μια βιβλιογραφική ανασκόπηση στο θέμα της μοντελοποίησης, στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Στο δεύτερο μέρος της εστιάζεται στη διερεύνηση των διαδικασιών μοντελοποίησης που χρησιμοποιούν μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού και φοιτητές του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης, κατά την ενασχόλησή τους με προβλήματα μοντελοποίησης. Η διερεύνηση αυτή θα οδηγήσει σε συμπεράσματα για την επίδοση των μαθητών του Δημοτικού και των φοιτητών του Παιδαγωγικού τμήματος σε τέτοιου είδους

[1] English, L.D. (2003). Reconciling theory, research, and practice: A models and modeling perspective. *Educational Studies in Mathematics, 54*, σσ. 225–248.

[2] National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

δραστηριότητες. Ακόμη, θα επιχειρήσει να πραγματοποιήσει μια σύγκριση μαθητών – φοιτητών, για τον εντοπισμό ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ των ομάδων διαφορετικών βαθμίδων, δημοτικού και πανεπιστημίου, όσον αφορά τις διαδικασίες μοντελοποίησης και τις μαθηματικές έννοιες που χρησιμοποιούν.

2. Λύση προβλήματος στα Μαθηματικά

Η επίλυση μαθηματικού προβλήματος αποτελεί την καρδιά της διδασκαλίας των μαθηματικών και η ικανότητα των παιδιών να επιλύουν προβλήματα αντανακλά το επίπεδο της μαθηματικής σκέψης, περιλαμβάνοντας τόσο τη δημιουργική όσο και τη κριτική σκέψη. Γι' αυτό και η σύγχρονη διδακτική θεωρία και τα νέα αναλυτικά προγράμματα της Ελλάδας[3] δίνουν μεγάλη σημασία στο ρόλο της λύσης προβλήματος για τη διδασκαλία των μαθηματικών.

Η επίλυση προβλημάτων, με την γενική έννοια του όρου, είχε στα προηγούμενα αναλυτικά προγράμματα και σχολικά εγχειρίδια τον πολύ περιορισμένο ρόλο της απλής εφαρμογής των ήδη διδαχθέντων. Σήμερα αντίθετα αποκτά κεντρικό ρόλο και καθορίζει αποφασιστικά το πνεύμα της διδακτικής διαδικασίας. Η λογική της επίλυσης του προβλήματος χρησιμοποιείται πλέον για την εισαγωγή νέων εννοιών και για τη δημιουργία διδακτικών καταστάσεων ή καταστάσεων προβληματισμού. Η λογική αυτή λοιπόν αποτελεί ένα νέο στοιχείο, που εισάγεται τώρα στα Μαθηματικά του Δημοτικού. Στα πλαίσια αυτής της λογικής διδάσκονται επίσης τα πρωτότυπα προβλήματα ή προβλήματα έρευνας, τα οποία αποσκοπούν στην καλλιέργεια γενικότερων ικανοτήτων οι οποίες σχετίζονται με την μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων και γενικότερα του τρόπου λογικής αντιμετώπισης κάποιων καταστάσεων. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι οι προβληματικές καταστάσεις που προτείνονται στους μαθητές, θα πρέπει να διαπνέονται από ένα πνεύμα περισσότερου και πιο δημιουργικού προβληματισμού.

[3] *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.)*. (2002). Υπουργείο παιδείας και Θρησκευμάτων, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Ο όρος «επίλυση μαθηματικού προβλήματος (ΕΜΠ)» έχει χρησιμοποιηθεί με διάφορες σημασίες, οι οποίες αρχίζουν από την απλή εκτέλεση ασκήσεων μνήμης και φτάνουν μέχρι τη δημιουργία μαθηματικών από τον επαγγελματία επιστήμονα[4].

Ο Polya (1957) θεωρεί την ΕΜΠ ως δεξιότητα που μπορεί να διδαχθεί με μίμηση προτείνοντας μια σειρά από ερωτήσεις με τις οποίες ο διδάσκων οδηγεί το μαθητή στην επίλυση.

Ο Hayes (1981, στο Mayer, 1985) περιγράφει την επίλυση προβλήματος ως την εύρεση του κατάλληλου δρόμου για να γεφυρωθεί το χάσμα μεταξύ της δοσμένης προβληματικής κατάστασης και της λύσης. Προκειμένου να μπορέσει μάλιστα ο μαθητής να οδηγηθεί στη λύση θα πρέπει να κατέχει ένα ρεπερτόριο γνωστικών δεξιοτήτων και στρατηγικών και να είναι ευέλικτος στη χρήση μεταγνωστικών δεξιοτήτων οι οποίες θα του επιτρέπουν να ελέγχει την όλη πορεία επίλυσης της προβληματικής κατάστασης. Σύμφωνα με τον Mayer (1985), εξάλλου, η ΕΜΠ δεν είναι τίποτα άλλο παρά η μετάβαση από μια δεδομένη κατάσταση σε μια άλλη που αποτελεί το στόχο. Κύρια χαρακτηριστικά της διαδικασίας ΕΜΠ είναι η νοητική αναπαράσταση του προβλήματος και η ανακάλυψη των μέσων για την επίλυσή του[5].

[4] Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (Ch. 15) New York: Simon & Schuster Macmillan.

[5] Mayer, R. E. (1985). *Implications of Cognitive Psychology for Instruction Mathematical Problem Solving. In E. A. Silver (Ed.), Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates,* σσ.123-139.

3. Διανοητικές διαδικασίες που εμπλέκονται στην επίλυση προβλημάτων

Στην προσπάθειά μας να λύσουμε ένα πρόβλημα, αναπόφευκτα στηριζόμαστε σε προηγούμενες εμπειρίες. Οι μπιχεβιοριστές θεώρησαν ότι η μάθηση αποτελεί την έννοια κλειδί για κάθε συμπεριφορά που εμφανίζεται κατά την επίλυση προβλημάτων. Πρόκειται για ένα μοντέλο ενίσχυσης, που στηρίζεται στη σχέση ερέθισμα – αντίδραση και εξηγεί τη συμπεριφορά επίλυσης προβλημάτων ως αποτέλεσμα μάθησης παρόμοιων συνδέσεων ανάμεσα σε ερεθίσματα και αντιδράσεις. Δια μέσου της μάθησης έχουμε σταδιακή συγκρότηση μιας αλυσίδας αντιδράσεων σε συγκεκριμένα ερεθίσματα.

Η γνωστική προσέγγιση αντιστρέφει κάπως τα πράγματα εφόσον υιοθετεί την εκδοχή ότι η μάθηση προϋποθέτει αρκετές δραστηριότητες που αφορούν τη συμπεριφορά επίλυσης προβλημάτων και όχι το αντίστροφο. Δηλαδή πολλοί θεωρητικοί αντιτάσσονται στην άποψη ότι η μάθηση είναι μια παθητική διαδικασία, διαμέσου της οποίας διαμορφώνονται συνδέσεις διαφορετικής ισχύος, και πιστεύουν, αντίθετα, ότι η μάθηση συνιστά μια ενεργητική διαδικασία σύγκρισης και συμπλήρωσης των εσωτερικών παραστάσεων της μνήμης. Η ίδια η διεργασία σύγκρισης μπορεί να θεωρηθεί μια μορφή επίλυσης προβλημάτων.[6]

- Μάθηση και επίλυση προβλημάτων

Η μάθηση και η επίλυση προβλημάτων έχουν πολλά κοινά σημεία. Κάθε φορά που προσπαθούμε να λύσουμε ένα πρόβλημα, επιστρατεύουμε παλαιότερες εμπειρίες. Κάθε φορά που επινοούμε μια νέα τεχνική για την επίλυση προβλημάτων, την προσθέτουμε στο σύνολο των γνωστών διεργασιών. Κατά συνέπεια, δεν είναι απαραίτητο να χαράξουμε μια σαφή διαχωριστική γραμμή ανάμεσα στους δύο αυτούς τομείς.

[6] Καραγεώργος, Δ. (2003). *Διδακτική των Θετικών Επιστημών: Εισαγωγή στη Διδακτική Διαδικασία*. Εκδόσεις Σαββάλας. Αθήνα, σελ. 172.

- Αντίληψη και επίλυση προβλημάτων

Επίσης, η αντίληψη και η επίλυση προβλημάτων συνδέονται στενά μεταξύ τους. Πολλοί Ψυχολόγοι που έδιναν μεγάλη σημασία στην αντιληπτική διαδικασία και οργάνωση των ερεθισμάτων, πίστευαν ότι η επίλυση προβλημάτων στηρίζεται σε μια ενορατική ενέργεια που αντιστοιχεί στην ορθή αντίληψη της δομής του προβλήματος. Η θέση αυτή ταυτίζεται και με τα πιστεύω πολλών μαθηματικών όσον αφορά τις δυνατότητες ενός μαθητή στην επίλυση προβλημάτων. Πολλοί μαθηματικοί ισχυρίζονται, χωρίς αιτιολόγηση, ότι το να είναι κάποιος καλός λύτης προβλημάτων είναι θέμα αντίληψης. Δεν έχουν καθοριστεί με σαφήνεια οι διεργασίες επίλυσης προβλημάτων, υπάρχει μόνο μια πρόσφατη δομική περιγραφή (με τη βοήθεια υπολογιστών) των αντιλήψεων και των διεργασιών που τις παράγουν και ένας προσδιορισμός της αλληλεπίδρασης ανάμεσα στις αντιληπτικές ικανότητες και στις ικανότητες επίλυσης προβλημάτων.

Φαίνεται ότι υπάρχει μια αλληλεπίδραση ανάμεσα στην αντίληψη και στην επίλυση προβλημάτων και γι' αυτό διατηρείται το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών. Το σημείο εκείνο στο οποίο συμφωνούν οι ερευνητές είναι ότι ο λύτης πρέπει να έχει ισχυρό κίνητρο και καθόλου άγχος ή αγωνία για να προχωρήσει στη λύση[7].

4. Παραδοσιακή διδασκαλία στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος – ανάγκη για αλλαγή

Στη σύγχρονη κοινωνία μας επιτακτική ανάγκη αποτελεί ο επαναπροσδιορισμός της φύσης των μαθηματικών, με απώτερο στόχο τη δημιουργία πολιτών που θα διαθέτουν πληθώρα δεξιοτήτων όπως για παράδειγμα ευελιξία, δημιουργικότητα και πρωτοτυπία[8].

[7] Καραγεώργος, Δ. (2003). ό.π., σσ. 172 – 174.

[8] English, 2003, ό.π. σσ. 225–248.

Σύμφωνα με ευρήματα πρόσφατων ερευνών στη μαθηματική εκπαίδευση**,** τα παιδιά μέσα από την παραδοσιακή διδασκαλία, τείνουν να χρησιμοποιούν στατιστικές διαδικασίες, όπως για παράδειγμα την εύρεση του μέσου όρου «τυφλά» ξεκομμένα από το περιεχόμενο του προβλήματος και από το τι πραγματικά τους ζητά η δραστηριότητα. Οι μαθητές μέσα από την παραδοσιακή διδασκαλία, δεν είναι προετοιμασμένοι να επιλύουν προβλήματα τα οποία εμφανίζονται εκτός του σχολικού χώρου και να κάνουν συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών και του πραγματικού κόσμου[9,10].

Η ανεπάρκεια της παραδοσιακής προσέγγισης, φαίνεται περισσότερο στην περίπτωση όπου οι μαθητές εργάζονται με προβλήματα, τα οποία είναι λιγότερο φανερά συνδεδεμένα με τα μαθηματικά του σχολείου και στις περιπτώσεις όπου τους ζητείται να αντιμετωπίσουν μη οικίες καταστάσεις που απαιτούν ευέλικτη και δημιουργική σκέψη[11,12]. Παρόλο που τα παραδοσιακά θέματα των σχολικών μαθηματικών είναι θεμελιώδη στη δουλεία των μηχανικών, αρχιτεκτόνων και εμπορικών διαχειριστών, η μέθοδος μέσα στην οποία τα μαθηματικά είναι ανεπτυγμένα και συνδεδεμένα, αναδημιουργείται για την περίσταση και δεν είναι μέσα στον επίσημο μαθηματικό τρόπο που μαθαίνεται στο σχολείο. Ως εκ τούτου, οι χρήστες δεν αναγνωρίζουν τη σχέση ανάμεσα στα μαθηματικά που διδάχτηκαν στο σχολείο και στα μαθηματικά που χρησιμοποιούν σε περιβάλλοντα επίλυσης προβλήματος, με αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας ευρύτερης πεποίθησης ότι τα εφαρμοσμένα προβλήματα της πραγματικής ζωής , είναι δύσκολα είδη προβλημάτων για επίλυση.

Κατά την παραδοσιακή διδασκαλία, οι μαθητές μόνο στα τελικά στάδια της επίλυσης προβλημάτων επεξεργάζονται ρεαλιστικά και πολύπλοκα εφαρμοσμένα

---

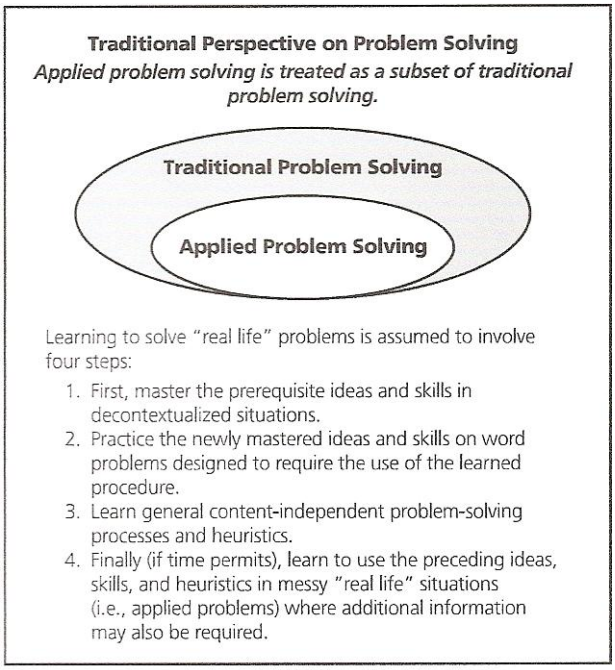
[9] Doerr, H., & English, L. D. (2003). *A Modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. Journal of Research in Mathematics Education*, 34, 2, σσ. 110-136.

[10] Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *Zentralblatt für Didaktik der* Mathematik (International Reviews in Mathematics Education), 37, 3, σσ. 149-158.

[11] Lesh, R., & Doerr, H.M. (2003). *Beyond Constructivism: A Models and Modeling* Perspective on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

[12] English, L., & Lesh, R. (2003). Ends-in-view problems. In R. Lesh and H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models & modeling perspective on mathematics problem solving, learning & teaching.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc, σσ. 297–316.

προβλήματα, αφού αυτά αποτελούν μόνο ένα μικρό υποσύνολο των εμπειριών επίλυσης προβλήματος.



Η παραδοσιακή διδασκαλία επίλυσης προβλημάτων της καθημερινής ζωής , όπως διαφαίνεται από το παραπάνω διάγραμμα, περιλαμβάνει τα ακόλουθα τέσσερα στάδια[13]:

- Ενδυνάμωση των προαπαιτούμενων ιδεών και δεξιοτήτων σε αποπλαισιωμένες καταστάσεις.
- Εξάσκηση των νέων ενδυναμωμένων ιδεών και δεξιοτήτων σε λεκτικά προβλήματα, που σχεδιάστηκαν για τη χρήση των διαδικασιών που οι μαθητές έχουν ήδη μάθει.
- Εκμάθηση γενικών διαδικασιών και ευρετικών μεθόδων, για την επίλυση προβλημάτων ανεξάρτητων από το πλαίσιό τους.

[13] Lesh, R., & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Greenwich, CT: Information Age Publishing, σσ. 763-804.

- Χρήση, αν υπάρχει περίσσευμα χρόνου, προηγούμενων ιδεών και ευρετικών μεθόδων, σε προβληματικές καταστάσεις της καθημερινής ζωής (εφαρμοσμένα προβλήματα), όπου πολύ πιθανόν να απαιτούνται και επιπρόσθετες πληροφορίες.

Μια άλλη συνέπεια της παραδοσιακής διδασκαλίας και κατ' επέκταση της χρήσης λεκτικών μη πρωτότυπων προβλημάτων, αποτελεί η προσκόλληση των μαθητών στην εύρεση λέξεων κλειδιών που θα τους οδηγήσουν στην επιτυχή λύση του προβλήματος. Μάλιστα, αυτό έχει ως αποτέλεσμα την ανικανότητα επίλυσης του προβλήματος από μέρος των μαθητών, αν παρουσιαστεί οποιαδήποτε τροποποίηση στη διατύπωση του προβλήματος[14].

Η λύση μαθηματικού προβλήματος, σύμφωνα με το National Research Council[15], απαιτείται να αντιμετωπίζεται με δεδομένα και παρατηρήσεις από τον πραγματικό κόσμο και την επιστήμη. Για τη βελτίωση των ικανοτήτων επίλυσης προβλημάτων, οι μαθητές πρέπει να εργαστούν με προκλητικά προβλήματα του πραγματικού κόσμου, χρησιμοποιώντας τις προηγούμενές τους εμπειρίες και μαθαίνοντας στρατηγικές, στοιχεία τα οποία πρέπει να αντανακλώνται στις λύσεις τους. Η επίλυση προβλήματος είναι κάτι περισσότερο από απλοί υπολογιστική ικανότητα. Είναι μια διαδικασία, η οποία εμπεριέχει παρατηρήσεις μοτίβων, δοκιμές, διατύπωση υποθέσεων και αξιολόγηση αποτελεσμάτων.

[14] Schoenfeld, A. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. In J. Voss, D. Perkins and J. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, σσ. 311-343.

[15] National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. J. Kilpatrick, J. Swafford, and B. Findell (Eds). Mathematics Learning Subcommittee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.

5. Μοντέλο – Μαθηματικό μοντέλο – Μοντελοποίηση

5.1. Μοντέλο

Αν προσπαθήσουμε να περιγράψουμε μια εντύπωση, μια σκέψη ή μια πραγματική κατάσταση, το αποτέλεσμα της περιγραφής είναι ένα μοντέλο. Όπως είναι κατανοητό, σπάνια μπορούμε να συμπεριλάβουμε όλες τις σκέψεις μας στο μοντέλο αυτό, γι' αυτό και παραλείπουμε κάποιες λεπτομέρειες. Οι διαφορετικές εκδοχές που μπορούμε να δώσουμε στην περιγραφή μας, χρειάζονται και την κατάλληλη γλώσσα για να διατυπωθούν, π.χ. μεταφορική, μαθηματική κλπ. Αν η γλώσσα που χρησιμοποιήσαμε είναι μαθηματική, τότε το αποτέλεσμα είναι ένα μαθηματικό μοντέλο της εντύπωσης, της σκέψης μας ή της πραγματικής κατάστασης που περιγράψαμε. Είναι κατανοητό ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε πολλά μοντέλα της ίδιας κατάστασης, ανάλογα με το ποιες και πόσες λεπτομέρειες θα λάβουμε υπόψη μας.

Συνήθως, με σκοπό να ενισχύσουμε την άποψη που θέλουμε να προβάλλουμε, αγνοούμε τις λεπτομέρειες. Έτσι, η έννοια του μοντέλου δεν χρησιμοποιείται μόνο σαν μια «ισόμορφη» απεικόνιση της πραγματικότητας ή με την τεχνική έννοια που έχει ο όρος αυτός στη μαθηματική λογική. Αντίθετα, μας βοηθάει να αναλύσουμε μια κατάσταση ή και να μεταδώσουμε μια σκέψη μας. Ακόμα και τα απλά προβλήματα των τεσσάρων πράξεων, είναι απλοποιημένα μοντέλα πραγματικών προβλημάτων.[16]

5.2. Μαθηματικό μοντέλο

Στις επιστήμες, όταν ζητάμε την τιμή μιας ποσότητας που δεν μπορούμε να υπολογίσουμε δια μέσου απευθείας μετρήσεων, χρησιμοποιούμε μεταβλητές x,y,z,t,… για να συμβολίσουμε αυτή την ποσότητα αλλά, ενδεχομένως, και κάποιες άλλες που μεταβάλλονται μαζί της. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε νόμους της φυσικής, της χημείας, της βιολογίας κλπ. ανάλογα με τη φύση του προβλήματος, καθώς και οποιαδήποτε άλλη

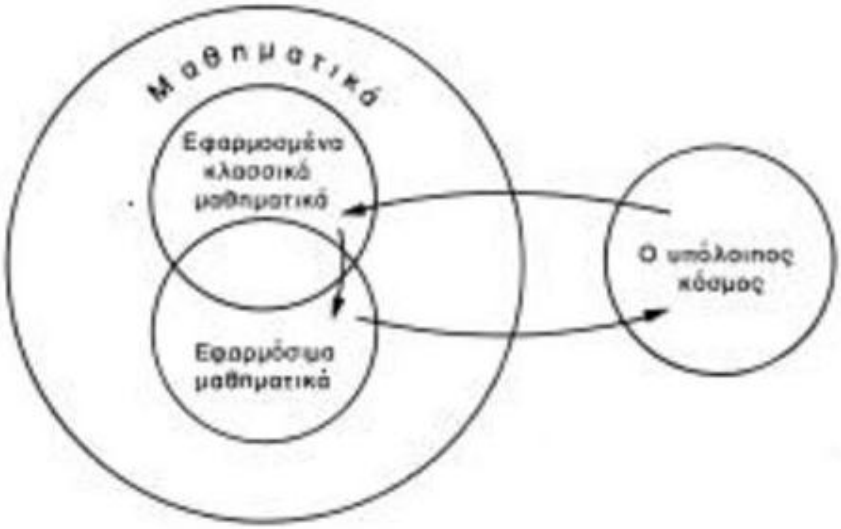
[16] Κλαουδάτος, Ν. (1990). *Μοντελοποίηση: Ένα ισχυρό διδακτικό εργαλείο*. περιοδικό Ευκλείδης Γ΄, τόμος 7, τεύχος 25. σελ. 45.

πληροφορία που διαθέτουμε, για να δημιουργήσουμε σχέσεις ανάμεσα στις μεταβλητές. Το σύνολο των μεταβλητών και των σχέσεων ανάμεσα στις μεταβλητές, αποτελεί ένα μαθηματικό μοντέλο.

Το μαθηματικό μοντέλο είναι ένα μοντέλο που αποτελείται από μαθηματικές έννοιες, όπως σταθερές, μεταβλητές, συναρτήσεις, εξισώσεις, ανισώσεις κλπ. και οι οποίες μπορούν να παρασταθούν είτε συμβολικά είτε γραφικά.[17]

5.3. Μοντελοποίηση

Ένας από τους πρώτους που επιχείρησαν να επεξεργαστούν τις έννοιες του μοντέλου και της μοντελοποίησης, ώστε να τις καταστήσουν διδακτικά αξιοποιήσιμες, ήταν ο Pollak. Το 1976 ο Pollak παρουσίασε τη διάλεξη με θέμα « Η αλληλεπίδραση ανάμεσα στα Μαθηματικά και στα υπόλοιπα σχολικά μαθήματα»[18], όπου διευκρινίζει το περιεχόμενο της έννοιας Applied Mathematics (εφαρμοσμένα μαθηματικά) και παρουσίασε μια σχηματική αναπαράσταση της αλληλεπίδρασης των Μαθηματικών με τον κόσμο.



[17] Κλαουδάτος, Ν. (1990), ό.π. σελ 45.

[18] Pollak, H. O. *The interaction between mathematics and other school subjects*. Unesco 1979, New trends in mathematics teaching, 4.

Σύμφωνα με τον Pollak, το αριστερό μέρος του σχήματος δείχνει τα Μαθηματικά σαν ολότητα που περιέχει δύο τεμνόμενα υποσύνολα, τα εφαρμοσμένα κλασσικά μαθηματικά και τα εφαρμόσιμα μαθηματικά. Τα δύο αυτά υποσύνολα έχουν κοινό μέρος αλλά δεν ταυτίζονται. Υπάρχουν κλάδοι των Μαθηματικών που δεν έχουν ορατές εφαρμογές και κλάδοι όπως η Στατιστική, οι Πιθανότητες, η Γραμμική Άλγεβρα με πολλές πρακτικές εφαρμογές. Τα πιο πολλά από τα σχολικά μαθηματικά είτε ανήκουν στα εφαρμοσμένα μαθηματικά π.χ. Άλγεβρα, Τριγωνομετρία και Γεωμετρία, είτε στα εφαρμόσιμα μαθηματικά π.χ. Στατιστική και Πιθανότητες. Τέλος στο δεξιό μέρος του σχήματος είναι «ο υπόλοιπος κόσμος» που περιέχει τις άλλες επιστήμες, τις ανθρώπινες δραστηριότητες και την καθημερινή ζωή.

Το πιο ενδιαφέρον χαρακτηριστικό του σχήματος είναι τα βέλη, που αντιπροσωπεύουν μια δραστηριότητα ανακύκλωσης. Με αφετηρία μια πραγματική κατάσταση ή ένα πραγματικό πρόβλημα, μεταφερόμαστε στο άλλο μέρος του σχήματος όπου χρησιμοποιούμε ή αναπτύσσουμε τα κατάλληλα μαθηματικά και στη συνέχεια επιστρέφουμε πάλι στην αρχική κατάσταση όπου ερμηνεύουμε ή εφαρμόζουμε τα μαθηματικά αποτελέσματα ή ακόμα κάνουμε τον «κύκλο» από την αρχή αν τα αποτελέσματά μας δεν είναι ικανοποιητικά. Η ανακύκλωση αυτή ονομάζεται μοντελοποίηση και από τη σκοπιά της διδακτικής, προσανατολίζει τη διδασκαλία προς τις διαδικασίες ή δραστηριότητες σε αντίθεση με την παραδοσιακή αντίληψη της κυριαρχίας του περιεχομένου[19].

[19] Κλαουδάτος, Ν. (1990), ό.π. σσ. 42 – 65.

6. Η έννοια του μοντέλου και της μοντελοποίησης

6.1. Φυσικά και συμβολικά μοντέλα

Οι άνθρωποι στην προσπάθειά τους να κατανοήσουν τον κόσμο, να ερμηνεύσουν τα διάφορα φαινόμενα, να κάνουν προβλέψεις για τη συμπεριφορά διαφόρων συστημάτων αλλά και για να ενεργήσουν πάνω σε αυτά, επιστρατεύουν τις συμβολικές, παραστατικές και δημιουργικές τους ικανότητες δημιουργώντας πραγματικά ή συμβολικά κατασκευάσματα που μιμούνται ή αναπαριστούν – σε μια ιδεατή μορφή – στοιχεία ή πτυχές της πραγματικότητας[20]. Τα κατασκευάσματα αυτά ονομάζονται μοντέλα και μπορούν να έχουν – σε επίπεδο δομής – αναλογικές και τοπολογικές ομοιότητες (φυσικά μοντέλα δύο ή τριών διαστάσεων ή ομοιώματα) ή να συνιστούν συμβολικές κατασκευές που δεν σχετίζονται φαινομενολογικά με το προς αναπαράσταση σύστημα[21,22]. Στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει το καθεστώς εγκυρότητάς τους αναφερόμαστε σε νοητικά μοντέλα και εννοιολογικά μοντέλα[23].

6.2. Νοητικά και εννοιολογικά μοντέλα

Όταν αλληλεπιδρούμε με τον κόσμο (τους άλλους ανθρώπους, το περιβάλλον, τα εργαλεία) δημιουργούμε *νοητικά μοντέλα* τα οποία στη συνέχεια μας παρέχουν ένα πλαίσιο με προβλεπτική και επεξηγηματική ισχύ για την κατανόηση αυτής της αλληλεπίδρασης. Τα νοητικά μοντέλα δημιουργούνται από τους ανθρώπους και απαιτούν ένα *σύστημα – στόχο* ή ένα *φαινόμενο*, ενώ συνήθως δεν ταυτίζονται με το *εννοιολογικό μοντέλο* αυτού του συστήματος[24]. Το *εννοιολογικό μοντέλο* είναι μια ανακάλυψη των επιστημόνων, των μηχανικών ή των εκπαιδευτικών που προσφέρει μια κατάλληλη

[20] Ράπτης Α. & Ράπτη Α, (2002). *Μάθηση και Διδασκαλία στην Κοινωνία της Πληροφορίας, Ολική Προσέγγιση*. Αθήνα.

[21] Κουλαϊδής Β. (επιμ.), (1994). *Αναπαραστάσεις του Φυσικού Κόσμου*. Αθήνα: Gutenberg.

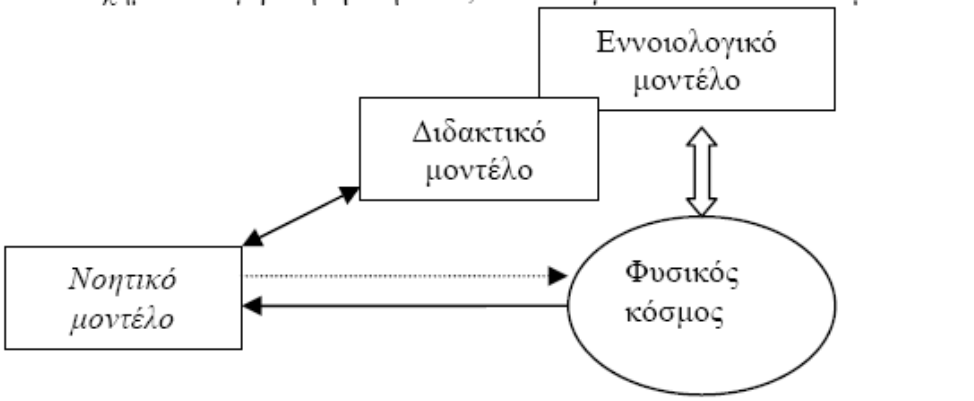
[22] Βοσνιάδου Σ., (1998). *Γνωσιακή Ψυχολογία*. Αθήνα: Gutenberg.

[23] Gentner, D., & Stevens, A.L., Eds. (1983). *Mental Models*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

[24] Norman D., (1983). Some Observations on Mental models. In Gentner, D., & Stevens, A.L., Eds. *Mental Models*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, σσ. 7-14.

αναπαράσταση του συστήματος που αναπαριστά υπό την έννοια ότι είναι ορθό, συνεπές και πλήρες. Τα εννοιολογικά μοντέλα που κατασκευάζονται από τους επιστήμονες αποκαλούνται και *επιστημονικά μοντέλα* ενώ τα εννοιολογικά μοντέλα που κατασκευάζονται από τους εκπαιδευτικούς ή τους δημιουργούς αναλυτικών προγραμμάτων και εγχειριδίων ονομάζονται *διδακτικά μοντέλα*. Τα διδακτικά μοντέλα προκύπτουν συνήθως μέσω διαδικασιών διδακτικού μετασχηματισμού των επιστημονικών μοντέλων και θεωριών (σχήμα 1).

Σχήμα 1: Συγκρότηση νοητικών, εννοιολογικών και διδακτικών μοντέλων



Τα νοητικά μοντέλα έχουν μια σειρά από χαρακτηριστικά, η κατανόηση των οποίων είναι απαραίτητη για την αξιοποίησή τους σε μαθησιακές και επιστημονικές δραστηριότητες. Αφενός, είναι ατελή και ασταθή με δυσδιάκριτα όρια εφαρμογής. Αφετέρου, η επιστημονική εγκυρότητά τους είναι σε μεγάλο βαθμό αμφισβητήσιμη ενώ ο χώρος εφαρμογής τους είναι συνήθως περιορισμένος[25].

Η γνώση των νοητικών μοντέλων των μαθητών φαίνεται να είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την κατανόηση των γνωστικών τους δομών. Τα νοητικά μοντέλα στο πλαίσιο μιας δομητιστικής προσέγγισης θεωρούνται ατομικές κατασκευές, οι οποίες προκύπτουν μέσω της αλληλεπίδρασης με τους άλλους και την πραγματικότητα[26] ενώ στο πλαίσιο μιας κοινωνικο-πολιτισμικής προσέγγισης ως συλλογικά κατασκευάσματα,

[25] Norman, 1983. ό.π.

[26] Doise W., Mugny G., (1981). *Le développement social de l'intelligence*. Paris, Interéditions.

προϊόν της εσωτερίκευσης κοινωνικών διεργασιών και αλληλεπιδράσεων[27]. Τα εννοιολογικά μοντέλα είναι κοινωνικές κατασκευές που συνδέονται στενά με την ανάπτυξη της επιστήμης και της επιστημονικής σκέψης. Ως δημιουργίες επιστημονικών θεωριών, έχουν παραδειγματική ισχύ και εξελίσσονται ή διαψεύδονται μέσα στην ανθρώπινη ιστορία και τον πολιτισμό.

Ένα μοντέλο, ως μια αναπαράσταση ενός προβλήματος, μιας διαδικασίας, μιας ιδέας ή ενός συστήματος δεν είναι ποτέ ένα ακριβές αντίγραφο αλλά αναπαριστά κάποια ή κάποιες πτυχές της δομής, των ιδιοτήτων ή της συμπεριφοράς αυτού που είναι το μοντέλο. Παίρνει διάφορες μορφές όπως διαγράμματα, μαθηματικούς τύπους, φυσικές κατασκευές ή σύνολο από λογικές καταστάσεις. Ένα μοντέλο αποτελείται από μια συλλογή *οντοτήτων* που έχουν σαφώς προκαθορισμένες *ιδιότητες* και μπορούν να συσχετιστούν μεταξύ τους με καλώς προσδιορισμένους *κανόνες* ή *σχέσεις*. Σκοπός του μοντέλου είναι να προσομοιώσει με ακρίβεια τις ουσιαστικές πτυχές ενός συγκεκριμένου χώρου της πραγματικότητας.

Τα μοντέλα έχουν συνεπώς λειτουργίες *επεξηγηματικές* και *αναπαραστασιακές* καθώς και λειτουργίες *πρόβλεψης*. Για τον επιστήμονα, το έργο της μοντελοποίησης συνίσταται στο να βρει μια σειρά από παραμέτρους και καταστάσεις που επιτρέπουν να εξηγήσει τα φαινόμενα που μελετά. Επιπρόσθετα, ένα μοντέλο είναι ένα νέο αντικείμενο (συγκεκριμένο ή συμβολικό) που δημιουργείται κατά κανόνα για να αναπαραστήσει ένα αντικείμενο που δεν είναι άμεσα προσβάσιμο. Η μοντελοποίηση συνίσταται στην οικοδόμηση ερμηνειών που έχουν κατά κάποιο τρόπο αυτόνομη λειτουργία με στόχο την πρόβλεψη μιας εξελικτικής διαδικασίας και μεταβολής ενός συστήματος χωρίς να υπάρχει ανάγκη να παρατηρείται άμεσα η πραγματικότητα.

6.3. Επιστημολογικές προεκτάσεις της μοντελοποίησης

Η επιστημονική πρακτική εμπερικλείει την οικοδόμηση, την εγκυροποίηση και την εφαρμογή επιστημονικών μοντέλων ενώ η επιστημονική κατανόηση αναδύεται από τη

[27] Vygotsky L., (1962). *Thought and Language*, MIT PRESS.

δημιουργία και τη χρήση μοντέλων, δηλαδή από τη μοντελοποίηση[28]. Τα μοντέλα είναι σημαντικά στην επιστημονική έρευνα αφού χρησιμεύουν για τη διατύπωση υποθέσεων που πρέπει να ελεγχθούν και για την περιγραφή επιστημονικών φαινομένων. Συνακόλουθα, η διδασκαλία των επιστημών πρέπει να σχεδιάζεται με τέτοιο τρόπο ώστε να εμπλέκει τους μαθητές στο σχεδιασμό και στη χρήση μοντέλων. Το μοντέλο στις φυσικές επιστήμες είναι μια αναπαράσταση της δομής ενός φυσικού συστήματος και των ιδιοτήτων του.

Η μοντελοποίηση εκτός από κύριο συστατικό της ανθρώπινης δραστηριότητας συνιστά βασικό μεθοδολογικό εργαλείο στην επιστημονική έρευνα και αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της μαθησιακής δραστηριότητας. Η ανάπτυξη μοντέλων παρέχει τη δυνατότητα χειρισμού τους (και όχι χειρισμού των ίδιων των αντικειμένων), και επιτρέπει τη δυνατότητα υπολογισμών, την ανακάλυψη νέων σχέσεων, την οικοδόμηση νέων γνωστικών σχημάτων, την κατάκτηση νέων βεβαιοτήτων αλλά και την ανατροπή κάποιων άλλων[29]. Τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει σημαντικές προσπάθειες και περισσότερα εκπαιδευτικά συστήματα εντάσσουν δραστηριότητες μοντελοποίησης και την ολοκληρωμένη προσέγγιση διαφορετικών γνωστικών αντικειμένων, που αυτές προσφέρουν, στην προβληματική τους.

Η επιστημονική δραστηριότητα συνίσταται σε μεγάλο βαθμό στη δημιουργία εννοιολογικών (χρησιμοποιώντας διάφορους φορμαλισμούς) μοντέλων των φαινομένων και των αντικειμένων τα οποία μελετά. Τα μοντέλα αυτά μπορεί να είναι αναλυτικά (όπως στη φυσική με τα μαθηματικά μοντέλα) ή να παρέχουν μια απλή και πρακτική αναπαράσταση (όπως στη βιολογία με τη χρήση εικόνων και μεταφορών από την καθημερινή ζωή).

[28] Hestenes D., (1992). Modeling games in the Newtonian World. *American Journal of Physics, 60*, σσ. 732-748.

[29] Bliss J., (1994). From Mental Models to Modelling. In H. Mellar, J. Bliss, R. Boohan, J. Ogborn, C. Tompsett (Eds). *Learning with Artificial Worlds: Computer Based Modelling in the* Curriculum. London: The Falmer Press, σσ. 27-32.

7. Η μοντελοποίηση στη διδασκαλία και τη μάθηση

Οι διαδικασίες μοντελοποίησης συντελούν ουσιαστικά στη βαθύτερη κατανόηση των προς μελέτη φαινομένων και για το λόγο αυτό θεωρούνται ως ουσιαστικές διδακτικές και μαθησιακές δραστηριότητες. Όσον αφορά το κάτω από ποιες προϋποθέσεις μπορούμε να αξιοποιήσουμε τα μοντέλα και τη διαδικασία μοντελοποίησης στη διδασκαλία και τη μάθηση και ειδικότερα στη μάθηση των θετικών επιστημών, οι σύγχρονες διδακτικές θεωρήσεις υποστηρίζουν ότι οι μαθητές πρέπει να εμπλέκονται σε δραστηριότητες μοντελοποίησης αναγνωρίζοντας σε αυτές τα πλεονεκτήματα της διεπιστημονικής προσέγγισης και της χρήσης μεθόδων και πρακτικών που μοιάζουν με τις αυθεντικές επιστημονικές δραστηριότητες[30,31]. Υπό το πρίσμα αυτό, το ζητούμενο της μάθησης δεν περιορίζεται μόνο στην πρόσκτηση αυτού καθαυτού του μοντέλου (είτε πρόκειται για επιστημονικό είτε για διδακτικό μοντέλο) αλλά επεκτείνεται και στην ανάπτυξη όλων εκείνων των γνωστικών εργαλείων που επιτρέπουν τις πρακτικές της μοντελοποίησης[32]. Η προσέγγιση που βοηθά τους μαθητές να εκφράζουν και να σκέφτονται με όρους μοντέλων και όχι με μαθηματικά σύμβολα ή γλωσσικές εκφράσεις φαίνεται ότι ενισχύουν την κατανόησή τους και όχι τη στείρα απομνημόνευση[33].

Είναι επίσης σημαντικό, η διδακτική μέθοδος που βασίζεται σε δραστηριότητες μοντελοποίησης να λαμβάνει υπόψη της τη συγκρότηση των νοητικών μοντέλων των μαθητών και τις αναπαραστάσεις που βασίζονται στην πρότερη εμπειρία τους σχετικά με τα προς μελέτη φαινόμενα ή επιστημονικές έννοιες. Στο πλαίσιο αυτό, οι προτεινόμενες στους μαθητές διδακτικές δραστηριότητες πρέπει να αφορούν την επίλυση προβλημάτων

---

[30] Weil-Barais A., (1994). Les Apprentissages en Sciences Physiques, In G. Vergnaud (Ed) *Apprentissages et Didactiques, ou en est-on?* Serie: Former, Organiser pour Enseigner, Paris : HACHETTE Education.

[31] Gilbert J., & Boulter C., (2000). *Developing Models in Science Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[32] Ραβάνης Κ., (1999). *Οι Φυσικές Επιστήμες στην Προσχολική Εκπαίδευση. Διδακτική και Γνωστική Προσέγγιση*. Εκδόσεις: Τυπωθήτω. Αθήνα.

[33] Βοσνιάδου Σ., (1998). *Γνωσιακή Ψυχολογία*. Εκδόσεις: Gutenberg. Αθήνα.

που να έχουν νόημα για τα παιδιά και να βασίζονται στις καθημερινές τους πολιτισμικές εμπειρίες.

Οι μελέτες σχετικά με τα νοητικά μοντέλα των μαθητών οδηγούν σε μια αντίληψη της μάθησης με όρους εννοιολογικής αλλαγής, της αντικατάστασης δηλαδή λανθασμένων γνώσεων με γνώσεις πιο συμβατές από την επιστημονική κοινότητα. Οι διαδικασίες που πρέπει να λάβουν χώρα ώστε να επιτευχθεί η εννοιολογική αλλαγή (με όρους ανασυγκρότησης των νοητικών μοντέλων των μαθητών ώστε να προσεγγίζουν τα εννοιολογικά μοντέλα των επιστημόνων) πρέπει να πλαισιώνονται με κατάλληλα εργαλεία (όπως πραγματικά αντικείμενα, εκπαιδευτικό λογισμικό, κτλ.) και να ενισχύονται με την ανθρώπινη αλληλεπίδραση.

Η χρήση εργαλείων και η ανάπτυξη σύμμετρων (με άλλους μαθητές) ή ασύμμετρων (με τον εκπαιδευτικό) αλληλεπιδράσεων συνιστά το κατάλληλο πλαίσιο δημιουργίας γνωστικών και κοινωνικο – γνωστικών συγκρούσεων που είναι απαραίτητες στη διαδικασία ανασυγκρότησης των νοητικών μοντέλων.

Συνοψίζοντας τις προϋποθέσεις για μια επιτυχημένη χρήση των μοντέλων στη διδασκαλία των θετικών επιστημών μπορούμε να αναφερθούμε στα ακόλουθα:

- Έκφραση και διερεύνηση των νοητικών μοντέλων των μαθητών.
- Παροχή αυθεντικών μαθησιακών δραστηριοτήτων στο πλαίσιο επίλυσης προβλημάτων που έχουν νόημα για τους μαθητές.
- Ενίσχυση ενός πλαισίου μάθησης στη ζώνη της επικείμενης γνωστικής ανάπτυξης των μαθητών.
- Ανάπτυξη διδακτικών καταστάσεων με στόχο την εννοιολογική αλλαγή.
- Προσφορά εργαλείων και ενίσχυση της κοινωνικής αλληλεπίδρασης για τη δημιουργία γνωστικών και κοινωνικογνωστικών συγκρούσεων.
- Ενίσχυση των μεταγνωστικών δεξιοτήτων.

8. Αρχές μοντελοποίησης

Οι δραστηριότητες μοντελοποίησης, οι οποίες αποτελούν προσομοιώσεις της καθημερινής ζωής των μαθητών, πρέπει να ακολουθούν τις παρακάτω αρχές σχεδιασμού, όπως περιγράφονται από τους Kelly και Lesh[34]:

- **Αρχή της Κατασκευής Μοντέλων:** Η αρχή αυτή επιβεβαιώνει, ότι η λύση που προτείνεται από το λύτη, απαιτεί την οικοδόμηση μιας συγκεκριμένης περιγραφής, επεξήγησης, διαδικασίας ή δικαιολογημένης πρόβλεψης για μια συγκεκριμένη μαθηματική κατάσταση. Τέτοια προϊόντα, εξωτερικεύουν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές μεταφράζουν μια κατάσταση και συνάμα τα διαφορετικά είδη μαθηματικών ποσοτήτων, σχέσεων, διαδικασιών και μοτίβων, τα οποία λαμβάνουν υπόψη κατά την οικοδόμηση του συγκεκριμένου μοντέλου.
- **Αρχή της Πραγματικότητας:** Η αρχή αυτή, θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως η νοηματοδοτούσα αρχή. Αρχικά, σύμφωνα με την αρχή αυτή, η μελέτη περίπτωσης πρέπει να σχεδιάζεται με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε οι μαθητές να μπορούν να μεταφράσουν τη δραστηριότητα από διαφορετικά επίπεδα μαθηματικών ικανοτήτων και γενικών γνώσεων. Επίσης, η αρχή αυτή απαιτεί τη δημιουργία μιας τέτοιας δραστηριότητας μοντελοποίησης, την οποία τα παιδιά να μπορούν να συναντήσουν και στην καθημερινή τους ζωή.
- **Αρχή της Αυτό-Αξιολόγησης:** Η αρχή αυτή, επιβεβαιώνει ότι η δραστηριότητα μοντελοποίησης, περιέχει κριτήρια τα οποία οι μαθητές από μόνοι τους μπορούν να προσδιορίσουν και κατά συνέπεια, να αξιολογήσουν και να αναθεωρήσουν τον τρέχοντα τρόπο σκέψης τους. Ειδικότερα, μια δραστηριότητα μοντελοποίησης, θα πρέπει να περιέχει πληροφορίες, τις οποίες οι μαθητές να μπορούν να χρησιμοποιήσουν, για την εύρεση εναλλακτικών, βοηθητικών λύσεων, για την άσκηση κριτικής όσον αφορά στο πότε και πώς η λύση τους χρήζει βελτιώσεων και τέλος, για το πότε έχουν φτάσει στην ολοκλήρωση της δραστηριότητας.

[34] Kelly, A. E., & Lesh, R. A. (Eds.) (2000). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

- **Αρχή της Τεκμηρίωσης:** Σύμφωνα με την αρχή αυτή, οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με μια δραστηριότητα μοντελοποίησης, ενθαρρύνονται στη δημιουργία κάποιων μορφών αναφοράς, οι οποίες αναδεικνύουν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές σκέφτονται για μια συγκεκριμένη προβληματική κατάσταση. Αυτό είναι ιδιαίτερα βοηθητικό, τόσο για τους μαθητές όσο και για τους εκπαιδευτικούς. Από τη μια, οι εκπαιδευτικοί αντιλαμβάνονται τον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά μεταφράζουν και σκέφτονται μια συγκεκριμένη προβληματική κατάσταση και από την άλλη καθώς οι μαθητές εξωτερικεύουν τον τρόπο σκέψης τους, είναι ευκολότερο να φτάσουν σε μεταγνωστικές δεξιότητες .
- **Αρχή της Συμμετοχικής Χρήσης και της Επαναχρησιμοποίησης:** Σύμφωνα με την αρχή αυτή, τα παιδιά καλούνται να φτάνουν σε λύσεις, που μπορούν να μοιραστούν με τους συμμαθητές τους και συνάμα σε μοντέλα το οποία να μπορούν να επαναχρησιμοποιήσουν. Με τον τρόπο αυτό, τα παιδιά οδηγούνται σε στρατηγικές και ιδέες, οι οποίες είναι πιο γενικές και πολλές φορές, απορρέουν από δυναμικά μαθηματικά.
- **Αρχή του Αποτελεσματικού Προτύπου:** Η αρχή αυτή, επιβεβαιώνει ότι μια δραστηριότητα μοντελοποίησης είναι όσο το δυνατόν πιο απλή, αλλά συνάμα και όσο το δυνατό περισσότερης μαθηματικής αξίας. Ο στόχος είναι, τα παιδιά με την ολοκλήρωση μιας συγκεκριμένης δραστηριότητας μοντελοποίησης, να τους παρέχονται βοηθητικά πρότυπα, για την ερμηνεία παρόμοιων προβληματικών καταστάσεων.

9. Στάδια μοντελοποίησης

Όταν αναζητάμε μια *μέθοδο* μαθηματικής επίλυσης ενός *αυθεντικού* προβλήματος, η οποία να μπορεί να είναι γενικεύσιμη και να μπορεί να επιλύει και άλλες παρόμοιες προβληματικές καταστάσεις, κάνουμε λόγο για την αναζήτηση ενός *μοντέλου* επίλυσης του προβλήματος. Η διαδικασία αναζήτησης ή δημιουργίας αυτού του μοντέλου είναι η *μοντελοποίηση* του προβλήματος. Χαρακτηρίζεται ως μια κυκλική, μη γραμμική διαδικασία που αποτελείται από επιμέρους, δεύτερου επιπέδου διαδικασίες ή στάδια τα οποία μπορεί σε κάποιες περιπτώσεις (μοντελοποίησης) να είναι όλα παρόντα, ενώ σε κάποιες άλλες μπορεί κάποια να απουσιάζουν. Έτσι:

- Αρχικά γίνεται η εξερεύνηση (*exploring*) του προβλήματος και ο εντοπισμός (*specifying*) των συνθηκών και των προϋποθέσεων (*conditions* & *assumptions*) που πρέπει να ισχύουν στον πραγματικό κόσμο. Σε αυτό το στάδιο ο μοντελοποιός κατανοεί, απλοποιεί αλλά και αναζητά περισσότερες πληροφορίες που θα μπορούσαν να βοηθήσουν στη μοντελοποίηση του προβλήματος.
- Στο δεύτερο στάδιο (*mathematizing*) γίνεται η μαθηματικοποίηση του προβλήματος που περιλαμβάνει το πέρασμα από τον πραγματικό κόσμο στο συμβολικό κόσμο των μαθηματικών. Σε αυτό το στάδιο ο μοντελοποιός μετασχηματίζει (μαθηματικοποιεί) τις συνθήκες και προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν στον πραγματικό κόσμο, σε ιδιότητες και παραμέτρους (*properties* & *parameters*) που πρέπει να χαρακτηρίζουν τη μαθηματική οντότητα.
- Το τρίτο στάδιο (*combining* & *analyzing*) περιλαμβάνει την εργασία με τη μαθηματική οντότητα που έχει προκύψει από την μαθηματικοποίηση του *αυθεντικού* προβλήματος, δηλαδή περιλαμβάνει την εργασία στον μαθηματικό κόσμο η οποία τελικά καταλήγει σε ένα μαθηματικό συμπέρασμα.
- Στο τέταρτο στάδιο (*interpreting*), ο μοντελοποιός *διερμηνεύει* τη σημασία του μαθηματικού συμπεράσματος στον πραγματικό κόσμο και έτσι μεταφέρεται πάλι στον πραγματικό κόσμο.
- Στο τελευταίο στάδιο (*examining*), ο μοντελοποιός ελέγχει κατά πόσο το μαθηματικό συμπέρασμα έχει νόημα στον πραγματικό κόσμο και κατά πόσο μπορεί να δώσει απάντηση στο πρόβλημα. Στην περίπτωση που η απάντηση δε θεωρηθεί

ικανοποιητική, τότε το μοντέλο αναθεωρείται και η διαδικασία της μοντελοποίησης επαναλαμβάνεται από την αρχή μέχρι που να βρεθεί κάποια ικανοποιητική μέθοδος επίλυσης του προβλήματος.

Η διαδικασία δεν είναι γραμμική ούτε είναι μιας μόνο κατεύθυνσης. Μπορεί ο μοντελοποιός να επανέλθει σε κάποια προηγούμενη φάση όποτε αυτός κρίνει ότι είναι απαραίτητο, να παραλείψει κάποια φάση, ή σε κάθε φάση να συσχετίζει το αποτέλεσμά του με την πραγματικότητα. Ο μοντελοποιός καταπιάνεται με έναν μεγάλο αριθμό κύκλων μοντελοποίησης. Στους επαναλαμβανόμενους αυτούς κύκλους , ο μοντελοποιός κινείται από τα δεδομένα στα ζητούμενα, επιστρέφει και κινείται ξανά προς τα ζητούμενα, ώστε να ελέγξει τις υποθέσεις του και να βελτιώσει τα προτεινόμενα μοντέλα και τις λύσεις τους[35].

[35] Sriraman, B., & Lesh, R. (2006). Beyond Traditional conceptions of modeling. *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik*, *38*, 3, σσ. 247-254.

10. Η χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών κατά την εφαρμογή δραστηριοτήτων μοντελοποίησης

Ο Lesh και οι συνεργάτες του[36,37] μελετώντας την εφαρμογή τεχνολογικών εργαλείων σε δραστηριότητες μοντελοποίησης, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η μοντελοποίηση και η ανάπτυξη εννοιολογικών συστημάτων μπορούν να ενισχυθούν σε μεγάλο βαθμό από τη χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα νέα τεχνολογικά εργαλεία βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τις διάφορες αναπαραστάσεις μιας έννοιας, δημιουργώντας περαιτέρω δυνατότητες για τη διασύνδεσή τους[38]. Έτσι, τα σύγχρονα τεχνολογικά εργαλεία, βοηθούν τους μαθητές να έρθουν σε επαφή με νέες σύνθετες ιδέες αλλά και να επεκτείνουν τις γνώσεις τους συσχετίζοντας τις νέες πληροφορίες με έννοιες που ήδη κατέχουν[39]. Επιπρόσθετα, κατά την ενασχόληση των παιδιών με τους Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές αυξάνεται το ενδιαφέρον και η ενεργητική συμμετοχή τους[40]. Είναι πιθανό αυτό να οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές βρίσκονται σε ένα οικοδομιστικό, μαθησιακό περιβάλλον και αντιλαμβάνονται τη διαδικασία σαν παιχνίδι[41].

---

[36] Doerr, H.M., & Lesh, R (2003). A modelling perspective on teacher development. In H.M. Doerr & R. Lesh (Eds.), *Beyond constructivism: A models and modelling perspective on mathematics problem solving, learning & teaching* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc, σσ. 125–140.

[37] English, L., & Lesh, R. (2003). Ends-in-view problems. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models & modeling perspective on mathematics problem solving, learning & teaching* Hillsdale. NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc, σσ. 297–316.

[38] Jiang, Z., & McClintock, E. (2000). Multiple approaches to problem solving and the use of technology. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 19*(1), σσ. 7- 20.

[39] Novak, J.D. (1998). *Learning, creating and using knowledge: Concept maps as facilitative tools in schools and corporations.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

[40] Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (2004). *Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Γ. Δαρδάνος.

[41] Waxman, H.C., & Huang, S.L. (1996). Classroom instruction differences by level of technology use in middle school mathematics. *Journal of Educational Computing Research, 14*, σσ. 157- 169.

Β. ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1. Σκοπός της έρευνας

Σκοπό της παρούσας έρευνας αποτελεί η διερεύνηση των τρόπων με τους οποίους μια ομάδα της Στ' Δημοτικού και μια ομάδα φοιτητών του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης εργάστηκαν σε μια δραστηριότητα μοντελοποίησης, χρησιμοποιώντας τις προϋπάρχουσες μαθηματικές τους γνώσεις για να ανακαλύψουν νέες μαθηματικές σχέσεις και διαδικασίες για την επίλυση ενός αυθεντικού μαθηματικού προβλήματος.

Η διερεύνηση αυτή θα επιχειρήσει να δώσει απαντήσεις στα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

- Μπορούν οι μαθητές Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και οι φοιτητές Παιδαγωγικών Τμημάτων να ασχοληθούν αποτελεσματικά με δραστηριότητες μοντελοποίησης;
- Ποιες είναι οι ομοιότητες και οι διαφορές μεταξύ των ομάδων των δύο διαφορετικών βαθμίδων – Πρωτοβάθμια, Τριτοβάθμια – ως προς τις τέσσερις βασικές διαδικασίες μοντελοποίησης και μαθηματικές έννοιες που χρησιμοποιούν;

2. Μεθοδολογία

2.1. Υποκείμενα

Υποκείμενα της παρούσας έρευνας αποτέλεσαν τέσσερις μαθητές της Στ' Δημοτικού (δύο κορίτσια και δύο αγόρια) και εννέα φοιτητές του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης (τέσσερα κορίτσια και πέντε αγόρια).

2.2. Προβλήματα

Στην έρευνα χρησιμοποιήθηκαν δύο προβλήματα.

Το πρώτο πρόβλημα ονομάζεται «Το πρόβλημα της επιλογής κινητού τηλεφώνου» και είναι σχεδιασμένο σύμφωνα με τα παρακάτω κριτήρια:

- Το πλαίσιο του προβλήματος πρέπει να δημιουργεί κίνητρα, να είναι ενδιαφέρον και να έχει σχέση με τις άμεσες εμπειρίες των μαθητών.

- Το πρόβλημα να έχει τη δυνατότητα να προκαλέσει την εμφάνιση σημαντικών μαθηματικών ιδεών, δηλαδή να είναι παραγωγικό από μαθηματική άποψη.

Το δεύτερο πρόβλημα ονομάζεται «Το ιδανικό μέρος για καλοκαιρινές διακοπές» και αποτελεί μια δραστηριότητα που κατασκευάστηκε με βάση τις αρχές σχεδιασμού, όπως περιγράφονται από τους Kelly και Lesh[42]:

- Αρχή της Κατασκευής Μοντέλων: Η συγκεκριμένη δραστηριότητα οδηγεί στην ανάγκη σχεδιασμού και ελέγχου μοντέλων για την κατανόηση και επίλυση ενός προβλήματος με σκοπό την εύρεση του ιδανικότερου μέρους για τις καλοκαιρινές διακοπές του κύριου Άρη.
- Αρχή της Πραγματικότητας: Η συγκεκριμένη δραστηριότητα κρίνεται ενδιαφέρουσα και άμεσα συνδεδεμένη με την πραγματική ζωή. Το σενάριο για εύρεση του ιδανικότερου μέρους για τις καλοκαιρινές διακοπές μιας οικογένειας είναι ένα σενάριο οικείο και γνώριμο στα παιδιά, γεγονός που θα τους επιτρέψει να κάνουν συνδέσεις με πραγματικές καταστάσεις και προηγούμενες εμπειρίες τους.
- Αρχή της Αυτό-Αξιολόγησης: η συγκεκριμένη δραστηριότητα θα δώσει τη δυνατότητα στους εμπλεκόμενους να αξιολογούν τις υποθέσεις και τις λύσεις τους και να είναι σε θέση να τις βελτιώσουν ή να τις επεκτείνουν για να ανταποκριθούν στις ανάγκες της προβληματικής κατάστασης που τους παρουσιάζεται.
- Αρχή της Τεκμηρίωσης: Οι μαθητές και οι φοιτητές κατά την ενασχόληση τους με τη δραστηριότητα αυτή καλούνται να τεκμηριώνουν και να αιτιολογούν τον τρόπο σκέψης τους στην κατασκευή συγκεκριμένων μοντέλων στην ομάδα για την εύρεση μιας συλλογικής τελικά απόφασης.
- Αρχή της Συμμετοχικής Χρήσης και της Επαναχρησιμοποίησης: Τα μοντέλα που θα κατασκευάσουν οι μαθητές θα μπορούν να αξιοποιηθούν και να τροποποιηθούν σχετικά εύκολα από άλλους μαθητές.
- Αρχή του Αποτελεσματικού Προτύπου: Τα μοντέλα που θα κατασκευαστούν θα είναι σε θέση να αποτελέσουν πρότυπα για το σχεδιασμό πιο σύνθετων και αναλυτικών μοντέλων.

Τα δύο προβλήματα είναι τα εξής:

[42] Kelly, A. E., & Lesh, R. A. (Eds.) (2000), ό.π.

ΕΠΙΛΟΓΗ ΚΙΝΗΤΩΝ ΤΗΛΕΦΩΝΩΝ

ΕΡΕΥΝΑ ΑΓΟΡΑΣ

Μια εταιρία κατασκευής κινητών τηλεφώνων, θέλοντας να αυξήσει τις πωλήσεις της, ερεύνησε τις προτιμήσεις 5 ομάδων πελατών, με σκοπό να τις λάβει υπόψη της στην κατασκευή των νέων μοντέλων.

Ο παρακάτω πίνακας, δείχνει τα αποτελέσματα της έρευνας. Σε κάθε στήλη, δίδονται με τη σειρά προτίμησης, τα χαρακτηριστικά των κινητών τηλεφώνων που προτιμά η κάθε ομάδα (οι ομάδες είναι όλες ισάριθμες).

Η αποστολή σας είναι να πάρετε τα δεδομένα, και με βάση αυτά, να κατατάξετε τα 10 χαρακτηριστικά από το ελκυστικότερο προς το λιγότερο ελκυστικό. Για να το πετύχετε, πρέπει να βρείτε μια μέθοδο αξιολόγησης (ταξινόμησης). Η μέθοδος πρέπει να είναι εφαρμόσιμη και σε άλλες περιπτώσεις όπου μας δίνονται παρόμοια δεδομένα.

Πρέπει να είστε σε θέση να εξηγήσετε τη μέθοδο στην εταιρία, ώστε να μπορεί να την χρησιμοποιεί σε κάθε έρευνα αγοράς που θα κάνει στο μέλλον.

	1η ομάδα	**2η ομάδα**	**3η ομάδα**	**4η ομάδα**	**5η ομάδα**
	MP3	κάμερα	εμφάνιση	εμφάνιση	εμφάνιση
	εμφάνιση	εμφάνιση	κάμερα	μέγεθος οθόνης	μέγεθος οθόνης
	μέγεθος οθόνης	MP3	τιμή	κάμερα	MP3
	κάμερα	μέγεθος οθόνης	MP3	MP3	τιμή
	μάρκα	blue tooth	μέγεθος οθόνης	blue tooth	blue tooth
	θύρα USB	τιμή	blue tooth	μάρκα	κάμερα
	blue tooth	μάρκα	θύρα USB	θύρα USB	θύρα USB
	τιμή	θύρα USB	μάρκα	τιμή	μάρκα
	ραδιόφωνο	διάρκεια μπαταρίας	ραδιόφωνο	διάρκεια μπαταρίας	ραδιόφωνο
	διάρκεια μπαταρίας	ραδιόφωνο	διάρκεια μπαταρίας	ραδιόφωνο	διάρκεια μπαταρίας

2. Το ιδανικό μέρος για καλοκαιρινές διακοπές

Ο κύριος Άρης και η γυναίκα του ψάχνουν το ιδανικότερο μέρος για διασκέδαση, αλλά συνάμα και τον οικονομικότερο προορισμό για τις καλοκαιρινές τους διακοπές, που θα διαρκέσουν 10 μέρες. Εντοπίστε ποιο είναι το κατάλληλο γι' αυτούς μέρος. Τα δεδομένα του προβλήματος δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Προορισμός	Παραλίες	Αξιοθέατα	Καταστήματα	Εστιατόρια-καφετέριες	Κόστος διαμονής ανά μέρα σε ξενοδοχείο **** (δίκλινο) €	Κόστος ενοικίασης αυτοκινήτου ανά μέρα €	Εισιτήριο μετ' επιστροφής ανά άτομο €	Κατάσταση οδικού δικτύου
Απολλώνεια	5	4	35	15	60	8	325	Μέτρια
Αθήνια	8	0	28	24	90	15	425	Καλή
Αφροντίνια	9	5	27	20	60	12	330	Καλή
Αρτεμίσια	5	4	38	16	95	13	450	Κακή
Έρμια	3	10	24	18	78	18	400	Καλή
Ποσειδώνια	6	5	32	17	92	19	500	Κακή

2.3. Διαδικασία έρευνας

Αρχικά παρουσιάστηκε στους μαθητές της Στ΄ Δημοτικού το πρώτο πρόβλημα και στη συνέχεια ζητήθηκε από αυτούς να διαβαστεί σιωπηλά. Στη συνέχεια ρωτήθηκαν οι μαθητές αν υπάρχει κάποιο σημείο το οποίο δεν καταλαβαίνουν και ένας μαθητής εξήγησε δυνατά τι ζητάει το πρόβλημα, έτσι ώστε όλοι να το ακούσουν.

Σε μια πρώτη φάση ο κάθε μαθητής ανέλαβε να λύσει μόνος του το πρόβλημα. Ενώ οι μαθητές εργάζονταν ατομικά η ερευνήτρια πλησίαζε τον κάθε μαθητή και του έπαιρνε μια σύντομη προφορική συνέντευξη σχετικά με την πορεία λύσης που ακολουθούσε (ταυτόχρονα σημείωνε την πορεία λύσης του κάθε μαθητή). Δεν έδωσε καμία βοήθεια στους μαθητές. Στο τέλος ζητήθηκε από τους μαθητές να παρουσιάσουν γραπτώς την ταξινόμηση στην οποία είχαν καταλήξει αλλά και τα βήματα που είχαν ακολουθήσει

ώστε να φτάσουν σε αυτήν, σε ένα Φύλλο Εργασίας. Η πρώτη φάση διήρκησε από 20 – 50 λεπτά.

Στη δεύτερη φάση ζητήθηκε από τους μαθητές να συζητήσουν ομαδικά, να αξιολογήσουν τα μοντέλα όλων των μαθητών και να αποφασίσουν από κοινού ποιο θα είναι το «καλύτερο» τελικό μοντέλο που θα προτείνουν ως ομάδα για τη λύση του προβλήματος. Η ερευνήτρια παρακολουθούσε τη συζήτηση, την μαγνητοφωνούσε και κρατούσε σημειώσεις. Οι μαθητές είχαν τον αποκλειστικό έλεγχο της συζήτησης, η οποία διήρκησε από 10-20 λεπτά. Στο τέλος της συζήτησης, η ομάδα παρουσίασε προφορικά το μοντέλο στο οποίο κατέληξε. Με την παρουσίαση του μοντέλου από την ομάδα ολοκληρώθηκε και η δεύτερη φάση της εργασίας για το πρώτο πρόβλημα.

Στη συνέχεια παρουσιάστηκε στους μαθητές το δεύτερο πρόβλημα και δούλεψαν σε δύο φάσεις (πρώτα ατομικά και στη συνέχεια ομαδικά) όπως και στο πρώτο πρόβλημα. Τα παιδιά καλούνταν να εντοπίσουν το ιδανικότερο μέρος για διασκέδαση, αλλά συνάμα και τον οικονομικότερο προορισμό για τον κύριο Άρη και τη γυναίκα του, για τις καλοκαιρινές τους διακοπές. Τα δεδομένα του προβλήματος δόθηκαν σε πίνακα (βλέπε παραπάνω).

Τα ίδια προβλήματα παρουσιάστηκαν και στην ομάδα των φοιτητών του Π.Τ.Δ.Ε. Φλώρινας και ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία (σε δύο φάσεις).

2.4. Συλλογή Δεδομένων και Ανάλυση

Για την ανάλυση των αποτελεσμάτων, χρησιμοποιήθηκαν:

1. Τα φύλλα εργασίας των μαθητών που περιέχουν το τελικό μοντέλο στο οποίο κατέληξε ο κάθε μαθητής και φαίνεται και η διαδικασία που έχει ακολουθήσει.
2. Οι σημειώσεις που λήφθηκαν από την ερευνήτρια κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας. Δηλαδή, οι σημειώσεις που λήφθηκαν κατά τη διάρκεια των προφορικών, ατομικών συνεντεύξεων των μαθητών και οι σημειώσεις που λήφθηκαν κατά τη διάρκεια της συζήτησης του μοντέλου στην ομάδα.
3. Οι απομαγνητοφωνήσεις των συζητήσεων.

Η ανάλυση των δεδομένων της έρευνας, έγινε στη βάση των διαδικασιών μοντελοποίησης που έχουν εφαρμόσει οι μαθητές, μέσα από τους επαναλαμβανόμενους κύκλους μοντελοποίησης. Πιο αναλυτικά η ανάλυση εστιάζεται:

1. Στο μαθηματικό συλλογισμό του κάθε μαθητή και φοιτητή, για να διαπιστωθεί κατά πόσο αυτός κατάφερε να δημιουργήσει ένα λειτουργικό μοντέλο για την επίλυση του πρώτου προβλήματος.
2. Στον εντοπισμό των διακριτών μοντέλων (μεθόδων) που ανέπτυξαν οι μαθητές και οι φοιτητές για την επίλυση των προβλημάτων.
3. Στη διαφορά που παρουσίασε η ικανότητα του κάθε μαθητή και φοιτητή να λύνει αυθεντικά προβλήματα, πριν αλλά και μετά τη συζήτηση στην ομάδα.
4. Τις ομοιότητες και τις διαφορές μεταξύ των ομάδων των δύο διαφορετικών βαθμίδων – Πρωτοβάθμια, Τριτοβάθμια – ως προς τις διαδικασίες μοντελοποίησης και τις μαθηματικές έννοιες που χρησιμοποιούν.

3. **Αποτελέσματα**

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν περιγράφονται ξεχωριστά για το κάθε πρόβλημα. Αρχικά παρουσιάζονται τα γενικά αποτελέσματα τόσο για τους μαθητές όσο και τους φοιτητές σχετικά με τις διαδικασίες μοντελοποίησης και τις μαθηματικές έννοιες των μαθητών Δημοτικού και των φοιτητών του Π.Τ.Δ.Ε.. Χρησιμοποιούνται ψευδώνυμα για τους συμμετέχοντες στην έρευνα.

Στο Παράρτημα περιγράφεται αναλυτικά για κάθε πρόβλημα, η ατομική προσέγγιση των μαθητών και των φοιτητών και τα τελικά μοντέλα που αυτοί έχουν δημιουργήσει. Ακολουθεί η περιγραφή της συζήτησης του προβλήματος στην ομάδα (ολομέλεια).

Η ανάλυση της διαδικασίας της μοντελοποίησης στην οποία πήραν μέρος οι μαθητές και οι φοιτητές αναμένεται να αναδείξει:

1. Την πορεία της σκέψης των μαθητών και των φοιτητών στην ταξινόμηση, την επιλογή και τη στάθμιση δεδομένων καθώς θα μπουν στη διαδικασία να δημιουργήσουν μοντέλο για τη λύση των προβλημάτων. Αναμένεται ο μαθηματικός συλλογισμός των συμμετεχόντων να περάσει από στάδια (*κύκλους*) χαμηλότερης ποιότητας σε στάδια (*κύκλους*) υψηλότερης ποιότητας και πολυπλοκότητας της μαθηματικής σκέψης. Η πρόβλεψη είναι ότι οι φοιτητές θα αναπτύξουν πολλαπλούς κύκλους μαθηματικής σκέψης, περισσότερους από τους μαθητές. Στην περιγραφή της διαδικασίας της μοντελοποίησης για κάθε διακριτό μοντέλο που θα εντοπισθεί, θα γίνει αναφορά στους παραπάνω κύκλους όπου αυτοί θα είναι διακριτοί.
2. Τη χρονική στιγμή που θα ποσοτικοποιήσουν οι συμμετέχοντες τον ποιοτικό παράγοντα του κάθε προβλήματος. Αναμένεται οι φοιτητές να ποσοτικοποιήσουν τον ποιοτικό παράγοντα πιο νωρίς, γεγονός το οποίο υποδεικνύει τις πιο σύνθετες μαθηματικές ιδέες τους.
3. Το κατά πόσο θα επηρεαστεί ο συλλογισμός των συμμετεχόντων κατά την επίλυση του δεύτερου προβλήματος από την ομαδική συζήτηση για το καταλληλότερο μοντέλο του πρώτου προβλήματος. Αναμένεται στην επίλυση του δεύτερου προβλήματος να εφαρμόσουν όλοι με σχετική ευκολία το μοντέλο που θα έχει υιοθετήσει η ομάδα στο προηγούμενο πρόβλημα.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η σύγκριση μεταξύ των δύο ομάδων (μαθητές – φοιτητές) όσον αφορά τις διαδικασίες μοντελοποίησης και τις μαθηματικές έννοιες που χρησιμοποίησαν, με σκοπό τον εντοπισμό ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ των ομάδων των διαφορετικών βαθμίδων. Η σύγκριση αυτή παρουσιάζεται αναλυτικά, ξεχωριστά για το κάθε πρόβλημα και βασίζεται στα εξής σημεία:

Για το πρώτο πρόβλημα:

1. Κατανόηση της εκφώνησης του προβλήματος και του ζητούμενου.
2. Η χρονική στιγμή της έναρξης της μαθηματικοποίησης.
3. Ανάπτυξη μοντέλου για την τελική κατάταξη και για την αντιμετώπιση του προβλήματος της ισοψηφίας μεταξύ *μεγέθους οθόνης και κάμερας*.
4. Έλεγχος των μοντέλων.

Για το δεύτερο πρόβλημα:

1. Κατανόηση της εκφώνησης του προβλήματος και του ζητούμενου.
2. Κατανόηση της σημαντικότητας των παραγόντων του πίνακα, για να γίνει στη συνέχεια η κατάλληλη ομαδοποίηση (ατομικά και στη συνέχεια ομαδικά).
3. Η χρονική στιγμή της έναρξης της μαθηματικοποίησης – Δημιουργία μοντέλου για την επιλογή του ιδανικότερου μέρους.
4. Έλεγχος των μοντέλων.
5. Ο βαθμός στον οποίο θα επηρεαστεί ο συλλογισμός των συμμετεχόντων κατά την επίλυση του δεύτερου προβλήματος από την ομαδική συζήτηση για το καταλληλότερο μοντέλο του πρώτου προβλήματος.

Στη συνέχεια ακολουθεί συζήτηση όπου συνοψίζονται τα αποτελέσματα όλης της ερευνητικής διαδικασίας.

3.1. Γενικά αποτελέσματα σχετικά με τις διαδικασίες Μοντελοποίησης και μαθηματικές έννοιες των Μαθητών Δημοτικού

1ο πρόβλημα (το πρόβλημα της επιλογής κινητού):

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι 3 από τους 4 μαθητές ή αλλιώς το 75% των μαθητών κατάφερε να μοντελοποιήσει επιτυχώς το 1ο ρεαλιστικό πρόβλημα. Οι μαθητές που συμμετείχαν ήταν άριστοι μαθητές, με βαθμό τριμήνου στα Μαθηματικά 10, και ήταν πολύ καλοί λύτες των παραδοσιακών προβλημάτων που περιέχονται στα βιβλία που διδάσκονται στο σχολείο, σύμφωνα με το δάσκαλο της τάξης. Όπως φαίνεται από την παρούσα έρευνα, οι δεξιότητες επίλυσης που αποκτούν οι μαθητές στο σχολείο, δεν επαρκούν για την επίλυση αυθεντικών προβλημάτων. Οι μαθητές, παρουσιάζονται ανεπαρκείς στην αντιμετώπιση ρεαλιστικών καταστάσεων της καθημερινότητας που απαιτούν τη χρήση μαθηματικών. Στην παρούσα μελέτη το δείγμα είναι μικρό, η πρόβλεψη είναι ενός μόνο διδάσκοντα και η συμμετοχή 4 μόνο μαθητών. Απαιτείται περισσότερη έρευνα και μεγαλύτερο δείγμα για να εξαχθούν ασφαλέστερα συμπεράσματα.

Κρίνοντας από την εμφάνιση τεσσάρων διαφορετικών προσεγγίσεων στο ίδιο πρόβλημα, μπορούμε να πούμε ότι η μοντελοποίηση αυθεντικών προβλημάτων προάγει την ανάπτυξη διαφορετικών προσεγγίσεων (μοντέλων) για την επίλυσή τους. Φαίνεται ότι αυτού του είδους η μοντελοποίηση παρέχει ευκαιρίες για μεγαλύτερη ποικιλομορφία σκέψης από ό,τι συνήθως συναντούμε στην επίλυση συνηθισμένων προβλημάτων του σχολικού βιβλίου.

Η συζήτηση στην ομάδα, έδειξε ότι η ποικιλομορφία σκέψης που αναπτύσσεται και η δυνατότητα των μαθητών να συζητήσουν για τις διάφορες μεθόδους που χρησιμοποίησαν, τους δίνει την ευκαιρία να μάθουν από τους συμμαθητές τους. Μπορούν να συγκρίνουν τα διαφορετικά μοντέλα, να ακούσουν τη γνώμη των άλλων για τις δικές τους ιδέες, και να κατανοήσουν καλύτερα την κάθε προτεινόμενη λύση.

Η προθυμία όλων των μαθητών για συμμετοχή στη συζήτηση δείχνει ότι μοντελοποίηση αυθεντικών προβλημάτων προσφέρει μια καλή ευκαιρία για την διέγερση του ενδιαφέροντος των μαθητών και την ενεργή συμμετοχή τους στη διδασκαλία.

2ο πρόβλημα (Το ιδανικό μέρος για καλοκαιρινές διακοπές):

Στην επίλυση του 2ου προβλήματος φαίνεται ότι η συζήτηση στην ομάδα στο 1ο πρόβλημα είχε καταλυτική επίδραση στη μαθηματική σκέψη των μαθητών. Μόλις δόθηκε το 2ο πρόβλημα, όλοι οι μαθητές άρχισαν να μαθηματικοποιούν τους ποιοτικούς παράγοντες με σχετική ευκολία. Είναι λοιπόν σαφές ότι οι επιδόσεις των μαθητών στην επίλυση ενός ρεαλιστικού προβλήματος βελτιώνονται αισθητά, εάν έχουν έρθει σε επαφή με ανάλογης φύσης πρόβλημα.

Και εδώ φαίνεται, όπως και κατά την επίλυση του 1ου προβλήματος, ότι αυτού του είδους η μοντελοποίηση παρέχει ευκαιρίες για μεγαλύτερη ποικιλομορφία σκέψης από ό,τι συνήθως συναντούμε στην επίλυση συνηθισμένων προβλημάτων, τα οποία περιέχονται στα σχολικά βιβλία. Και πάλι οι μαθητές ανέπτυξαν 4 διαφορετικές προσεγγίσεις (μοντέλα) για την επίλυση του προβλήματος[43].

Όπως στη συζήτηση του 1ου προβλήματος, έτσι και εδώ, η συζήτηση στην ομάδα, έδειξε ότι η ποικιλομορφία σκέψης που αναπτύσσεται, δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να μάθουν από τους συμμαθητές τους και να κατανοήσουν καλύτερα την κάθε προτεινόμενη λύση. Δόθηκε η ευκαιρία στους μαθητές να επιχειρηματολογήσουν για τη μέθοδο που επέλεξαν να ακολουθήσουν και να συνδυάσουν τη μέθοδό τους με την πορεία λύσης των συμμαθητών τους. Τα παιδιά επικοινώνησαν και μοιράστηκαν διάφορους μαθηματικούς όρους και τις μαθηματικές τους ιδέες. Αποτέλεσμα όλου αυτού αποτελεί η οικοδόμηση ενός πλούσιου πλαισίου για την ανάπτυξη και βελτίωση των μαθηματικών επικοινωνιακών δεξιοτήτων των παιδιών.

[43] Τα αναλυτικά αποτελέσματα παρατίθενται στο Παράρτημα.

3.2. Γενικά αποτελέσματα σχετικά με τις διαδικασίες Μοντελοποίησης και μαθηματικές έννοιες των Φοιτητών Π.Τ.Δ.Ε.

1ο πρόβλημα (το πρόβλημα της επιλογής κινητού):

Χρησιμοποιήθηκαν 3 ομάδες φοιτητών με 3 φοιτητές η κάθε ομάδα (συνολικά 9 φοιτητές). Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι 9 από τους 9 φοιτητές ή αλλιώς το 100% των φοιτητών κατάφερε να μοντελοποιήσει επιτυχώς το 1ο ρεαλιστικό πρόβλημα. Οι φοιτητές που συμμετείχαν στο δείγμα ήταν φοιτητές που προέρχονται είτε από θεωρητική κατεύθυνση είτε από τεχνολογική κατεύθυνση στο Λύκειο. Μερικοί ήταν πολύ καλοί λύτες των παραδοσιακών προβλημάτων που περιέχονται στα βιβλία που διδάσκονται στο σχολείο και μερικοί δεν ήταν καλοί λύτες, σύμφωνα με την προσωπική άποψη του κάθε ενός.

Όπως φαίνεται από την παρούσα έρευνα, οι φοιτητές αντιμετώπισαν με επιτυχία μια ρεαλιστική κατάσταση της καθημερινότητας και χρησιμοποίησαν με ευχέρεια διάφορες μαθηματικές έννοιες. Σχεδόν όλοι μαθηματικοποίησαν αμέσως τις προτιμήσεις των πελατών και αντιστοίχισαν αριθμούς σε κάθε θέση. Δηλαδή, σχεδόν όλοι, από την αρχή είδαν τις θέσεις (1ο, 2ο κλπ) ως ποσότητες (1, 2, 3, κλπ). Στη συνέχεια άθροισαν τους αριθμούς για κάθε χαρακτηριστικό, σύγκριναν τα αθροίσματα και κατέταξαν τις προτιμήσεις των πελατών σύμφωνα με τα αθροίσματα.

Κρίνοντας από την εμφάνιση δύο ή τριών διαφορετικών προσεγγίσεων στο ίδιο πρόβλημα (στις ομάδες των τριών φοιτητών), μπορούμε να πούμε ότι η μοντελοποίηση αυθεντικών προβλημάτων προάγει την ανάπτυξη διαφορετικών προσεγγίσεων (μοντέλων) για την επίλυσή τους. Φαίνεται ότι αυτού του είδους η μοντελοποίηση παρέχει ευκαιρίες για μεγαλύτερη ποικιλομορφία σκέψης από ό,τι συνήθως συναντούμε στην επίλυση συνηθισμένων προβλημάτων του σχολικού βιβλίου.

Η συζήτηση στην ομάδα, έδειξε ότι η ποικιλομορφία σκέψης που αναπτύσσεται και η δυνατότητα των φοιτητών να συζητήσουν για τις διάφορες μεθόδους που χρησιμοποίησαν, τους δίνει την ευκαιρία να μάθουν από τους άλλους. Μπορούν να συγκρίνουν τα διαφορετικά μοντέλα, να ακούσουν τη γνώμη των άλλων για τις δικές τους ιδέες, και να κατανοήσουν καλύτερα την κάθε προτεινόμενη λύση.

Οι συμμετέχοντες έδειξαν ενθουσιασμό και διατύπωσαν θετικά σχόλια για το είδος των προβλημάτων και τις διάφορες μεθόδους επίλυσής τους. Από την όλη διαδικασία φάνηκε ότι η μοντελοποίηση αυθεντικών προβλημάτων προσφέρει μια καλή ευκαιρία για την διέγερση του ενδιαφέροντος των συμμετεχόντων και την ενεργή συμμετοχή τους.

2ο πρόβλημα (Το ιδανικό μέρος για καλοκαιρινές διακοπές):

Στην επίλυση του 2ου προβλήματος φαίνεται ότι η συζήτηση στην ομάδα στο 1ο πρόβλημα είχε μεγάλη επίδραση στη μαθηματική σκέψη των φοιτητών. Μόλις δόθηκε το 2ο πρόβλημα, όλοι οι φοιτητές άρχισαν να μαθηματικοποιούν τους ποιοτικούς παράγοντες με ευκολία. Είναι σαφές, λοιπόν, ότι οι επιδόσεις στην επίλυση ενός ρεαλιστικού προβλήματος βελτιώνονται αισθητά, εάν οι λύτες έχουν έρθει σε επαφή προηγουμένως με ανάλογης φύσης πρόβλημα.

Και σε αυτό το πρόβλημα φαίνεται ότι αυτού του είδους η μοντελοποίηση παρέχει ευκαιρίες για μεγαλύτερη ποικιλομορφία σκέψης από ό,τι συνήθως συναντούμε στην επίλυση συνηθισμένων προβλημάτων. Και πάλι οι φοιτητές ανέπτυξαν ποικίλες διαφορετικές προσεγγίσεις (μοντέλα) για την επίλυσή τους.

Όπως στη συζήτηση του 1ου προβλήματος, έτσι και εδώ, η συζήτηση στην ομάδα, έδειξε ότι η ποικιλομορφία σκέψης που αναπτύσσεται, δίνει την ευκαιρία στους συμμετέχοντες να μάθουν από τους συμμαθητές τους και να κατανοήσουν καλύτερα την κάθε προτεινόμενη λύση.

3.3. Σύγκριση μαθητών δημοτικού και φοιτητών όσον αφορά στις διαδικασίες μοντελοποίησης και τις μαθηματικές έννοιες

1ο πρόβλημα

Κατανόηση της εκφώνησης του προβλήματος και του ζητούμενου.

Τόσο οι μαθητές του δημοτικού όσο και οι φοιτητές του Π.Τ.Δ.Ε. έδειξαν να κατανοούν την δομή του πίνακα και τις πληροφορίες που υπήρχαν σε αυτόν σχετικά με τα χαρακτηριστικά των κινητών τηλεφώνων.

Από την ομάδα του δημοτικού, ο Γιάννης δεν κατανόησε τη σημασία της λέξης *ταξινόμηση* που υπήρχε στην εκφώνηση του προβλήματος και αποφάσισε να χωρίσει τα χαρακτηριστικά σε δύο κατηγορίες: τα θετικά και τα αρνητικά. Η ερευνήτρια βοήθησε τον συγκεκριμένο μαθητή να κατανοήσει την έννοα της λέξης με ερωτήματα και παραδείγματα.

Όλοι οι υπόλοιποι μαθητές και φοιτητές δεν παρουσίασαν προβλήματα ή παρανοήσεις ως προς την εκφώνηση. Οι φοιτητές έθεσαν μερικά ερωτήματα όπως: «Τα χαρακτηριστικά είναι τα ίδια σε κάθε ομάδα;» και «Κάθε ομάδα έχει ίση αξία με τις υπόλοιπες;».

Η χρονική στιγμή της έναρξης της μαθηματικοποίησης.

Από τους μαθητές του δημοτικού η Σπυριδούλα και η Όλγα προσπάθησαν αρχικά να κάνουν μια κατάταξη με βάση τη συχνότητα εμφάνισης στις πρώτες και στις τελευταίες σειρές. Ο Γιάννης σύγκρινε ποιοτικά τα χαρακτηριστικά και κατέληξε σε μια γενικόλογη απάντηση. Μόνο ο Σπύρος ξεκίνησε αμέσως να μαθηματικοποιεί τους ποιοτικούς παράγοντες και να χρησιμοποιεί μαθηματικές έννοιες (κλάσματα).

Αντίθετα από τους φοιτητές του Π.Τ.Δ.Ε. που συμμετείχαν στην έρευνα, η Μαρία, ο Αντώνης, ο Πέτρος, η Χαρά, ο Παύλος και ο Νίκος, δηλαδή οι έξι, ξεκίνησαν αμέσως να μαθηματικοποιούν τους ποιοτικούς παράγοντες. Μόνο η Ελπίδα, η Χρύσα και ο Χρήστος, δηλαδή οι τρεις, προσπάθησαν αρχικά να παρατηρήσουν ποιοτικά τα χαρακτηριστικά για να τα κατατάξουν με κάποιον τρόπο. Γρήγορα όμως κατάλαβαν ότι

δεν καταλήγουν σε ένα γενικεύσιμο αποτέλεσμα, οπότε και αναθεώρησαν τη μέθοδό τους.

Όπως ήταν αναμενόμενο οι φοιτητές ποσοτικοποίησαν τον ποιοτικό παράγοντα πιο νωρίς από ό,τι οι μαθητές του δημοτικού, γεγονός το οποίο υποδεικνύει τις πιο σύνθετες μαθηματικές ιδέες τους.

Ο μαθηματικός συλλογισμός των φοιτητών πέρασε από στάδια (κύκλους) υψηλότερης ποιότητας και πολυπλοκότητας της μαθηματικής σκέψης σε σύγκριση με των μαθητών του δημοτικού. Οι περισσότεροι φοιτητές χρησιμοποίησαν στη λύση τους τον μέσο όρο (Μ.Ο.) με μεγάλη ευχέρεια και η εξήγηση που έδωσαν ήταν η εξής: «Το γεγονός ότι θέλουμε την κοινή γνώμη – την κοινή συνιστώσα – μας παροτρύνει να χρησιμοποιήσουμε τον Μ.Ο. Από τη λέξη *κοινός* αμέσως μας έρχεται στο μυαλό ο Μ.Ο.».

<u>Ανάπτυξη μοντέλου για την τελική κατάταξη και για την αντιμετώπιση του προβλήματος της ισοψηφίας μεταξύ *μεγέθους οθόνης και κάμερας.*</u>

Σε αυτό το σημείο ήταν μεγάλη η διαφορά ανάμεσα στους τρόπους, τους οποίους αποφάσισαν να χρησιμοποιήσουν οι φοιτητές σε σχέση με αυτούς που χρησιμοποίησαν οι μαθητές του δημοτικού.

Οι φοιτητές έδειξαν πολύ μεγάλο ενδιαφέρον στο πρόβλημα της ισοβαθμίας και αφιέρωσαν πολύ περισσότερο χρόνο από τους μαθητές για την εύρεση ενός ικανοποιητικού μοντέλου για την τελική κατάταξη των χαρακτηριστικών.

Οι μαθητές του δημοτικού δεν θεώρησαν απαραίτητο να βρουν μια μέθοδο ώστε να λύσουν το πρόβλημα της ισοβαθμίας των δύο χαρακτηριστικών. Κανένας μαθητής δεν το είχε συμπεριλάβει στο Φύλλο Εργασίας του και η ερευνήτρια αναγκάστηκε να θέσει διάφορα ερωτήματα σε αυτούς για να κατανοήσει τον τρόπο της ταξινόμησης, που είχαν ακολουθήσει: «Γιατί τα έβαλες και τα 2 χαρακτηριστικά στην ίδια θέση;», «Πώς αποφάσισες να βάλεις την κάμερα στην $3^{η}$ θέση και το μέγεθος οθόνης στην $4^{η}$, αφού έχουν τον ίδιο βαθμό;».

Οι φοιτητές αντίθετα ανέπτυξαν ποικίλα μοντέλα για την επίλυση του προβλήματος της ισοβαθμίας και τα συζήτησαν εκτενώς στις ομαδικές συζητήσεις κατά τη διαδικασία

της έρευνας. Μόνο η Χαρά δεν σκέφτηκε να βρει έναν τρόπο επίλυσης τους προβλήματος της ισοβαθμίας και τοποθέτησε απευθείας τα χαρακτηριστικά στην ίδια θέση.

Η Μαρία σκέφτηκε να σβήσει τις αντίθετες θέσεις στο κάθε χαρακτηριστικό. Θεώρησε πως η μία θέση εξουδετερώνει την αντίθετη θέση.

Η Ελπίδα θεώρησε τις 5 πρώτες θέσεις του πίνακα ως «καλές» και τις 5 τελευταίες ως «κακές» και με αυτόν τον τρόπο αποφάσισε ποιο χαρακτηριστικό έχει υπάρξει περισσότερες φορές σε μια «καλή» θέση.

Ο Αντώνης μελέτησε το εύρος των απαντήσεων των δύο χαρακτηριστικών και θεώρησε πως είναι «καλό» το γεγονός οι απαντήσεις των ομάδων να μην διαφωνούν μεταξύ τους (μικρό εύρος απαντήσεων) και «κακό» το γεγονός οι απαντήσεις των ομάδων να διαφωνούν μεταξύ τους (μεγάλο εύρος απαντήσεων). Αυτό γιατί αν μια ομάδα ατόμων έχει πει ότι θέλει στην $1^{η}$ θέση ένα χαρακτηριστικό και μια άλλη ομάδα δεν το θέλει καθόλου, τότε η πρώτη ομάδα θα αγοράσει τα κινητά που θα το έχουν και η δεύτερη ομάδα δεν θα τα αγοράσει σε καμία περίπτωση (αρνητικό γεγονός).

Τέλος ο Πέτρος, ο Παύλος και ο Νίκος τοποθέτησαν τα δύο χαρακτηριστικά στην $3^{η}$ θέση και συνέχισαν συμπληρώνοντας την $5^{η}$ θέση, αφήνοντας την $4^{η}$ κενή. Οι εξηγήσεις που έδωσαν ήταν: «Αυτό γίνεται σε περίπτωση ισοβαθμίας αθλητών» και «Το blue tooth δεν μπορεί να πάρει την $4^{η}$ θέση αφού ανήκει στην $5^{η}$ οπότε η $4^{η}$ μένει κενή». Ο συγκεκριμένος φοιτητής, ο Παύλος, είπε ακόμα πως αν ήταν απαραίτητο να βάλει κάποιο από τα δύο χαρακτηριστικά στην $4^{η}$ θέση, θα έβαζε την κάμερα, διότι μελέτησε το εύρος των τιμών των δύο χαρακτηριστικών, όπως έκανε και ο Αντώνης, και παρατήρησε ότι στο μέγεθος οθόνης οι τιμές είναι πιο κοντινές μεταξύ τους (θετικό στοιχείο).

Έλεγχος των μοντέλων.

Ο έλεγχος του μοντέλου επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος συνδέεται άμεσα με τη διαδικασία της μεταγνώσης του κάθε λύτη.

Οι μαθητές του δημοτικού άρχισαν να μελετούν τα χαρακτηριστικά του πίνακα με ποιοτικό τρόπο συγκρίνοντάς τα μεταξύ τους. Έφτασαν όμως σε αδιέξοδο οπότε αναγκάστηκαν να «γυρίσουν πίσω» και να ελέγξουν τη μέθοδό τους. Όταν μαθηματικοποίησαν τους ποιοτικούς παράγοντες και άρχισαν να επεξεργάζονται τους αριθμούς δεν φάνηκε να ελέγχουν τα αποτελέσματά τους και γι' αυτόν τον λόγο έκαναν αρκετά λάθη στις πράξεις τους καταλήγοντας σε λανθασμένα πολλές φορές συμπεράσματα.

Αντίθετα οι φοιτητές έδειχναν μεγάλη σιγουριά όταν αποφάσισαν να μαθηματικοποιήσουν τους ποιοτικούς παράγοντες και κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας των αριθμών – βαθμών, έκαναν συνεχή έλεγχο παρατηρώντας παράλληλα τις θέσεις των χαρακτηριστικών στον πίνακα. Η Μαρία και ο Νίκος, χαρακτηριστικά, όταν έφτασαν στην ισοβαθμία των δύο χαρακτηριστικών, παραξενεύτηκαν και γύρισαν πίσω να πραγματοποιήσουν ξανά την πράξη της πρόσθεσης, διότι υπέθεσαν πως είχαν πραγματοποιήσει κάποιο αριθμητικό λάθος.

2ο πρόβλημα

Κατανόηση της εκφώνησης του προβλήματος και του ζητούμενου.

Οι μαθητές του δημοτικού και οι φοιτητές του Π.Τ.Δ.Ε. έδειξαν να κατανοούν την δομή του πίνακα και τις πληροφορίες που υπήρχαν σε αυτόν, οι οποίες αφορούσαν τα έξι νησιά, που αποτελούσαν τους πιθανούς προορισμούς για τον κύριο Άρη και την γυναίκα του.

Οι μαθητές του δημοτικού φάνηκε πως παρατήρησαν με προσοχή την εκφώνηση του προβλήματος και όλα τα δεδομένα και έτσι αμέσως ξεκίνησαν με τον υπολογισμό του συνολικού κόστους. Υπολόγισαν αρχικά το συνολικό κόστος διαμονής στο ξενοδοχείο για τις 10 μέρες (πολλαπλασίασαν x10 το κόστος ανά ημέρα που δίνεται στον πίνακα). Στη συνέχεια υπολόγισαν το συνολικό κόστος ενοικίασης αυτοκινήτου για τις 10 μέρες (πολλαπλασίασαν x10 το κόστος ενοικίασης αυτοκινήτου ανά ημέρα). Τέλος υπολόγισαν το συνολικό κόστος των εισιτηρίων για τα 2 άτομα (πολλαπλασίασαν x2 την τιμή του εισιτηρίου ανά άτομο).

Αντίθετα οι φοιτητές δεν μπήκαν σε αυτήν την διαδικασία, αλλά υπολόγισαν απλά το συνολικό κόστος για κάθε προορισμό ανά ημέρα. Μόνο μερικοί από τους φοιτητές μπήκαν στη διαδικασία να υπολογίσουν το συνολικό κόστος για τις 10 ημέρες και για τα 2 άτομα, αλλά χρησιμοποίησαν με άνεση τον αλγόριθμο (α x 10) + (β x 10) + (γ x 2), ενώ οι μαθητές υπολόγισαν έναν-έναν τους πολλαπλασιασμούς και έπειτα έκαναν την πρόσθεση. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει τις πιο σύνθετες μαθηματικές ιδέες των φοιτητών και την ευχέρεια χειρισμού των μαθηματικών εννοιών. Ακόμα οι μαθητές δείχνουν μια μεγαλύτερη προσήλωση στα δεδομένα του προβλήματος και θεωρούν απαραίτητη την αξιοποίηση όλων αυτών, ανεξάρτητα με το αν είναι στην πραγματικότητα αυτό απαραίτητο ή όχι. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα δηλαδή δεν είναι απαραίτητος ο ακριβής υπολογισμός του συνολικού κόστους για όλες τις ημέρες διαμονής, αφού δεν ζητείται κάτι τέτοιο, παρά μόνο μια σύγκριση μεταξύ των προορισμών.

Κατανόηση της σημαντικότητας των παραγόντων του πίνακα, για να γίνει στη συνέχεια η κατάλληλη ομαδοποίηση (ατομικά και στη συνέχεια ομαδικά).

Οι μαθητές του δημοτικού επικεντρώθηκαν αρχικά σε συγκεκριμένα νησιά και ασχολήθηκαν με τα δεδομένα (που αφορούσαν είτε το κόστος είτε τους τόπους διασκέδασης) του καθενός ξεχωριστά, ώστε να σχηματίσουν μια εικόνα για αυτά. Δηλαδή μπήκαν στη διαδικασία να συγκρίνουν μεμονωμένα τα διάφορα χαρακτηριστικά των νησιών μήπως και μπορέσουν με αυτόν τον τρόπο να καταλήξουν σε κάποια συμπεράσματα.

Οι φοιτητές στην πλειοψηφία τους δεν μπήκαν σε αυτήν την διαδικασία, αλλά ξεκίνησαν να ομαδοποιούν αμέσως τους παράγοντες και να συγκρίνουν τα αποτελέσματα των πράξεών τους, πολλές φορές και να ταξινομούν.

Σχετικά με τη σημαντικότητα των παραγόντων, οι μαθητές άρχισαν να σκέφτονται για την άθροιση των τεσσάρων παραγόντων που σχετίζονται με τους τόπους διασκέδασης, και προβληματίστηκαν για την σημαντικότητα των παραγόντων, εκφράζοντας την άποψη ότι οι παραλίες ήταν πιο σημαντικές από τα εστιατόρια, από την στιγμή που οι διακοπές θα ήταν καλοκαίρι. Ακόμα μεγάλος ήταν ο προβληματισμός εάν τα καταστήματα θα έπρεπε να συμπεριληφθούν στον παράγοντα της διασκέδασης. Τελικά όλοι έδωσαν παρόμοια εξήγηση, ότι την γυναίκα του κύριου Άρη θα την ενδιέφεραν, οπότε και τα συμπεριέλαβαν.

Το ίδιο συνέβη και στις ομάδες των φοιτητών, οι οποίοι σκεπτόμενοι να αθροίσουν διάφορους παράγοντες, δημιουργώντας υπερπαράγοντες, μπήκαν σε μια διαδικασία σύγκρισης των παραγόντων ως προς την σημαντικότητά τους. Μόνο η Χρύσα σκέφτηκε σε κάθε παράγοντα, που αποτελούσε υποσύνολο ενός υπερπαράγοντα, να δώσει διαφορετική βαρύτητα, αλλά δεν βρήκε τον τρόπο να το εκφράσει αυτό μαθηματικά.

Αξίζει να σημειωθεί ότι τόσο οι μαθητές όσο και οι φοιτητές προβληματίστηκαν για την βαρύτητα του παράγοντα «κατάσταση οδικού δικτύου», θέτοντας τον προβληματισμό, εάν η κακή κατάσταση οδικού δικτύου ήταν αρκετός λόγος ώστε να αποκλείσουν κάποιον προορισμό.

Η χρονική στιγμή της έναρξης της μαθηματικοποίησης – Δημιουργία μοντέλου για την επιλογή του ιδανικότερου μέρους.

Στο δεύτερο πρόβλημα τόσο οι μαθητές, όσο και οι φοιτητές χειρίστηκαν τα μαθηματικά δεδομένα του προβλήματος προσπαθώντας να καταλήξουν σε ένα μαθηματικό μοντέλο, το οποία θα μπορέσει να επιλύσει το ρεαλιστικό πρόβλημα. Η διαδικασία μαθηματικοποίησης στις ομάδες των δύο βαθμίδων περίπου την ίδια χρονική στιγμή. Ξεκίνησαν με τις ομαδοποιήσεις των παραγόντων σύμφωνα με τα ζητούμενα του προβλήματος και προχώρησαν στους ανάλογους μαθηματικούς υπολογισμούς.

Από τους μαθητές του δημοτικού ο Σπύρος ακολούθησε το μοντέλο που είχε χρησιμοποιηθεί στο 1^{ο} πρόβλημα. Βαθμολόγησε τα στοιχεία του κάθε παράγοντα στον πίνακα με μια κλίμακα από το 1 έως το 6, από το καλύτερο στο χειρότερο και έφτιαξε έναν καινούριο πίνακα με τις κατατάξεις αυτές. Όσον αφορά στους παράγοντες που αφορούσαν το κόστος, ο Σπύρος έδωσε βαθμολογία 1 στο νησί με το μικρότερο κόστος και βαθμολογία 6 στο νησί με το μεγαλύτερο κόστος. Εντόπισε επομένως την «αντίστροφη απόδοση μονάδων στις κατατάξεις».

Ο ίδιος μαθητής μαθηματικοποίησε και τον παράγοντα *οδικό δίκτυο* με καλή κατάσταση:1, μέτρια:2 και κακή:3. Οι υπόλοιποι μαθητές δεν μπήκαν στην διαδικασία να μαθηματικοποιήσουν τον ποιοτικό παράγοντα *οδικό δίκτυο* και απλά τον συνυπολόγισαν ως θετικό ή αρνητικό στοιχείο.

Από τις ομάδες των φοιτητών η Μαρία ακολούθησε και αυτή το μοντέλο που είχε χρησιμοποιηθεί στο 1^{ο} πρόβλημα και έδωσε βαθμολογίες στα στοιχεία του πίνακα με μια κλίμακα από το 6 έως το 1 από το καλύτερο στο χειρότερο και έφτιαξε έναν καινούριο πίνακα με τις κατατάξεις αυτές. Στη συνέχεια πρόσθεσε κάθε γραμμή του πίνακα και όποιο νησί είχε τον μεγαλύτερο αριθμό ήταν το πιο κατάλληλο.

Οι υπόλοιποι φοιτητές ομαδοποίησαν τους παράγοντες και σχημάτισαν τους υπερπαράγοντες *συνολικό κόστος* και *διασκέδαση* με σκοπό να συγκρίνουν τους διάφορους προορισμούς.

Από τους μαθητές μόνο ο Σπύρος μαθηματικοποίησε τον παράγοντα *οδικό δίκτυο*, ενώ, αντίθετα, από τους φοιτητές ήταν αρκετοί εκείνοι που προχώρησαν σε αυτήν την

ενέργεια. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει, όπως ήταν αναμενόμενο, τις πιο σύνθετες μαθηματικές ιδέες των φοιτητών.

Έλεγχος των μοντέλων.

Κατά το στάδιο αυτό, οι μαθητές και οι φοιτητές επέστρεψαν πίσω στον πραγματικό κόσμο του ρεαλιστικού προβλήματος και προσπάθησαν να ελέγξουν κατά πόσο το μοντέλο που είχαν αποφασίσει να χρησιμοποιήσουν για την επίλυση του προβλήματος, αποτελούσε ικανοποιητική λύση, ή κατά πόσο απαιτούσε κάποιου είδους βελτίωση.

Μια σημαντική διαφορά μεταξύ των ομάδων των δύο βαθμίδων αποτελεί το γεγονός ότι οι φοιτητές προβληματίστηκαν περισσότερο για θέματα όπως η ομαδοποίηση διαφορετικών αντικειμένων και κατ' επέκταση η πρόσθεση ανόμοιων παραγόντων (π.χ. παραλίες με καταστήματα). Επομένως, φαίνεται πως ο έλεγχος που πραγματοποίησαν οι φοιτητές σε αντίθεση με τους μαθητές, βασίστηκε σε περισσότερα κριτήρια και είχε ως αποτέλεσμα την οικοδόμηση καλύτερων μοντέλων.

Ο βαθμός στον οποίο θα επηρεαστεί ο συλλογισμός των συμμετεχόντων κατά την επίλυση του δεύτερου προβλήματος από την ομαδική συζήτηση για το καταλληλότερο μοντέλο του πρώτου προβλήματος.

Σε αυτό το στάδιο παρατηρήθηκαν διαφορές μεταξύ των μαθητών δημοτικού και των φοιτητών, ως προς την επικοινωνία. Παρόλο που και οι δύο ομάδες επικοινώνησαν επαρκώς, όσον αφορά στις ιδέες και στις λύσεις τους, ήταν ξεκάθαρο ότι οι φοιτητές του Π.Τ.Δ.Ε., αξιολόγησαν και αναθεώρησαν προοδευτικά τον τρόπο σκέψης τους. Άκουγαν και σκέφτονταν τις εισηγήσεις και τα μοντέλα των άλλων με προσοχή και αυτό είχε ως αποτέλεσμα τη συμμετοχή τους σε μια εποικοδομητική αξιολόγηση. Το γεγονός αυτό, βοήθησε τους φοιτητές να καταλήξουν σε καλύτερες και πιο αναθεωρημένες λύσεις. Αυτό βέβαια, δεν σημαίνει σε καμιά περίπτωση ότι οι μαθητές του δημοτικού δεν επικοινώνησαν επαρκώς, αλλά ότι η επικοινωνία τους επικεντρωνόταν κυρίως σε αποσπασματικές πληροφορίες και σε συζητήσεις σε απομονωμένους παράγοντες με

αποτέλεσμα αυτό να μην βοήθησε στη βελτίωση και αναθεώρηση των μοντέλων τους στον μεγαλύτερο βαθμό.

4. Συμπεράσματα

Ένα σημαντικό εύρημα της παρούσας μελέτης το οποίο συνάδει και με άλλες έρευνες είναι η επιτυχής ενασχόληση των παιδιών της δημοτικής εκπαίδευσης και των φοιτητών Παιδαγωγικής Σχολής Π.Τ.Δ.Ε. με προβλήματα μαθηματικής μοντελοποίησης, τα οποία σχετίζονται με καταστάσεις της πραγματικής ζωής.[44,45]

Η δραστηριότητες που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα μελέτη δεν περιόρισαν την ελευθερία των συμμετεχόντων, αλλά αντίθετα τους προσέφεραν την αυτονομία να προσεγγίσουν και να αναλύσουν τα προβλήματα, λαμβάνοντας υπόψη τις προϋπάρχουσες και άτυπες μαθητικές τους γνώσεις. Το γεγονός αυτό έρχεται σε αντίθεση με τα τυπικά προβλήματα που περιέχονται στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών.

Τα προβλήματα μοντελοποίησης, όπως τα συγκεκριμένα που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα έρευνα, μπορούν να επιδεχθούν λύσεις διαφόρων επιπέδων σύνθετης σκέψης (πολυπλοκότητας). Επιπλέον επιτρέπουν μια ποικιλία προσεγγίσεων επίλυσης, προσφέροντας τη δυνατότητα σε όλους τους λύτες, ανεξαρτήτως της επίδοσής τους στα μαθηματικά, να προσφέρουν και να επωφεληθούν από τις μαθησιακές εμπειρίες.

Τα διάφορα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας σχετικά με τη σύγκριση μαθητών δημοτικού και φοιτητών Π.Τ.Δ.Ε. όσον αφορά στις διαδικασίες μοντελοποίησης και τις μαθηματικές έννοιες, μπορούν να επηρεάσουν τον σχεδιασμό και την εισαγωγή των δραστηριοτήτων μοντελοποίησης στο δημοτικό.

Τα αυθεντικά προβλήματα είναι κατάλληλα για χρήση στην ομαδοσυνεργατική διδασκαλία, όπου οι μαθητές θα είχαν μια καλή ευκαιρία να μάθουν από τους συμμαθητές τους και να οικοδομήσουν τη νέα γνώση.

---

[44] English, L.D. (2003). Reconciling theory, research, and practice: A models and modeling perspective. *Educational Studies in Mathematics, 54*.

[45] Mousoulides, N. (2007). The modeling perspective in the teaching and learning of mathematical problem solving. *Unpublished doctoral dissertation*. Nicosia: University of Cyprus.

5. Βιβλιογραφία

- Bliss J., (1994). From Mental Models to Modelling. In H. Mellar, J. Bliss, R. Boohan, J. Ogborn, C. Tompsett (Eds). *Learning with Artificial Worlds: Computer Based Modelling in the* Curriculum. London: The Falmer Press.

- Βοσνιάδου Σ., (1998). *Γνωσιακή Ψυχολογία*. Εκδόσεις: Gutenberg. Αθήνα.

- Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *Zentralblatt für Didaktik der* Mathematik (International Reviews in Mathematics Education), 37, 3.

- *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.)*. (2002). Υπουργείο παιδείας και Θρησκευμάτων, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

- Doerr, H., & English, L. D. (2003). *A Modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. Journal of Research in Mathematics Education*, 34, 2.

- Doerr, H.M., & Lesh, R (2003). A modelling perspective on teacher development. In H.M. Doerr & R. Lesh (Eds.), *Beyond constructivism: A models and modelling perspective on mathematics problem solving, learning & teaching* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

- Doise W., Mugny G., (1981). *Le développement social de l'intelligence*. Paris, Interéditions.

- English, L.D. (2003). Reconciling theory, research, and practice: A models and modeling perspective. *Educational Studies in Mathematics, 54*.

- English, L., & Lesh, R. (2003). Ends-in-view problems. In R. Lesh and H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models & modeling perspective on mathematics problem solving, learning & teaching.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

- Gentner, D., & Stevens, A.L., Eds. (1983). *Mental Models*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Gilbert J., & Boulter C., (2000). *Developing Models in Science Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Hestenes D., (1992). Modeling games in the Newtonian World. *American Journal of Physics,* 60.

- Jiang, Z., & McClintock, E. (2000). Multiple approaches to problem solving and the use of technology. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 19*(1).

- Καραγεώργος, Δ. (2003). *Διδακτική των Θετικών Επιστημών: Εισαγωγή στη Διδακτική Διαδικασία.* Εκδόσεις Σαββάλας. Αθήνα.

- Kelly, A. E., & Lesh, R. A. (Eds.) (2000). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

- Κλαουδάτος, Ν. (1990). *Μοντελοποίηση: Ένα ισχυρό διδακτικό εργαλείο*. περιοδικό Ευκλείδης Γ΄, τόμος 7, τεύχος 25.

- Κουλαϊδής Β. (επιμ.), (1994). *Αναπαραστάσεις του Φυσικού Κόσμου*. Αθήνα: Gutenberg.

- Lesh, R., & Doerr, H.M. (2003). *Beyond Constructivism: A Models and Modeling* Perspective on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

- Lesh, R., & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning.* Greenwich, CT: Information Age Publishing

- Mayer, R. E. (1985). Implications of Cognitive Psychology for Instruction Mathematical Problem Solving. In E. A. Silver (Ed.), Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

- Mousoulides, N. (2007). The modeling perspective in the teaching and learning of mathematical problem solving. Unpublished doctoral dissertation. Nicosia: University of Cyprus.

- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

- National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. J. Kilpatrick, J. Swafford, and B. Findell (Eds). Mathematics Learning Subcommittee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.

- Norman D., (1983). Some Observations on Mental models. In Gentner, D., & Stevens, A.L., Eds. *Mental Models*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Novak, J.D. (1998). Learning, creating and using knowledge: Concept maps as facilitative tools in schools and corporations. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

- Pollak, H. O. The interaction between mathematics and other school subjects. Unesco 1979, New trends in mathematics teaching, 4.

- Ραβάνης Κ., (1999). Οι Φυσικές Επιστήμες στην Προσχολική Εκπαίδευση. Διδακτική και Γνωστική Προσέγγιση. Εκδόσεις: Τυπωθήτω. Αθήνα.

- Ράπτης Α. & Ράπτη Α, (2002). Μάθηση και Διδασκαλία στην Κοινωνία της Πληροφορίας, Ολική Προσέγγιση. Αθήνα.

- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (Ch. 15) New York: Simon & Schuster Macmillan.

- Schoenfeld, A. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. In J. Voss, D. Perkins and J. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Sriraman, B., & Lesh, R. (2006). Beyond Traditional conceptions of modeling. *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik, 38,* 3.

- Vygotsky L., (1962). *Thought and Language,* MIT PRESS.

- Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (2004). *Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Γ. Δαρδάνος.

- Waxman, H.C., & Huang, S.L. (1996). Classroom instruction differences by level of technology use in middle school mathematics. *Journal of Educational Computing Research, 14.*

- Weil-Barais A., (1994). Les Apprentissages en Sciences Physiques, In G. Vergnaud (Ed) *Apprentissages et Didactiques, ou en est-on?* Serie: Former, Organiser pour Enseigner, Paris : HACHETTE Education.

6. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ακολουθούν οι ατομικές προσεγγίσεις των μαθητών στο 1ο πρόβλημα:

Παρουσιάζεται η πορεία του μαθηματικού συλλογισμού των μαθητών αλλά και τα τελικά μοντέλα που αυτοί δημιούργησαν. Για κάθε πρόβλημα, πρώτα περιγράφεται η ατομική προσέγγιση των μαθητών και ακολουθεί η περιγραφή της συζήτησης του προβλήματος που ακολούθησε στην ομάδα (ολομέλεια).

Τα ονόματα που χρησιμοποιούνται είναι ψευδώνυμα χάριν της ανωνυμίας των μαθητών.

Από την ανάλυση του μαθηματικού συλλογισμού όλων των μαθητών κατά την προσέγγιση του 1ου προβλήματος (της επιλογής κινητού), εντοπίσθηκαν τέσσερις διαφορετικές προσεγγίσεις:

1) Η προσέγγιση που ακολούθησε η Σπυριδούλα

2) Η προσέγγιση που ακολούθησε ο Γιάννης

3) Η προσέγγιση που ακολούθησε η Όλγα και

4) Η προσέγγιση που ακολούθησε ο Σπύρος.

Στη συνέχεια περιγράφονται οι τέσσερις αυτές προσεγγίσεις.

1) Η προσέγγιση που ακολούθησε η Σπυριδούλα

1ος κύκλος: Κατάταξη με βάση τη συχνότητα εμφάνισης στις πρώτες και στις τελευταίες σειρές.

Αρχικά η Σπυριδούλα φτιάχνει τον πίνακα που δίνεται στο πρόβλημα, αλλά μόνο με τις δύο πρώτες σειρές.

Δηλαδή:

1η ομάδα	2η ομάδα	3η ομάδα	4η ομάδα	5η ομάδα
MP3	κάμερα	εμφάνιση	εμφάνιση	εμφάνιση
εμφάνιση	εμφάνιση	κάμερα	μέγεθος οθόνης	μέγεθος οθόνης

Με αυτόν τον τρόπο αποφασίζει ότι το πιο ελκυστικό χαρακτηριστικό είναι η εμφάνιση.

Στη συνέχεια συμπληρώνει τον πίνακα μέχρι και την πέμπτη σειρά και συνεχίζει να συγκρίνει με ποιοτικό τρόπο τις θέσεις που βρίσκονται τα χαρακτηριστικά και προσπαθεί να βρει με ποιον τρόπο να τα κατατάξει. Σε αυτό το σημείο καταλαβαίνει ότι δεν μπορεί να δώσει μια σίγουρη κατάταξη για τις θέσεις 3 έως 8 οπότε και εγκαταλείπει αυτόν τον τρόπο.

2^{ος} κύκλος: Μαθηματικοποίηση του προβλήματος

Η Σπυριδούλα σκέφτηκε να βάλει «βαθμό» σε κάθε θέση και μετά να βρει το συνολικό βαθμό για κάθε χαρακτηριστικό από όλες τις ομάδες. Βαθμολογεί από το 1 έως το 10 από το ελκυστικότερο προς το λιγότερο ελκυστικό. Στη συνέχεια προσθέτει για κάθε χαρακτηριστικό τους βαθμούς που έχει στην κάθε ομάδα και καταλήγει στα παρακάτω:

MP3 = 15

Εμφάνιση = 7

Μέγεθος οθόνης = 16

Κάμερα = 16

Μάρκα = 34

Θύρα USB = 35

blue tooth = 28

τιμή = 29

ραδιόφωνο = 47

διάρκεια μπαταρίας = 48

Στο σημείο αυτό η Σπυριδούλα μπερδεύτηκε και φτάνει σε μια λανθασμένη απόφαση. Λέει: «Αποφάσισα ότι το χαρακτηριστικό που έχει τον μεγαλύτερο αριθμό-βαθμό είναι το πιο ελκυστικό ενώ το χαρακτηριστικό που έχει το μικρότερο αριθμό-βαθμό είναι το λιγότερο ελκυστικό». Καταλήγει στην παρακάτω κατάταξη:

1. διάρκεια μπαταρίας
2. ραδιόφωνο
3. θύρα USB
4. Μάρκα
5. τιμή

6. blue tooth
7. κάμερα
8. Μέγεθος οθόνης
9. MP3
10. Εμφάνιση

3ος κύκλος: Ελέγχει κατά πόσο το μαθηματικό συμπέρασμα έχει νόημα στον πραγματικό κόσμο και κατά πόσο μπορεί να δώσει απάντηση στο πρόβλημα.

Κοιτάει μια φορά τη λύση της από την αρχή και βλέπει ότι αρχικά είχε αποφασίσει ότι το πιο ελκυστικό χαρακτηριστικό είναι η εμφάνιση ενώ στην τελική της λύση είναι τελευταίο. Η απάντηση δε θεωρήθηκε ικανοποιητική και αρχίζει να αναθεωρεί το μοντέλο της.

Τελικά αναδιατυπώνει την πρότασή της και λέει: «Μπερδεύτηκα και είπα ότι το χαρακτηριστικό που έχει τον μεγαλύτερο αριθμό-βαθμό είναι το πιο ελκυστικό ενώ το χαρακτηριστικό που έχει το μικρότερο αριθμό-βαθμό είναι το λιγότερο ελκυστικό, ενώ ισχύει το αντίθετο επειδή το πιο ελκυστικό χαρακτηριστικό παίρνει κάθε φορά μόνο έναν βαθμό».

Σε αυτό το σημείο αλλάζει την τελική της κατάταξη ως εξής:

1. Εμφάνιση
2. MP3
3. Μέγεθος οθόνης
4. κάμερα
5. blue tooth
6. τιμή
7. Μάρκα
8. θύρα USB
9. ραδιόφωνο
10. διάρκεια μπαταρίας

Ανάπτυξη μοντέλου για την αντιμετώπιση του προβλήματος της ισοψηφίας μεταξύ *μεγέθους οθόνης και κάμερας*.

Η Σπυριδούλα λέει: «Θα βάλω το μέγεθος οθόνης στην 3η θέση γιατί είναι πιο πολλές φορές ψηλά στον πίνακα, ενώ η κάμερα είναι και στην 6η θέση (πολύ χαμηλά)».

Πιθανόν ακολούθησε αυτόν τον τρόπο σκέψης, διότι αρχικά είχε χωρίσει τον πίνακα στη μέση. Μέχρι την 5η θέση είχε θεωρήσει ότι είναι τα ελκυστικά χαρακτηριστικά και από την 6η έως την 10η είναι τα μη ελκυστικά. Έτσι θεώρησε αρνητικό το γεγονός ότι το χαρακτηριστικό κάμερα υπήρξε μια φορά στον πίνακα στην 6η θέση και αποφάσισε να το τοποθετήσει στην 4η θέση στην τελική κατάταξη, αν και είχε ισοβαθμία με το χαρακτηριστικό μέγεθος οθόνης.

Η Σπυριδούλα είχε καταφέρει να βρει μια μέθοδο κατάταξης (μοντέλο) με την οποία μπορούσε αντικειμενικά να κατατάξει τα χαρακτηριστικά των κινητών τηλεφώνων στο συγκεκριμένο πρόβλημα και την οποία μπορούσε να επαναχρησιμοποιήσει σε παρόμοιες καταστάσεις.

Εξηγεί στην εταιρία τη μέθοδο που χρησιμοποίησε ως εξής: «Η μέθοδος που επέλεξα ήταν να βάζω αριθμούς στο κάθε πράγμα ανάλογα με τη θέση του και μετά να τα προσθέτω και να βρίσκω το αποτέλεσμα ».

2) Η προσέγγιση που ακολούθησε ο Γιάννης

1ος κύκλος: Αρχικά συγκρίνει ποιοτικά τα χαρακτηριστικά και προχωρά σε μια απλοποίηση των δεδομένων (σύμφωνα με αυτόν) όπου χωρίζει για κάθε ομάδα τα χαρακτηριστικά σε ελκυστικά – μη ελκυστικά. Στη συνέχεια δίνει την εξής απλοποιημένη απάντηση στο πρόβλημα: «Τα 5 ελκυστικά χαρακτηριστικά κινητών τηλεφώνων είναι τα: εμφάνιση, MP3, μέγεθος οθόνης, κάμερα, blue tooth και τα 5 μη ελκυστικά χαρακτηριστικά είναι τα: θύρα USB, τιμή, μάρκα, ραδιόφωνο, διάρκεια μπαταρίας. Τα χαρακτηριστικά αυτά που είναι ψηλά στη στήλη σε όλες τις ομάδες είναι τα ελκυστικά. Αυτά που είναι κάτω από τα μισά που είναι ψηλά, είναι αυτά που είναι τα μη ελκυστικά ».

Ο Γιάννης δεν κατάλαβε ότι έπρεπε να ταξινομήσει τα χαρακτηριστικά σε μια 10βαθμη κλίμακα και έτσι κατασκεύασε μια ταξινόμηση 2 θέσεων (ελκυστικά – μη

ελκυστικά). Στη συνέχεια η ερευνήτρια εφιστά την προσοχή του μαθητή στην εκφώνηση του προβλήματος και συγκεκριμένα στη λέξη ταξινόμηση. Ο μαθητής ερμηνεύει τη λέξη και την παρομοιάζει με τους αθλητικούς αγώνες όπου στο τέλος γίνεται η ταξινόμηση των αθλητών ανάλογα με τις επιδόσεις τους και παίρνουν τις τελικές θέσεις ($1^{η}$ θέση, $2^{η}$ θέση κ.λ.π.).

$2^{ος}$ κύκλος: Γράφει κάθε χαρακτηριστικό και δίπλα γράφει τη θέση που έχει σε κάθε ομάδα:

MP3: 1, 3, 4, 4, 3

Εμφάνιση: 2, 2, 1, 1, 1

Μέγεθος οθόνης: 3, 4, 5, 2, 2

Κάμερα: 4, 1, 2, 3, 6

Μάρκα: 5, 7, 8, 6, 8

θύρα USB: 6, 8, 7, 7, 7

blue tooth: 7, 5, 6, 5, 5

τιμή: 8, 6, 3, 8, 4

ραδιόφωνο: 9, 10, 9, 10, 9

διάρκεια μπαταρίας: 10, 9, 10, 9, 10

Στη συνέχεια προσπαθεί να συγκρίνει τους αριθμούς κάθε χαρακτηριστικού, αλλά καταλαβαίνει πως είναι πολύ μπερδεμένο και δεν καταλήγει κάπου. Αποφασίζει να προσθέσει τους αριθμούς κάθε χαρακτηριστικού έτσι ώστε να έχει να συγκρίνει πιο λίγους αριθμούς στη συνέχεια:

MP3: 1 + 3 + 4 + 4 + 3 = 15

Εμφάνιση: 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 7

Μέγεθος οθόνης: 3 + 4 + 5 + 2 + 2 = 16

Κάμερα: 4 + 1 + 2 + 3 + 6 = 16

Μάρκα: 5 + 7 + 8 + 6 + 8 = 34

θύρα USB: 6 + 8 + 7 + 7 + 7 = 35

blue tooth: 7 + 5 + 6 + 5 + 5 = 28

τιμή: 8 + 6 + 3 + 8 + 4 = 29

ραδιόφωνο: 9 + 10 + 9 + 10 + 9 = 47

διάρκεια μπαταρίας: 10 + 9 + 10 + 9 + 10 = 48

Αποφασίζει σε αυτό το σημείο να υπολογίσει τον μέσο όρο για κάθε χαρακτηριστικό και στη συνέχεια να κατατάξει τα χαρακτηριστικά από αυτό με τον μικρότερο Μ.Ο. σε αυτό με τον μεγαλύτερο Μ.Ο.. Τελικά δεν το κάνει, γιατί συνειδητοποιεί πως είναι το ίδιο με το να χρησιμοποιήσει τα αθροίσματα που έχει ήδη βρει. Είχε και αυτός καταφέρει να βρει μια μέθοδο κατάταξης (μοντέλο) με την οποία μπορούσε αντικειμενικά να κατατάξει τα χαρακτηριστικά των κινητών τηλεφώνων στο συγκεκριμένο πρόβλημα αλλά και να την επαναχρησιμοποιήσει σε παρόμοιες καταστάσεις.

Καταλήγει στην εξής ταξινόμηση:

1. Εμφάνιση
2. MP3
3. μέγεθος οθόνης = κάμερα
4. blue tooth
5. τιμή
6. μάρκα
7. θύρα USB
8. ραδιόφωνο
9. διάρκεια μπαταρίας

Ανάπτυξη μοντέλου για την αντιμετώπιση του προβλήματος της ισοψηφίας μεταξύ *μεγέθους οθόνης και κάμερας*.

Ο Γιάννης αποφάσισε να κατατάξει στην $3^{η}$ θέση το μέγεθος οθόνης και την κάμερα και συνέχισε κανονικά την αρίθμηση με το *Blue tooth* στην $4^{η}$ θέση, με αποτέλεσμα να αριθμήσει συνολικά 9 σειρές.

3) Η προσέγγιση που ακολούθησε η Όλγα

1ος κύκλος: Κατάταξη με βάση τη *συχνότητα* εμφάνισης στις πρώτες και στις τελευταίες σειρές.

Αρχικά παρατήρησε τις πρώτες σειρές (θέσεις) και προσπάθησε να κάνει την ταξινόμηση συγκρίνοντας ποιοτικά τα χαρακτηριστικά. Είπε: «Βλέπω τις πρώτες σειρές και καταλήγω στο ότι η εμφάνιση είναι το ελκυστικότερο. Επίσης το ραδιόφωνο και η διάρκεια μπαταρίας εμφανίζονται συχνότερα στις 2 τελευταίες θέσεις, άρα πρέπει να καταταχθούν τελευταία. Μετά όμως για τα άλλα δεν βγαίνει». Διαπίστωσε δηλαδή ότι αυτή η μέθοδος δεν αποτελούσε αντικειμενικό εργαλείο για την κατάταξη των υπόλοιπων χαρακτηριστικών.

2ος κύκλος: Μαθηματικοποίησε τις θέσεις (1η, 2η, κλπ) στον πίνακα αντιστοιχίζοντας ποσότητες (1, 2, 3, κλπ) σε κάθε θέση. Έτσι η θέση κάθε χαρακτηριστικού σε κάθε στήλη, αντιστοιχούσε σε κάποιον αριθμό από το 1 μέχρι το 10. Δεν μπόρεσε όμως να αποφασίσει τι ακριβώς έπρεπε να κάνει με τους αριθμούς. Έφερε μια γραμμή πάνω στον πίνακα, και ένωσε (γραφικά) όλες τις θέσεις για το κάθε χαρακτηριστικό, χωρίς να είναι σίγουρη για το τι ήταν αυτό που ήθελε να πετύχει. Στη συνέχεια έβαλε τελίτσες δίπλα σε κάθε χαρακτηριστικό ανάλογα με τη θέση του και υπολόγιζε το σύνολό τους. Έκανε όμως κάποια λάθη στους υπολογισμούς της και μπερδεύτηκε. Παρά το ότι έφθασε πολύ κοντά στο μοντέλο της Σπυριδούλας και του Γιάννη, δεν κατέληξε τελικά σε αυτό.

Η περιγραφή της για την προσέγγιση που ακολούθησε ήταν: «Έκανα μια στατιστική με ραβδογράμματα και κατέληξα σε ένα αποτέλεσμα βάζοντας τα χαρακτηριστικά κατά μέσο όρο ταξινομημένα. Ακόμα υπολόγισα τις τελίτσες που είχε κάθε χαρακτηριστικό ανάλογα με τη θέση του, αλλά δεν μου βγήκε».

Η τελική κατάταξη στην οποία κατέληξε ήταν η παρακάτω:

1. Εμφάνιση
2. MP3
3. μέγεθος οθόνης - κάμερα
4. μάρκα
5. blue tooth
6. τιμή
7. θύρα USB

8. ραδιόφωνο
9. διάρκεια μπαταρίας

Η τελική κατάταξη της Όλγας δεν είναι η σωστή και αυτό οφείλεται σε υπολογιστικά λάθη που έκανε κατά τη διάρκεια της επίλυσης του προβλήματος. Στο τέλος δεν προχώρησε σε μια αξιολόγηση του αποτελέσματός της διότι δεν ήταν εύκολο για αυτήν. Έπρεπε να μετρήσει από την αρχή όλες τις τελίτσες για κάθε χαρακτηριστικό πράγμα το οποίο είναι χρονοβόρο. Η Όλγα, αν και έφτασε πολύ κοντά, δεν κατάφερε τελικά να βρει μια μέθοδο κατάταξης (μοντέλο) με την οποία θα μπορούσε αντικειμενικά να κατατάξει τα χαρακτηριστικά των κινητών τηλεφώνων στο συγκεκριμένο πρόβλημα και την οποία θα μπορούσε να επαναχρησιμοποιήσει σε παρόμοιες καταστάσεις.

Ανάπτυξη μοντέλου για την αντιμετώπιση του προβλήματος της ισοψηφίας μεταξύ *μεγέθους οθόνης και κάμερας*.

Η Όλγα αποφάσισε να κατατάξει στην $3^{η}$ θέση το μέγεθος οθόνης και την κάμερα και συνέχισε κανονικά την αρίθμηση με το επόμενο χαρακτηριστικό στην $4^{η}$ θέση, με αποτέλεσμα να αριθμήσει συνολικά 9 σειρές.

4) Η προσέγγιση που ακολούθησε ο Σπύρος.

$1^{ος}$ κύκλος: Ο Σπύρος δεν ξεκίνησε να συγκρίνει τα χαρακτηριστικά ποιοτικά, αλλά εισήγαγε αμέσως αριθμούς (μαθηματικοποίηση). Προσπάθησε να εκφράσει τη συχνότητα εμφάνισης του κάθε χαρακτηριστικού (σε κάθε σειρά - οριζόντια) με τη μορφή αναλογίας. Για παράδειγμα, στην $1^{η}$ σειρά για το χαρακτηριστικό εμφάνιση το οποίο εμφανίστηκε 3 φορές, αντιστοίχισε τον αριθμό $\frac{3}{5}$. Η περιγραφή του για την προσέγγιση που ακολούθησε ήταν: «Βρίσκω από κάθε ομάδα πώς θέλουν το κάθε πράγμα για πρώτο, δεύτερο, τρίτο και κάνω κλάσματα». Καταλήγει στα παρακάτω:

1η σειρά: εμφάνιση $\frac{3}{5}$, κάμερα $\frac{1}{5}$, MP3 $\frac{1}{5}$

2η σειρά: εμφάνιση $\frac{2}{5}$, μέγεθος οθόνης $\frac{2}{5}$, κάμερα $\frac{1}{5}$

3η σειρά: MP3 $\frac{2}{5}$, τιμή $\frac{1}{5}$, μέγεθος οθόνης $\frac{1}{5}$, κάμερα $\frac{1}{5}$

4η σειρά: MP3 $\frac{2}{5}$, τιμή $\frac{1}{5}$, μέγεθος οθόνης $\frac{1}{5}$, κάμερα $\frac{1}{5}$

5η σειρά: blue tooth $\frac{3}{5}$, μέγεθος οθόνης $\frac{1}{5}$, μάρκα $\frac{1}{5}$

6η σειρά: θύρα USB $\frac{1}{5}$, τιμή $\frac{1}{5}$, blue tooth $\frac{1}{5}$, μάρκα $\frac{1}{5}$, κάμερα $\frac{1}{5}$

7η σειρά: θύρα USB $\frac{3}{5}$, blue tooth $\frac{1}{5}$, μάρκα $\frac{1}{5}$

8η σειρά: μάρκα $\frac{2}{5}$, τιμή $\frac{2}{5}$, θύρα USB $\frac{1}{5}$

9η σειρά: ραδιόφωνο $\frac{3}{5}$, διάρκεια μπαταρίας $\frac{2}{5}$

10η σειρά: ραδιόφωνο $\frac{2}{5}$, διάρκεια μπαταρίας $\frac{3}{5}$

Στη συνέχεια προσπαθεί να συγκρίνει τα κλάσματα για να ταξινομήσει τα χαρακτηριστικά. Έτσι για κάθε χαρακτηριστικό πολλαπλασιάζει τον αριθμό της σειράς με το κλάσμα και στη συνέχεια προσθέτει τα κλάσματα όλων των σειρών. Δηλαδή:

Εμφάνιση= $1x\frac{3}{5} + 2x\frac{2}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$

Κάμερα= $1x\frac{1}{5} + 2x\frac{1}{5} + 3x\frac{1}{5} + 4x\frac{1}{5} + 6x\frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{6}{5} = \frac{16}{5}$

MP3= $1x\frac{1}{5} + 3x\frac{2}{5} + 4x\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{6}{5} + \frac{8}{5} = \frac{15}{5}$

μέγεθος οθόνης= $2x\frac{2}{5} + 3x\frac{1}{5} + 4x\frac{1}{5} + 5x\frac{1}{5} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{5}{5} = \frac{16}{5}$

τιμή= $3x\frac{1}{5} + 4x\frac{1}{5} + 6x\frac{1}{5} + 8x\frac{2}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{6}{5} + \frac{16}{5} = \frac{29}{5}$

blue tooth= $5x\frac{3}{5} + 6x\frac{1}{5} + 7x\frac{1}{5} = \frac{15}{5} + \frac{6}{5} + \frac{7}{5} = \frac{28}{5}$

θύρα USB= $6x\frac{1}{5} + 7x\frac{3}{5} + 8x\frac{1}{5} = \frac{6}{5} + \frac{21}{5} + \frac{8}{5} = \frac{35}{5}$

μάρκα= $5x\frac{1}{5} + 6x\frac{1}{5} + 7x\frac{1}{5} + 8x\frac{2}{5} = \frac{5}{5} + \frac{6}{5} + \frac{7}{5} + \frac{16}{5} = \frac{34}{5}$

ραδιόφωνο= $9x\frac{3}{5} + 10x\frac{2}{5} = \frac{27}{5} + \frac{20}{5} = \frac{47}{5}$

διάρκεια μπαταρίας= $9x\frac{2}{5} + 10x\frac{3}{5} = \frac{18}{5} + \frac{30}{5} = \frac{48}{5}$

Τέλος, ταξινομεί τα χαρακτηριστικά από το μικρότερο κλάσμα στο μεγαλύτερο και καταλήγει στην παρακάτω ταξινόμηση:

1. Εμφάνιση
2. MP3
3. κάμερα
4. μέγεθος οθόνης
5. blue tooth
6. τιμή
7. μάρκα
8. θύρα USB
9. ραδιόφωνο
10. διάρκεια μπαταρίας

Ανάπτυξη μοντέλου για την αντιμετώπιση του προβλήματος της ισοψηφίας μεταξύ *μεγέθους οθόνης και κάμερας.*

Ο Σπύρος επέλεξε αυθαίρετα να τοποθετήσει στην $3^η$ θέση την *κάμερα* και στην $4^η$ το *μέγεθος* οθόνης. Είπε: «Είναι το ίδιο πράγμα σε ποια από τις δύο θέσεις ($3^η$ ή $4^η$) θα πάνε η κάμερα και το μέγεθος οθόνης».

2ος τρόπος από τον Σπύρο

Ο Σπύρος τελείωσε σε σύντομο χρονικό διάστημα το πρόβλημα. Η ερευνήτρια τον παρότρυνε να ψάξει ακόμα έναν τρόπο για να λύσει το ίδιο πρόβλημα.

Πάλι ο μαθητής μπαίνει στη διαδικασία να μαθηματικοποιήσει τις θέσεις (σειρές του πίνακα) από την αρχή. Λέει: «Θα βαθμολογήσω κάθε σειρά με πόντους, η 1η σειρά θα παίρνει 10 πόντους και η 10η 1 πόντο». Στη συνέχεια προσθέτει για κάθε χαρακτηριστικό τους πόντους του και ταξινομεί τα χαρακτηριστικά σύμφωνα με τους πόντους που έχουν συνολικά. Πρώτη θέση στην ταξινόμηση έχει το χαρακτηριστικό με τους περισσότερους πόντους κ.ο.κ.

Η μέθοδος αυτή του Σπύρου είναι η ίδια με τη μέθοδο της Σπυριδούλας και του Γιάννη μόνο που εδώ οι αριθμοί τοποθετήθηκαν στον πίνακα από το 10 στο 1:

	1η ομάδα	**2η ομάδα**	**3η ομάδα**	**4η ομάδα**	**5η ομάδα**
10	MP3	κάμερα	εμφάνιση	εμφάνιση	εμφάνιση
9	εμφάνιση	εμφάνιση	κάμερα	μέγεθος οθόνης	μέγεθος οθόνης
8	μέγεθος οθόνης	MP3	τιμή	κάμερα	MP3
7	κάμερα	μέγεθος οθόνης	MP3	MP3	τιμή
6	μάρκα	blue tooth	μέγεθος οθόνης	blue tooth	blue tooth
5	θύρα USB	τιμή	blue tooth	μάρκα	κάμερα
4	blue tooth	μάρκα	θύρα USB	θύρα USB	θύρα USB
3	τιμή	θύρα USB	μάρκα	τιμή	μάρκα
2	ραδιόφωνο	διάρκεια μπαταρίας	ραδιόφωνο	διάρκεια μπαταρίας	ραδιόφωνο
1	διάρκεια μπαταρίας	ραδιόφωνο	διάρκεια μπαταρίας	ραδιόφωνο	διάρκεια μπαταρίας

Έτσι:

Εμφάνιση= 9+9+10+10+10=48

Κάμερα= 10+9+8+5+7=39

MP3= 10+8+7+7+8=40

μέγεθος οθόνης= 8+7+6+9+9=39

τιμή= 3+5+8+3+7=26

blue tooth= 4+6+5+6+6=27

θύρα USB=5+3+4+4+4=20

μάρκα= 6+4+3+5+3=21

ραδιόφωνο= 2+1+2+1+2=8

διάρκεια μπαταρίας= 1+2+1+2+1=7

Ταξινομεί τα χαρακτηριστικά από αυτό που έχει τους περισσότερους πόντους σε αυτό που έχει τους λιγότερους:

1. Εμφάνιση
2. MP3
3. Μέγεθος οθόνης
4. κάμερα
5. blue tooth
6. τιμή
7. Μάρκα
8. θύρα USB
9. ραδιόφωνο
10. διάρκεια μπαταρίας

Τέλος συγκρίνει τις δύο του λύσεις και βλέπει ότι έχει καταλήξει στην ίδια κατάταξη και τις δύο φορές.

Η συζήτηση στην ομάδα

Το λόγο πήρε πρώτα ο Γιάννης και περιέγραψε τη δική του μέθοδο ταξινόμησης. Ο Σπύρος είπε: «Κι εγώ έκανα το ίδιο πράγμα, αλλά αντί να βαθμολογήσω στον πίνακα από το 1 έως το 10 έκανα το αντίθετο. Βαθμολόγησα από το από το 10 έως το 1». Ο Γιάννης είπε: «Ναι, το ίδιο ακριβώς είναι μόνο που πρέπει να προσέξουμε στο τέλος, στην τελική ταξινόμηση, να τοποθετήσουμε τα χαρακτηριστικά από αυτό που έχει το μεγαλύτερο βαθμό σε αυτό που έχει το μικρότερο βαθμό». Η Σπυριδούλα είπε: «Εγώ αυτό έπαθα. Ακολούθησα τη μέθοδο που ακολούθησε και ο Γιάννης, αλλά στο τέλος μπερδεύτηκα και τα ταξινόμησα ανάποδα. Ευτυχώς όμως το κατάλαβα γιατί αρχικά είχα αποφασίσει σίγουρα ποιο χαρακτηριστικό θα πήγαινε πρώτο».

Σε αυτό το σημείο παίρνει το λόγο η Όλγα και λέει: «Εγώ έβαλα αριθμούς στον πίνακα από το 1 έως το 10, αλλά δεν σκέφτηκα να τους προσθέσω. Προσπάθησα να

κάνω κάτι σαν ραβδογράμματα, αλλά δεν κατέληξα πουθενά». Ο Σπύρος είπε: «Έπρεπε κάπως να συγκρίνεις τα χαρακτηριστικά με τους αριθμούς τους. Τι έκανες;». Η Όλγα απάντησε: «Σε κάθε πράγμα έβαζα δίπλα τελίτσες ανάλογα με τον αριθμό τους σε κάθε θέση». Ο Σπύρος είπε: «Ίσως να μπορούσες να καταλήξεις κάπου, αλλά μάλλον μπερδεύτηκες με τις τελίτσες». Η Όλγα απάντησε: «Η μέθοδός μου μάλλον δεν λύνει το πρόβλημα, επειδή έχει πολλά χαρακτηριστικά. Άμα ήταν λιγότερα θα έβγαινε».

Ο Γιάννης είπε: «Εγώ σκέφτηκα να βρω τους Μ.Ο.». Η Σπυριδούλα απάντησε: «Είναι το ίδιο πράγμα». Συμφώνησαν και οι υπόλοιποι.

Τέλος ο Σπύρος ανακοίνωσε τη μέθοδο ταξινόμησης που χρησιμοποίησε με τα κλάσματα. Η ομάδα ενθουσιάστηκε με τη μέθοδο του Σπύρου, αλλά είπαν ότι έχει πιο πολλές και πιο δύσκολες πράξεις.

Στην ομάδα έγινε μια σύντομη ανασκόπηση όλων των προτεινόμενων λύσεων και τελικά όλοι συμφώνησαν ότι η μέθοδος του Γιάννη και της Σπυριδούλας είναι η καλύτερη και πιο «εύκολη». Η συζήτηση διήρκησε περίπου 20 λεπτά.

Ακολουθούν οι ατομικές προσεγγίσεις των μαθητών στο 2ο πρόβλημα:

Από την ανάλυση του μαθηματικού συλλογισμού όλων των μαθητών κατά την προσέγγιση του 2ου προβλήματος (Το ιδανικό μέρος για καλοκαιρινές διακοπές), εντοπίσθηκαν τέσσερις διαφορετικές προσεγγίσεις:

1) Η προσέγγιση που ακολούθησε η Σπυριδούλα

2) Η προσέγγιση που ακολούθησε ο Γιάννης

3) Η προσέγγιση που ακολούθησε η Όλγα και

4) Η προσέγγιση που ακολούθησε ο Σπύρος.

Στη συνέχεια περιγράφονται οι τέσσερις αυτές προσεγγίσεις.

1) Η προσέγγιση που ακολούθησε η Σπυριδούλα

Υπολογίζει για κάθε μέρος το συνολικό κόστος διαμονής και τα συνολικά μέρη διασκέδασης. Το κόστος διαμονής ανά ημέρα στο ξενοδοχείο το πολλαπλασιάζει με το 10, που είναι οι μέρες που θα διαρκέσουν οι διακοπές του κυρίου Άρη και της γυναίκας του, το ίδιο και το κόστος ενοικίασης αυτοκινήτου. Το εισιτήριο μετ' επιστροφής το πολλαπλασιάζει με το 2, που είναι ο αριθμός των ατόμων (ο κύριος Άρης και η γυναίκα του). Σε αυτό το σημείο η Σπυριδούλα έχει δημιουργήσει τον υπερπαράγοντα *συνολικό κόστος*. Για κάθε προορισμό υπολογίζει το συνολικό αριθμό των τόπων διασκέδασης, οπότε δημιουργεί και τον υπερπαράγοντα *μέρη διασκέδασης*.

Αφού κάνει όλους τους υπολογισμούς για όλα τα μέρη προχωρά στη δημιουργία ενός νέου πίνακα:

Προορισμοί	**Διασκέδαση**	**Κόστος Διαμονής**
Αφροντίνια	61	1380 €
Αρτεμίσια	63	1980 €
Απολλώνεια	59	1330 €
Αθήνια	60	1900 €
Έρμια	55	1760 €
Ποσειδώνια	60	2110 €

Συγκρίνει τους προορισμούς με τη βοήθεια του πίνακα που κατασκεύασε και λαμβάνοντας υπ' όψιν και τον παράγοντα οδικό δίκτυο δίνει την τελική της απάντηση: «Το οικονομικότερο, που έχει καλή διασκέδαση και καλό οδικό δίκτυο, μέρος είναι η Αφροντίνια».

2) Η προσέγγιση που ακολούθησε ο Γιάννης

Ο Γιάννης ξεκινά με τον υπολογισμό του συνολικού κόστους για κάθε προορισμό (χρήση υπερπαράγοντα *συνολικό κόστος*). Λέει: «Θα προσθέσω όλα τα χρήματα και μετά θα βάλω τους προορισμούς σε σειρά από τον οικονομικότερο στον ακριβότερο».

Καταλήγει στην παρακάτω ταξινόμηση για το *συνολικό κόστος*:

1. Απολλώνεια
2. Αφροντίνια
3. Έρμια
4. Αθήνια
5. Αρτεμίσια
6. Ποσειδώνια

Συνεχίζει ομαδοποιώντας τα 4 μέρη διασκέδασης και χρησιμοποιεί τον υπερπαράγοντα *διασκέδαση*. Στο τέλος ταξινομεί τους προορισμούς από αυτόν που έχει τα περισσότερα μέρη διασκέδασης σε αυτόν που έχει τα λιγότερα:

1. Αρτεμίσια
2. Αφροντίνια
3. Αθήνια - Ποσειδώνια
4. Απολλώνεια
5. Έρμια

Τέλος για κάθε προορισμό προσθέτει τη θέση του στις δύο ταξινομήσεις που κατασκεύασε:

Απολλώνεια: 4+1=5

Αθήνια: 4+3=7

Αφροντίνια: 2+2=4

Αρτεμίσια: 1+5=6

Έρμια: 5+3=8

Ποσειδώνια: 3+6=9

Σε αυτό το σημείο κατασκευάζει την τελική του ταξινόμηση από τον προορισμό που έχει τον μικρότερο αριθμό στον προορισμό που έχει τον μεγαλύτερο αριθμό στην τελική του κατάταξη:

1. Αφροντίνια
2. Απολλώνεια
3. Αρτεμίσια
4. Αθήνια
5. Έρμια
6. Ποσειδώνεια

Άρα ο ιδανικότερος προορισμός για τον κύριο Άρη και την γυναίκα του είναι η Αφροντίνια.

3) Η προσέγγιση που ακολούθησε η Όλγα

Η Όλγα υπολογίζει αρχικά το κόστος του ξενοδοχείου, του αυτοκινήτου και του εισιτηρίου συνολικά για κάθε προορισμό, χρησιμοποιώντας και αυτή τον υπερπαράγοντα *συνολικό κόστος*. Αφού κάνει όλους τους υπολογισμούς προχωρά σε μια υπερεκτίμηση του παράγοντα κόστος και μια απλοποίηση του προβλήματος καθώς απορρίπτει αμέσως τους προορισμούς εκείνους που δεν είναι οικονομικοί. Λέει: «Θα χρησιμοποιήσω μόνο τους προορισμούς Απολλώνεια και Αφροντίνια που είναι οικονομικοί, οι υπόλοιποι δεν μας ενδιαφέρουν».

Στη συνέχεια ομαδοποιεί τα 4 μέρη διασκέδασης, χρησιμοποιώντας τον υπερπαράγοντα *μέρη διασκέδασης*. Υπολογίζει μόνο για τους δύο προορισμούς τα συνολικά μέρη διασκέδασης:

Απολλώνεια:5+4+35+15=60 μέρη διασκέδασης

Αφροντίνια:9+5+27+20=61 μέρη διασκέδασης

Μετά από μια σύγκριση της κατάστασης των οδικών δικτύων η Όλγα δίνει την τελική της απάντηση: «Η Αφροντίνια είναι η πιο οικονομική και έχει περισσότερα μέρη διασκέδασης».

4) Η προσέγγιση που ακολούθησε ο Σπύρος

Ο Σπύρος ξεκινά αντιστοιχίζοντας έναν αριθμό σε κάθε προορισμό. Έτσι: Απολλώνεια=1, Αθήνια=2, Αφροντίνια=3, Αρτεμίσια=4, Έρμια= 5 και Ποσειδώνια=6. Σε κάθε στήλη (για κάθε παράγοντα) ταξινομεί τους προορισμούς από τον καλύτερο προς τον χειρότερο βάζοντας αριθμούς από το 1 έως το 6 και κατασκευάζει έναν νέο πίνακα ο οποίος είναι ο εξής:

Προορισμός	Παραλίες	Αξιοθέατα	Καταστήματα	Εστιατόρια-καφετέριες	ξενοδοχείο	αυτοκίνητο	Εισιτήριο	Κυκλοφορία
1	4	3	2	6	1	1	1	2
2	2	4	4	1	3	4	4	1
3	1	2	5	2	1	2	2	1
4	4	3	1	5	5	3	5	3
5	5	1	6	3	2	5	3	1
6	3	2	3	4	4	6	6	3

Ο Σπύρος μαθηματικοποιεί τον ποιοτικό παράγοντα κατάσταση οδικού δικτύου ως εξής: Για το καλή βάζει τον αριθμό 1, για το μέτρια βάζει τον αριθμό 2 και για το κακή βάζει τον αριθμό 3.

Στη συνέχεια κυκλώνει τους προορισμούς που «νικάνε» σε κάθε παράγοντα όπως φαίνεται παρακάτω:

Προορισμός	Παραλίες	Αξιοθέατα	Καταστήματα	Εστιατόρια-καφετέριες	ξενοδοχείο	αυτοκίνητο	Εισιτήριο	Κυκλοφορία
1	4	3	2	6	1	1	1	2
2	2	4	4	1	3	4	4	1
3	1	2	5	2	1	2	2	1
4	4	3	1	5	5	3	5	3
5	5	1	6	3	2	5	3	1
6	3	2	3	4	4	6	6	3

Ο Σπύρος δίνει την τελική του απάντηση: «Ο ιδανικός προορισμός είναι το 3=(Αφροντίνια), επειδή έχει νικήσει 3 φορές και η χειρότερη θέση που έχει πάρει είναι η 5 και τα άλλα όλα 2, ενώ το 1=(Απολλώνεια) έχει νικήσει πάλι 3 φορές, αλλά η χειρότερη θέση που έχει πάρει είναι το 6,4,3.

Η συζήτηση στην ομάδα

Το λόγο πήρε πρώτα η Σπυριδούλα και περιέγραψε τη μέθοδο που ακολούθησε. Ο Γιάννης είπε: «Κι εγώ ακολούθησα την ίδια μέθοδο, απλά υπολόγισα ξεχωριστά για το συνολικό κόστος και μετά για τα μέρη διασκέδασης». Η Σπυριδούλα είπε: «Εγώ τα υπολόγισα μαζί, έφτιαξα έναν πίνακα και μετά έκανα την ταξινόμηση». Ο Γιάννης είπε: «Εγώ έκανα ξεχωριστά την ταξινόμηση και έβαλα αριθμούς στον κάθε προορισμό από το 1 έως το 6. Μετά πρόσθεσα τους αριθμούς που είχε πάρει κάθε προορισμός και βρήκα την τελική ταξινόμηση, όπως στο προηγούμενο πρόβλημα». Η Όλγα είπε: «Εγώ υπολόγισα πρώτα το συνολικό κόστος για κάθε προορισμό και απέρριψα τους ακριβούς προορισμούς, αφού το πρόβλημα μας ζητάει να βρούμε τον πιο οικονομικό». Ο Γιάννης είπε: «Ναι, όμως δεν μας ζητάει να είναι μόνο οικονομικός ο προορισμός, μας ζητάει να έχει και πολλά μέρη διασκέδασης». Ο Σπύρος είπε: «Νομίζω πως δεν πρέπει να απορρίπτουμε γνωρίζοντας μόνο τον παράγοντα κόστος». Η Όλγα απάντησε: «Ναι, όμως βρήκα τον σωστό προορισμό». Η Σπυριδούλα είπε: «Θα μπορούσες όμως να μην βρεις τον σωστό σε ένα παρόμοιο πρόβλημα, που π.χ. θα ήταν όλοι οι προορισμοί με παρόμοιο κόστος ή που οι οικονομικοί προορισμοί θα είχαν πολύ λίγα μέρη διασκέδασης». Συμφώνησαν όλοι.

Η Σπυριδούλα είπε: «Είναι σωστό που προσθέσαμε παραλίες με αξιοθέατα, καταστήματα και εστιατόρια-καφετέριες; Αφού δεν είναι το ίδιο πράγμα». Ο Γιάννης απάντησε: «Δεν μας πειράζει, γιατί είναι όλα μέρη διασκέδασης που μας ζητάει το πρόβλημα στην εκφώνηση».

Ο Σπύρος πήρε το λόγο και ανακοίνωσε τη διαφορετική μέθοδο που είχε χρησιμοποιήσει. Η ομάδα ενθουσιάστηκε με τη μέθοδο του Σπύρου, που ήταν εντελώς διαφορετική. Συζήτησαν το γεγονός ότι σε αυτή τη μέθοδο ασχολούμαστε μόνο με αριθμούς και ότι μοιάζει λίγο με παιχνίδι (ίσως επειδή χρησιμοποιήθηκε η λέξη «νίκησε»).

Έγινε μια σύντομη ανασκόπηση όλων των προτεινόμενων λύσεων και τελικά όλοι συμφώνησαν ότι η μέθοδος του Γιάννη είναι η καλύτερη και πιο «εύκολη» και η μέθοδος του Σπύρου η πιο πρωτότυπη και «παράξενη». Η συζήτηση διήρκησε περίπου 15 λεπτά.

Ακολουθούν οι ατομικές προσεγγίσεις των φοιτητών στο 1ο πρόβλημα:

1η ομάδα φοιτητών

Από την ανάλυση του μαθηματικού συλλογισμού των φοιτητών της 1ης ομάδας κατά την προσέγγιση του 1ου προβλήματος (της επιλογής κινητού), εντοπίσθηκαν τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις:

1) Η προσέγγιση που ακολούθησε η Μαρία

2) Η προσέγγιση που ακολούθησε η Ελπίδα

3) Η προσέγγιση που ακολούθησε η Χρύσα

Στη συνέχεια περιγράφονται οι τρεις αυτές προσεγγίσεις.

1) Η προσέγγιση που ακολούθησε η Μαρία

1ος κύκλος: Μαθηματικοποίηση του προβλήματος

Η Μαρία σκέφτηκε να βάλει «βαθμό» σε κάθε αντικείμενο ανάλογα με το σε ποια θέση βρίσκεται (1η θέση: 1 βαθμό, 2η θέση: 2 βαθμούς κλπ.) και μετά να προσθέσει τους βαθμούς για κάθε χαρακτηριστικό από όλες τις ομάδες. Βαθμολογεί από το 1 έως το 10 από το ελκυστικότερο προς το λιγότερο ελκυστικό. Στη συνέχεια προσθέτει για κάθε χαρακτηριστικό τους βαθμούς που έχει στην κάθε ομάδα και καταλήγει στα παρακάτω:

MP3 = 15

Εμφάνιση = 7

Μέγεθος οθόνης = 16

Κάμερα = 16

Μάρκα = 34

Θύρα USB = 35

blue tooth = 28

τιμή = 29

ραδιόφωνο = 47

διάρκεια μπαταρίας = 48

Διαπιστώνει πως δύο χαρακτηριστικά έχουν τους ίδιους βαθμούς και γυρνά πίσω να ελέγξει τις μαθηματικές της πράξεις (υποψιάζεται ότι έχει κάνει κάποιο λάθος στις πράξεις). Αφού διαπιστώνει πως οι πράξεις της είναι σωστές προσπαθεί να αναπτύξει ένα μοντέλο για την αντιμετώπιση του προβλήματος της ισοβαθμίας.

Ανάπτυξη μοντέλου για την αντιμετώπιση του προβλήματος της ισοψηφίας μεταξύ *μεγέθους οθόνης και κάμερας*.

Η Μαρία μελετάει τις θέσεις που έχουν πάρει τα δύο χαρακτηριστικά στις 5 ομάδες.

μέγεθος οθόνης= 3 + 4 + 5 + 2 + 2

κάμερα= 4 + 1 + 2 + 3 + 6

Σβήνει τις «αντίθετες» θέσεις για κάθε χαρακτηριστικό, διότι θεωρεί ότι εξουδετερώνει η μία την άλλη και θα συγκρίνει ό,τι μείνει. Δηλαδή:

μέγεθος οθόνης= 3 + ~~4~~ + ~~5~~ + ~~2~~ + ~~2~~

κάμερα= ~~4~~ + ~~1~~ + ~~2~~ + 3 + ~~6~~

Και στα δύο χαρακτηριστικά μένει μόνο η θέση 3, οπότε αποφασίζει να τα κατατάξει στην ίδια θέση στην τελική της ταξινόμηση με αποτέλεσμα να αριθμήσει συνολικά 9 σειρές.

Η Μαρία είχε καταφέρει να βρει μια μέθοδο κατάταξης (μοντέλο) με την οποία θα μπορούσε αντικειμενικά να κατατάξει τα χαρακτηριστικά των κινητών τηλεφώνων στο συγκεκριμένο πρόβλημα αλλά και να την επαναχρησιμοποιήσει σε παρόμοιες καταστάσεις. Η τελική κατάταξη της Μαρίας είναι η εξής:

1. Εμφάνιση
2. MP3
3. μέγεθος οθόνης + κάμερα
4. blue tooth
5. τιμή
6. μάρκα
7. θύρα USB
8. ραδιόφωνο
9. διάρκεια μπαταρίας

2) Η προσέγγιση που ακολούθησε η Ελπίδα

$1^{ος}$ κύκλος: Κατάταξη με βάση τη συχνότητα εμφάνισης στις πρώτες και στις τελευταίες σειρές.

Αρχικά παρατήρησε τις πρώτες σειρές (θέσεις) και προσπάθησε να κάνει την ταξινόμηση συγκρίνοντας ποιοτικά τα χαρακτηριστικά Κατέληξε στο ότι η εμφάνιση είναι το ελκυστικότερο. Επίσης το ραδιόφωνο και η διάρκεια μπαταρίας εμφανίζονται συχνότερα στις 2 τελευταίες θέσεις, άρα πρέπει να καταταχθούν τελευταία. Μετά όμως για τα άλλα δεν μπορούσε να καταλήξει σε κάποιο συμπέρασμα. Διαπίστωσε δηλαδή ότι αυτή η μέθοδος δεν αποτελούσε αντικειμενικό εργαλείο για την κατάταξη των υπόλοιπων χαρακτηριστικών.

$2^{ος}$ κύκλος: Μαθηματικοποίηση του προβλήματος

Στη συνέχεια η Ελπίδα σκέφτηκε να γράψει κάθε χαρακτηριστικό $1^{ο}$, $2^{ο}$, $3^{ο}$ ανάλογα με τις θέσεις που παίρνει σε κάθε ομάδα. Δηλαδή:

MP3: 1, 3, 4, 4, 3
Εμφάνιση: 2, 2, 1, 1, 1
Μέγεθος οθόνης: 3, 4, 5, 2, 2
Κάμερα: 4, 1, 2, 3, 6
Μάρκα: 5, 7, 8, 6, 8
θύρα USB: 6, 8, 7, 7, 7
blue tooth: 7, 5, 6, 5, 5
τιμή: 8, 6, 3, 8, 4
ραδιόφωνο: 9, 10, 9, 10, 9
διάρκεια μπαταρίας: 10, 9, 10, 9, 10

Σε αυτό το σημείο αποφασίζει να προσθέσει τις θέσεις για κάθε χαρακτηριστικό, αλλά δεν έχει αποφασίσει πώς θα τα ταξινομήσει στη συνέχεια. Λέει: «Βλέπω πως μπορώ να διακρίνω ποιο θα είναι πρώτο και ποιο τελευταίο, οπότε αποφασίζω να τα

ταξινομήσω από το μικρότερο βαθμό στο μεγαλύτερο γιατί έτσι ταιριάζει όπως φαίνεται από τον πίνακα. Δύο όμως έχουν τον ίδιο αριθμό, θα δω τι θα κάνω».

MP3 = 15

Εμφάνιση = 7

Μέγεθος οθόνης = 16

Κάμερα = 16

Μάρκα = 34

Θύρα USB = 35

blue tooth = 28

τιμή = 29

ραδιόφωνο = 47

διάρκεια μπαταρίας = 48

Ανάπτυξη μοντέλου για την αντιμετώπιση του προβλήματος της ισοψηφίας μεταξύ *μεγέθους οθόνης και κάμερας.*

Αρχικά η Ελπίδα λέει: «Αποφάσισα να βάλω στην $3^{η}$ θέση την κάμερα και στην $4^{η}$ θέση το μέγεθος οθόνης, γιατί η κάμερα έχει πάρει $1^{η}$ θέση ενώ το άλλο όχι». Στη συνέχεια αλλάζει γνώμη και λέει: «Είδα ότι η κάμερα παίρνει και τη θέση 6 το οποίο είναι κακό αν υποθέσουμε ότι μέχρι την $5^{η}$ θέση είναι τα καλά και μετά τα κακά χαρακτηριστικά. Έτσι το μέγεθος οθόνης έχει όλες τις θέσεις του καλές ενώ η κάμερα έχει και μια θέση κακή (την $6^{η}$). Άρα θα βάλω τελικά στην $3^{η}$ θέση το μέγεθος οθόνης».

Είχε και αυτή καταφέρει να βρει μια μέθοδο κατάταξης (μοντέλο) με την οποία μπορούσε αντικειμενικά να κατατάξει τα χαρακτηριστικά των κινητών τηλεφώνων στο συγκεκριμένο πρόβλημα αλλά και να την επαναχρησιμοποιήσει σε παρόμοιες καταστάσεις.

Καταλήγει στην εξής ταξινόμηση:

1. Εμφάνιση
2. MP3
3. μέγεθος οθόνης

4. κάμερα
5. blue tooth
6. τιμή
7. μάρκα
8. θύρα USB
9. ραδιόφωνο
10. διάρκεια μπαταρίας

Εξηγεί στην εταιρία τη μέθοδο που χρησιμοποίησε ως εξής: «Πήρα κάθε χαρακτηριστικό και έγραψα την θέση που είχε σε κάθε ομάδα. Έπειτα, πρόσθεσα σε κάθε χαρακτηριστικό τις θέσεις που είχε. Μετά, τοποθέτησα τα αθροίσματα κατά αύξουσα σειρά. Έτσι, αυτό που βρίσκεται στην πρώτη θέση είναι το ελκυστικότερο και στην τελευταία θέση το λιγότερο ελκυστικό. Σε περίπτωση ισοβαθμίας, σύγκρινα τις θέσεις των χαρακτηριστικών. Πιο συγκεκριμένα, είδα ποιο χαρακτηριστικό έχει περισσότερες θέσεις πάνω από την $5^{η}$ θέση. Η κάμερα είχε 4/5 καλές θέσεις ενώ το μέγεθος οθόνης 5/5 καλές θέσεις ($1^{η}$ έως $5^{η}$ θέση = καλές θέσεις). Οπότε, πιο ελκυστικό είναι το χαρακτηριστικό μέγεθος οθόνης από το χαρακτηριστικό κάμερα».

3) Η προσέγγιση που ακολούθησε η Χρύσα

$1^{ος}$ κύκλος

Η Χρύσα σκέφτηκε να αριθμήσει τις σειρές και να κάνει τον πίνακα με τους αριθμούς. Δεν έχει αποφασίσει ακόμα πώς θα δουλέψει στη συνέχεια.

	1η ομάδα	2η ομάδα	3η ομάδα	4η ομάδα	5η ομάδα
Β	1	3	4	4	3
Α	2	2	1	1	1
Γ	3	4	5	2	2
Δ	4	1	2	3	6
Ε	5	7	8	6	8
Ζ	6	8	7	7	7
Η	7	5	6	5	5
Θ	8	6	3	8	4
Ι	9	10	9	10	9
Κ	10	9	10	9	10

όπου:

Α= Εμφάνιση, Β= MP3, Γ= Μέγεθος οθόνης, Δ= Κάμερα, Ε= Μάρκα, Ζ= Θύρα USB, Η= blue tooth, Θ= τιμή, Ι= ραδιόφωνο, Κ= διάρκεια μπαταρίας

Δεν μπόρεσε όμως να αποφασίσει τι ακριβώς έπρεπε να κάνει με τους αριθμούς. Προσπάθησε να συγκρίνει τους αριθμούς, αλλά είδε ότι δεν καταλήγει κάπου.

2^{ος} κύκλος

Στη συνέχεια η Χρύσα αποφάσισε να προσθέσει τους βαθμούς που παίρνει το κάθε χαρακτηριστικό ανάλογα με τη θέση του στον πίνακα και τα ταξινόμησε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο.

Α= 7, Β= 15, Γ= 16, Δ= 16, Ε= 34, Ζ= 35, Η= 28, Θ= 29, Ι= 37, Κ= 48

Ανάπτυξη μοντέλου για την αντιμετώπιση του προβλήματος της ισοψηφίας μεταξύ *μεγέθους οθόνης και κάμερας*.

Στο πρόβλημα ισοβαθμίας η Χρύσα λέει ότι το μέγεθος οθόνης εμφανίζεται 2 φορές στην 2^{η} θέση και η χειρότερη θέση που παίρνει είναι η 5^{η}, δηλαδή μια θέση πιο ψηλά από την κάμερα που βρίσκεται και στην 6^{η} θέση μια φορά. Αποφασίζει να βάλει στην 3^{η} θέση το μέγεθος οθόνης.

Είχε και αυτή καταφέρει να βρει μια μέθοδο κατάταξης (μοντέλο) με την οποία μπορούσε αντικειμενικά να κατατάξει τα χαρακτηριστικά των κινητών τηλεφώνων στο συγκεκριμένο πρόβλημα αλλά και να την επαναχρησιμοποιήσει σε παρόμοιες καταστάσεις. Κατέληξε στην παρακάτω ταξινόμηση:

1. Εμφάνιση
2. MP3
3. μέγεθος οθόνης
4. κάμερα
5. blue tooth
6. τιμή

7. μάρκα
8. θύρα USB
9. ραδιόφωνο
10. διάρκεια μπαταρίας

Εξηγεί στην εταιρία τη μέθοδο που χρησιμοποίησε ως εξής: «Αρχικά έγραψα τα χαρακτηριστικά των κινητών τηλεφώνων σε μια στήλη (έγραψα ένα γράμμα που αντιστοιχεί στο κάθε ένα από αυτά) και έπειτα έφτιαξα άλλες 5 στήλες για την κάθε ομάδα. Στη συνέχεια συμπλήρωσα τον πίνακα βάζοντας έναν αριθμό από το 1 έως το 10, που αντιστοιχεί στον αριθμό προτίμησης του κάθε χαρακτηριστικού στην κάθε ομάδα. Έπειτα πρόσθεσα την κάθε γραμμή και έβαλα το κάθε χαρακτηριστικό που αντιστοιχεί στον κάθε αριθμό ξεκινώντας από τον μικρότερο αριθμό στον μεγαλύτερο.

Ισοψηφούν η κάμερα και το μέγεθος οθόνης. Επέλεξα να βάλω πρώτο το μέγεθος οθόνης γιατί εμφανίζεται 2 φορές στη $2^{η}$ θέση προτίμησης, που είναι καλή θέση (αντί για 1 φορά που εμφανίζεται η κάμερα) και επειδή εμφανίζεται στην $5^{η}$ θέση προτίμησης ενώ στην ίδια θέση απουσιάζει εντελώς η κάμερα».

Η συζήτηση στην ομάδα

Το λόγο πήρε πρώτα η Ελπίδα και περιέγραψε τη δική της μέθοδο ταξινόμησης. Είπε: «Έγραψα τα χαρακτηριστικά και δίπλα τη θέση που πήρε το καθένα και μετά πρόσθεσα τις θέσεις. Στη συνέχεια έκανα την ταξινόμηση με πρώτο το χαρακτηριστικό που είχε το μικρότερο αριθμό στην περίπτωση της ισοβαθμίας στα δύο χαρακτηριστικά είπα να δω ποιές θέσεις βρίσκονται στις 5 καλύτερες. Δηλαδή χώρισα τις 10 θέσεις σε 5 και 5. Μέχρι την $5^{η}$ θεωρούνται καλές θέσεις και μετά κακές θέσεις». Η Μαρία είπε: «Οπότε η $6^{η}$ θέση είναι μια κακή θέση, οπότε είναι αρνητικό στοιχείο». Οι υπόλοιποι συμφώνησαν.

Συνέχισε η Μαρία με τη δική της περιγραφή: «Κι εγώ έκανα παρόμοιο πράγμα με την Ελπίδα. Βαθμολόγησα από το 1 έως το 10. Έγραψα το κάθε χαρακτηριστικό και δίπλα τον αριθμό που έχει πάρει κλπ. Στην ισοβαθμία έγραψα τους αριθμούς των δύο χαρακτηριστικών (δηλαδή τους βαθμούς που είχαν σε κάθε ομάδα) και άρχισα να σβήνω το μικρότερο μιας ομάδας με το μεγαλύτερο πχ το 1 και το 6. Θεώρησα ότι η μία θέση εξουδετερώνει την άλλη. Προέκυψε πάλι ισοβαθμία, οπότε τα έβαλα στην ίδια θέση ακριβώς». Η Χρύσα είπε: «Εγώ στην αρχή έσβησα αυτά που είναι ίδια, αλλά στην κάμερα έμειναν οι θέσεις 2, 5 και στο μέγεθος οθόνης οι θέσεις 1, 6, οπότε το σύνολο είναι 7 και στα δύο». Η Μαρία είπε: «Ναι, και με τους δύο τρόπους βγαίνει το ίδιο. Με αυτόν που ανέφερες και με την εξουδετέρωση. Οπότε τα έβαλα ακριβώς στην ίδια θέση». Η Χρύσα είπε: «Εγώ τελικά σκέφτηκα ότι το μέγεθος οθόνης είναι δύο φορές στην $2^{η}$ θέση, ενώ η κάμερα μία και έβαλα τελικά το μέγεθος οθόνης στην $3^{η}$ θέση στην τελική κατάταξη». Η Ελπίδα είπε: «Εγώ αρχικά είχα βάλει την κάμερα στην $3^{η}$ θέση επειδή εμφανιζόταν μια φορά στην $1^{η}$ θέση, αλλά είδα ότι εμφανιζόταν και στην $6^{η}$. Μετά σκέφτηκα αυτό με τις υποκατηγορίες (5-5 θέσεις) που ανέφερα πριν και το άλλαξα».

Τέλος η Χρύσα περιέγραψε τη μέθοδο που ακολούθησε για να λύσει το πρόβλημα: «Αρχικά έφτιαξα έναν πίνακα (τον δείχνει) και στη συνέχεια σκέφτηκα αυτούς τους αριθμούς να τους προσθέσω και να κάνω την κατάταξη όπως είπατε και εσείς». Η Μαρία είπε: «Δηλαδή έκανες το ίδιο πράγμα, αλλά έκανες μια παραπάνω διαδικασία». Η Χρύσα συμφώνησε.

Η συζήτηση διήρκησε περίπου 10 λεπτά.

2η ομάδα φοιτητών

Από την ανάλυση του μαθηματικού συλλογισμού των φοιτητών της 2ης ομάδας κατά την προσέγγιση του 1ου προβλήματος (της επιλογής κινητού), εντοπίσθηκαν τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις:

1) Η προσέγγιση που ακολούθησε ο Αντώνης

2) Η προσέγγιση που ακολούθησε ο Πέτρος

3) Η προσέγγιση που ακολούθησε ο Χρήστος

Στη συνέχεια περιγράφονται οι τρεις αυτές προσεγγίσεις.

1) Η προσέγγιση που ακολούθησε ο Αντώνης

1ος κύκλος: Μαθηματικοποίηση του προβλήματος

Βαθμολόγησε τις θέσεις στον πίνακα από το 10 έως το 1 και πρόσθεσε για κάθε χαρακτηριστικό τους συνολικούς του βαθμούς από κάθε ομάδα:

Εμφάνιση= 9+9+10+10+10=48

Κάμερα= 10+9+8+5+7=39

MP3= 10+8+7+7+8=40

μέγεθος οθόνης= 8+7+6+9+9=39

τιμή= 3+5+8+3+7=26

blue tooth= 4+6+5+6+6=27

θύρα USB=5+3+4+4+4=20

μάρκα= 6+4+3+5+3=21

ραδιόφωνο= 2+1+2+1+2=8

διάρκεια μπαταρίας= 1+2+1+2+1=7

Ανάπτυξη μοντέλου για την αντιμετώπιση του προβλήματος της ισοψηφίας μεταξύ *μεγέθους οθόνης και κάμερας*.

Ο Αντώνης σκέφτηκε να χωρίσει τους πόντους σε 2 μέρη και να συγκρίνει τους πόντους των δύο χαρακτηριστικών που ισοβαθμούν. Χώρισε ως εξής: Από το 5 έως το 7 και από το 8 έως το 10.

Έτσι:

μέγεθος οθόνης

5 – 7: 2 , 8 – 10: 3

κάμερα

5 – 7: 2 , 8 – 10: 3

Παρατήρησε ότι του βγαίνει ακριβώς το ίδιο οπότε δεν μπορεί με αυτόν τον τρόπο να αποφασίσει ποιο θα πάρει την $3^{η}$ θέση και ποιο την $4^{η}$.

Σκέφτηκε να μελετήσει το εύρος των απαντήσεων. Παρατήρησε ομοιογένεια στις απαντήσεις του χαρακτηριστικού μέγεθος οθόνης, διότι εκτείνονται από το 6 έως το 9 ενώ στην κάμερα από το 5 έως το 10. Δηλαδή στην κάμερα διαφέρουν οι απαντήσεις μεταξύ τους. Αποφάσισε να τοποθετήσει στην $3^{η}$ θέση το μέγεθος οθόνης. Η τελική του κατάταξη ήταν:

1. Εμφάνιση
2. MP3
3. μέγεθος οθόνης
4. κάμερα
5. blue tooth
6. τιμή
7. μάρκα
8. θύρα USB
9. ραδιόφωνο
10. διάρκεια μπαταρίας

2) Η προσέγγιση που ακολούθησε ο Πέτρος

1^{ος} κύκλος: Μαθηματικοποίηση του προβλήματος

Βαθμολόγησε από τι 1 έως το 10 τις θέσεις του πίνακα. Στη συνέχεια πρόσθεσε για κάθε χαρακτηριστικό όλες τις θέσεις του και διαίρεσε με το 5. Βρήκε δηλαδή τον μέσο όρο (Μ.Ο.) για κάθε χαρακτηριστικό:

	Μ.Ο.
MP3: 1 + 3 + 4 + 4 + 3 = 15	3
Εμφάνιση: 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 7	1,4
Μέγεθος οθόνης: 3 + 4 + 5 + 2 + 2 = 16	3,2
Κάμερα: 4 + 1 + 2 + 3 + 6 = 16	3,2
Μάρκα: 5 + 7 + 8 + 6 + 8 = 34	6,8
θύρα USB: 6 + 8 + 7 + 7 + 7 = 35	7
blue tooth: 7 + 5 + 6 + 5 + 5 = 28	5,6
τιμή: 8 + 6 + 3 + 8 + 4 = 29	5,8
ραδιόφωνο: 9 + 10 + 9 + 10 + 9 = 47	9,4
διάρκεια μπαταρίας: 10 + 9 + 10 + 9 + 10 = 48	9,6

Ανάπτυξη μοντέλου για την αντιμετώπιση του προβλήματος της ισοψηφίας μεταξύ *μεγέθους οθόνης και κάμερας*.

Ο Πέτρος τοποθέτησε στην 3^{η} θέση τα δύο χαρακτηριστικά που ισοβαθμούσαν, άφησε την 4^{η} θέση κενή και προχώρησε συμπληρώνοντας την 5^{η} θέση. Η τελική του κατάταξη ήταν η εξής:

1. Εμφάνιση
2. MP3
3. μέγεθος οθόνης, κάμερα
4. -
5. blue tooth
6. τιμή
7. μάρκα

8. θύρα USB
9. ραδιόφωνο
10. διάρκεια μπαταρίας

Η απάντηση που έδωσε στην εταιρία είναι: «Αρχικά αριθμούμε τις απαντήσεις με σειρά προτίμησης από το 1 μέχρι το 10. Στη συνέχεια αθροίζουμε τη θέση κάθε προτίμησης με τα νούμερα που έχουμε βάλει. Στο τέλος βρίσκουμε το μέσο όρο των απαντήσεων και τα στοιχίζουμε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο.

3) Η προσέγγιση που ακολούθησε ο Χρήστος

1ος κύκλος

Ο Χρήστος χώρισε τα χαρακτηριστικά σε 3 ομάδες, όπως παρουσιάζονται στον πίνακα ως εξής:

	1η ομάδα	**2η ομάδα**	**3η ομάδα**	**4η ομάδα**	**5η ομάδα**
1α	MP3	κάμερα	εμφάνιση	εμφάνιση	εμφάνιση
β	εμφάνιση	εμφάνιση	κάμερα	μέγεθος οθόνης	μέγεθος οθόνης
γ	μέγεθος οθόνης	MP3	τιμή	κάμερα	MP3
2α	κάμερα	μέγεθος οθόνης	MP3	MP3	τιμή
β	μάρκα	blue tooth	μέγεθος οθόνης	blue tooth	blue tooth
γ	θύρα USB	τιμή	blue tooth	μάρκα	κάμερα
3α	blue tooth	μάρκα	θύρα USB	θύρα USB	θύρα USB
β	τιμή	θύρα USB	μάρκα	τιμή	μάρκα
γ	ραδιόφωνο	διάρκεια μπαταρίας	ραδιόφωνο	διάρκεια μπαταρίας	ραδιόφωνο
δ	διάρκεια μπαταρίας	ραδιόφωνο	διάρκεια μπαταρίας	ραδιόφωνο	διάρκεια μπαταρίας

Χαρακτηριστικά είπε: «Χωρίζω σε ομάδες των 3 στοιχείων (3, 3, 4) και στη συνέχεια γράφω σε ποια ομάδα παρουσιάζεται το κάθε στοιχείο». Π.χ.:

<u>1η ομάδα</u>

1 α MP3

1 β εμφάνιση

1 γ μέγεθος οθόνης

2 α κάμερα

2 β μάρκα

2 γ θύρα USB

3 α blue tooth

3 β τιμή

3 γ ραδιόφωνο

3 δ διάρκεια μπαταρίας

Στη συνέχεια πήρε κάθε στοιχείο και ανέλυσε τη θέση του στις 5 ομάδες:

MP3: 1 α , 1 γ , 2 α , 2 α , 1 γ

εμφάνιση: 1 β , 1 β , 1 α , 1 α , 1 α

μέγεθος οθόνης: 1 γ , 2 α , 2 β , 1 β , 1 β

κάμερα: 2 α , 1 α , 1 β , 1 γ , 2 γ

μάρκα: 2 β , 3 α , 3 β , 2 γ , 3 β

θύρα USB: 2 γ , 3 β , 3 α , 3 α , 3 α

blue tooth: 3 α , 2 β , 2 γ , 2 β , 2 β

τιμή: 3 β , 2 γ , 1 γ , 3 β , 2 α

ραδιόφωνο: 3 γ , 3 δ , 3 γ , 3 δ , 3 γ

διάρκεια μπαταρίας: 3 δ , 3 γ , 3 δ , 3 γ , 3 δ

Δεν μπόρεσε όμως να αποφασίσει τι ακριβώς έπρεπε να κάνει με αυτήν την κατηγοριοποίηση που είχε χρησιμοποιήσει. Προσπάθησε να συγκρίνει τους αριθμούς, αλλά είδε ότι δεν καταλήγει κάπου.

2ος κύκλος: Μαθηματικοποίηση του προβλήματος

Σε αυτό το σημείο ο Χρήστος αποφάσισε να δώσει βαθμούς στα στοιχεία ανάλογα με τις θέσεις τους. Έτσι αντιστοίχισε τα 1 α, 1 β, . . . με 10, 9, . . . βαθμούς. Αναλυτικά: 1 α = 10, 1 β = 9, 1 γ = 8, 2 α = 7, 2 β = 6, 2 γ = 5, 3 α = 4, 3 β = 3, 3 γ = 2, 3 δ = 1.

Στην ουσία ήταν σαν να βαθμολόγησε τις θέσεις του πίνακα από το 10 έως το 1, όπως ήταν και η προσέγγιση που ακολούθησε ο Αντώνης.

Στη συνέχεια πρόσθεσε τις θέσεις (τους βαθμούς) κάθε χαρακτηριστικού και τα ταξινόμησε από αυτό με τον μεγαλύτερο βαθμό σε αυτό με τον μικρότερο βαθμό.

Ανάπτυξη μοντέλου για την αντιμετώπιση του προβλήματος της ισοψηφίας μεταξύ *μεγέθους οθόνης και κάμερας*.

Ο Χρήστος αποφάσισε να τοποθετήσει στην $3^{η}$ θέση το χαρακτηριστικό κάμερα και στην $4^{η}$ το χαρακτηριστικό μέγεθος οθόνης. Για να καταλήξει σε αυτήν την απόφαση μελέτησε τις θέσεις των δύο στοιχείων ως εξής:

κάμερα (1 α, 1 β, 1 γ)

μέγεθος οθόνης (1 β, 1 β, 1 γ)

Είπε: «Η κάμερα έχει πιο υψηλές θέσεις και άρα θα πάρει την $3^{η}$ θέση». Δεν υπολόγισε όμως όλες τις θέσεις του κάθε στοιχείου παρά μόνο αυτές που ανήκαν στην ομάδα 1 που είχε σχηματίσει (υπερεκτίμηση ενός παράγοντα).

Η τελική του κατάταξη ήταν:

1. Εμφάνιση
2. MP3
3. κάμερα
4. μέγεθος οθόνης
5. blue tooth
6. τιμή
7. μάρκα
8. θύρα USB
9. ραδιόφωνο
10. διάρκεια μπαταρίας

Η συζήτηση στην ομάδα

Το λόγο πήρε πρώτα ο Χρήστος και περιέγραψε τη δική του μέθοδο ταξινόμησης. Είπε: «Αρχικά σκέφτηκα να τα ταξινομήσω. Να τα χωρίσω σε ομάδες για να βρω ποιο εμφανίζεται συχνότερα. Έκανα τρεις ομάδες, η $1^{η}$ ομάδα είχε 3 στοιχεία, η $2^{η}$ τρία στοιχεία και η $3^{η}$ τέσσερα στοιχεία. Μέσα σε αυτές έκανα υποομάδες». Ο Αντώνης είπε: «Είναι περίπλοκο αυτό που έκανες». Ο Πέτρος συμφώνησε. Ο Χρήστος συνέχισε: «Μετά έγραψα κάθε στοιχείο και δίπλα τις θέσεις του, βαθμολόγησα τις θέσεις (1α=10,

1β=9,…) και πρόσθεσα τους βαθμούς για όλες τις θέσεις κάθε στοιχείου». Ο Αντώνης ρώτησε: «Οι ομάδες που χώρισες έχουν να κάνουν με τα στοιχεία ή απλά με τη σειρά;». Ο Χρήστος απάντησε: «Απλά με τη σειρά». Ο Αντώνης είπε: «Άρα ταξινόμησες στην ουσία και έβαλες αριθμούς ανάλογα με τη σειρά που είναι. Αυτό έκανα κι εγώ, αλλά πολύ πιο απλά. Αντί να χωρίσω τρεις ομάδες, θεώρησα ότι είναι πολύ απλό και την κάθε επιλογή (χαρακτηριστικό) την βαθμολόγησα με κάποιον βαθμό από το 10 έως το 1. Μετά απλά υπολόγισα το άθροισμα για κάθε χαρακτηριστικό, τους βαθμούς που παίρνει από κάθε ομάδα, και τα ταξινόμησα. Στο σημείο της ισοβαθμίας των δύο χαρακτηριστικών κοίταξα το εύρος επιλογής και όποιο ήταν ομοιογενές το δέχτηκα σαν πιο σωστό. Δηλαδή το μέγεθος οθόνης πήρε βαθμούς από 6 μέχρι 9, ενώ η κάμερα πήρε από 5 μέχρι 10. Οπότε επειδή φαίνεται πιο αποφασισμένο το κοινό προς το ένα χαρακτηριστικό, έβαλα 3^{ο} το μέγεθος οθόνης». Ο Χρήστος είπε: «Εγώ έβαλα την κάμερα 3^{η}, γιατί αφού τα είχα χωρίσει στις ομάδες που είπα πριν, είδα ότι οι βαθμοί που παίρνει η κάμερα είναι 1α, 1β, 1γ, δηλαδή 10, 9 και 8 βαθμούς». Ο Αντώνης είπε: « Ναι, αλλά παίρνει και βαθμό 5 στη θέση 2γ».Ο Χρήστος είπε: «Δεν το θεώρησα σημαντικό. Κοίταξα μόνο τις θέσεις στην 1^{η} ομάδα από τις τρεις όπως τις είχα χωρίσει».

Ο Πέτρος πήρε το λόγο και περιέγραψε τη δική του μέθοδο ταξινόμησης. Είπε: «Κι εγώ αρίθμησα τις θέσεις αλλά από το 1 έως το 10». Ο Αντώνης είπε: «Δηλαδή με 1 σημαντικότερο, δηλαδή όποιο είχε τους λιγότερους βαθμούς το έβαζες 1^{ο}». Ο Χρήστος είπε: «Δηλαδή το αντίστροφο». Ο Πέτρος είπε: « Ναι και στη συνέχεια βρήκα μέσο όρο». Ο Αντώνης είπε: «Δεν νομίζω ότι έχει διαφορά, είναι το ίδιο πράγμα, αφού στην ουσία τα κάνεις όλα :5». Ο Πέτρος συνέχισε: «Τα δύο χαρακτηριστικά που έχουν τον ίδιο Μ.Ο. τα έβαλα στην ίδια θέση στην τελική κατάταξη. Από τη στιγμή που έχουν το ίδιο βάρος, δηλαδή είναι το ίδιο, θα πρέπει να μπουν στην ίδια θέση». Οι υπόλοιποι διαφώνησαν και είπαν ότι πρέπει να αποφασίσουν ποιο θα πάρει την 3^{η} και ποιο την 4^{η} θέση για να είναι σωστή η ταξινόμηση. Ο Χρήστος είπε: «Θα σας δώσω ως παράδειγμα το ποδόσφαιρο. Όταν δύο ομάδες ισοβαθμούν, τότε άλλοι παράγοντες κρίνουν π.χ. ποιος θα είναι 2^{ος} και ποιος θα είναι 3^{ος}».

Στην ομάδα έγινε μια σύντομη ανασκόπηση όλων των προτεινόμενων λύσεων και τελικά όλοι συμφώνησαν ότι η μέθοδος του Αντώνη είναι καλύτερη.

Η συζήτηση διήρκησε περίπου 10 λεπτά.

3η ομάδα φοιτητών

Από την ανάλυση του μαθηματικού συλλογισμού των φοιτητών της 3ης ομάδας κατά την προσέγγιση του 1ου προβλήματος (της επιλογής κινητού), εντοπίσθηκαν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις:

1) Η προσέγγιση που ακολούθησε η Χαρά και ο Παύλος

2) Η προσέγγιση που ακολούθησε ο Νίκος

Στη συνέχεια περιγράφονται οι δύο αυτές προσεγγίσεις.

1) Η προσέγγιση που ακολούθησε η Χαρά και ο Παύλος

1ος κύκλος: Μαθηματικοποίηση του προβλήματος

Τόσο η Χαρά όσο και ο Παύλος βαθμολόγησαν αμέσως τις θέσεις του πίνακα από το 10 έως το 1:

	1η ομάδα	**2η ομάδα**	**3η ομάδα**	**4η ομάδα**	**5η ομάδα**
10	MP3	κάμερα	εμφάνιση	εμφάνιση	εμφάνιση
9	εμφάνιση	εμφάνιση	κάμερα	μέγεθος οθόνης	μέγεθος οθόνης
8	μέγεθος οθόνης	MP3	τιμή	κάμερα	MP3
7	κάμερα	μέγεθος οθόνης	MP3	MP3	τιμή
6	μάρκα	blue tooth	μέγεθος οθόνης	blue tooth	blue tooth
5	θύρα USB	τιμή	blue tooth	μάρκα	κάμερα
4	blue tooth	μάρκα	θύρα USB	θύρα USB	θύρα USB
3	τιμή	θύρα USB	μάρκα	τιμή	μάρκα
2	ραδιόφωνο	διάρκεια μπαταρίας	ραδιόφωνο	διάρκεια μπαταρίας	ραδιόφωνο
1	διάρκεια μπαταρίας	ραδιόφωνο	διάρκεια μπαταρίας	ραδιόφωνο	διάρκεια μπαταρίας

Στη συνέχεια υπολόγισαν τον μέσο όρο για κάθε χαρακτηριστικό. Η Χαρά είπε χαρακτηριστικά: «Για κάθε χαρακτηριστικό βρίσκω μέσο όρο, δηλαδή τη βαθμολογία που θα πάρει ανάλογα με το πώς τα κατέταξαν οι ομάδες».

Π.χ. MP3= $\frac{10+8+7+7+8}{5}=\frac{40}{5}=8$

Ο Παύλος είπε: «Χρησιμοποιώντας μια κλίμακα βαθμολόγησης στη σειρά κατάταξης από τους πελάτες, εντοπίζουμε τον Μ.Ο. και κατατάσσουμε τις προτιμήσεις

βάση του Μ.Ο. Το γεγονός ότι θέλουμε την κοινή γνώμη – την κοινή συνιστώσα – μας παροτρύνει να χρησιμοποιήσουμε τον Μ.Ο.».

Έτσι κατέληξαν στους παρακάτω Μ.Ο.:

Εμφάνιση= $\frac{9+9+10+10+10}{5} = \frac{48}{5} = 9{,}6$

Κάμερα= $\frac{10+9+8+5+7}{5} = \frac{39}{5} = 7{,}8$

MP3= $\frac{10+8+7+7+8}{5} = \frac{40}{5} = 8$

μέγεθος οθόνης= $\frac{8+7+6+9+9}{5} = \frac{39}{5} = 7{,}8$

τιμή= $\frac{3+5+8+3+7}{5} = \frac{26}{5} = 5{,}2$

blue tooth= $\frac{4+6+5+6+6}{5} = \frac{27}{5} = 5{,}4$

θύρα USB= $\frac{5+3+4+4+4}{5} = \frac{20}{5} = 4$

μάρκα= $\frac{6+4+3+5+3}{5} = \frac{21}{5} = 4{,}2$

ραδιόφωνο= $\frac{2+1+2+1+2}{5} = \frac{8}{5} = 1{,}6$

διάρκεια μπαταρίας= $\frac{1+2+1+2+1}{5} = \frac{7}{5} = 1{,}4$

Ταξινόμησαν τα χαρακτηριστικά από αυτό που έχει τους περισσότερους πόντους σε αυτό που έχει τους λιγότερους.

Ανάπτυξη μοντέλου για την αντιμετώπιση του προβλήματος της ισοψηφίας μεταξύ *μεγέθους οθόνης και κάμερας*.

Χαρά:

Η Χαρά είπε: «Παρατηρώ ότι κάποια χαρακτηριστικά έχουν ίδιο Μ.Ο., άρα είναι στην ίδια κατάταξη». Τοποθέτησε και τα δύο χαρακτηριστικά στην $3^{η}$ θέση και συνέχισε στην $4^{η}$ με αποτέλεσμα να αριθμήσει συνολικά 9 θέσεις:

1. Εμφάνιση
2. MP3
3. μέγεθος οθόνης , κάμερα
4. blue tooth
5. τιμή
6. μάρκα
7. θύρα USB
8. ραδιόφωνο
9. διάρκεια μπαταρίας

Παύλος:

Ο Παύλος τοποθέτησε στην $3^{η}$ θέση τα δύο χαρακτηριστικά που ισοβαθμούσαν, άφησε την $4^{η}$ θέση κενή και προχώρησε συμπληρώνοντας την $5^{η}$ θέση. Η εξήγησή του ήταν ότι το blue tooth δεν μπορεί να πάρει την $4^{η}$ θέση αφού ανήκει στην $5^{η}$ οπότε η $4^{η}$ μένει κενή. Είπε ακόμα πως αν χρειαζόταν να βάλει κάποιο στην $4^{η}$ θέση θα έβαζε την κάμερα διότι μελέτησε το εύρος των τιμών των δύο χαρακτηριστικών και παρατήρησε ότι στο μέγεθος οθόνης οι τιμές είναι πιο κοντινές μεταξύ τους (θετικό στοιχείο).

Η τελική του κατάταξη ήταν η εξής:

1. Εμφάνιση
2. MP3
3. μέγεθος οθόνης, κάμερα
4. -
5. blue tooth
6. τιμή
7. μάρκα

8. θύρα USB
9. ραδιόφωνο
10. διάρκεια μπαταρίας

2) Η προσέγγιση που ακολούθησε ο Νίκος

1ος κύκλος: Μαθηματικοποίηση του προβλήματος

Ο Νίκος σκέφτηκε να γράψει κάθε χαρακτηριστικό $1^{ο}$, $2^{ο}$, $3^{ο}$ ανάλογα με τις θέσεις που παίρνει σε κάθε ομάδα και στη συνέχεια να προσθέσει τις θέσεις για κάθε χαρακτηριστικό και να βρει τον Μ.Ο.. Έτσι καταλήγει στα παρακάτω:

MP3: 1 + 3 + 4 + 4 + 3 = 15, 15/5=3

Εμφάνιση: 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 7, 7/5=1,4

Μέγεθος οθόνης: 3 + 4 + 5 + 2 + 2 = 16, 16/5=3,2

Κάμερα: 4 + 1 + 2 + 3 + 6 = 16, 16/5=3,2

Μάρκα: 5 + 7 + 8 + 6 + 8 = 34 , 34/5=6,8

θύρα USB: 6 + 8 + 7 + 7 + 7 = 35 , 35/5=7

blue tooth: 7 + 5 + 6 + 5 + 5 = 28 , 28/5=5,6

τιμή: 8 + 6 + 3 + 8 + 4 = 29 , 29/5=5,8

ραδιόφωνο: 9 + 10 + 9 + 10 + 9 = 47 , 47/5=9,4

διάρκεια μπαταρίας: 10 + 9 + 10 + 9 + 10 = 48 , 48/5=9,6

Στη συνέχεια ταξινομεί τα χαρακτηριστικά από αυτό που έχει το μικρότερο Μ.Ο. σε αυτό που έχει το μεγαλύτερο Μ.Ο.:

1. Εμφάνιση
2. MP3
3. μέγεθος οθόνης, κάμερα
4. -
5. blue tooth
6. τιμή
7. μάρκα
8. θύρα USB

9. ραδιόφωνο
10. διάρκεια μπαταρίας

Ανάπτυξη μοντέλου για την αντιμετώπιση του προβλήματος της ισοψηφίας μεταξύ *μεγέθους οθόνης και κάμερας*.

Ο Νίκος τοποθέτησε στην $3^{η}$ θέση τα δύο χαρακτηριστικά που ισοβαθμούσαν, άφησε την $4^{η}$ θέση κενή και προχώρησε συμπληρώνοντας την $5^{η}$ θέση. Εξήγησε αυτή την ενέργειά του συσχετίζοντάς την με τον αθλητισμό (με το τι γίνεται σε περίπτωση ισοβαθμίας των αθλητών).

Η συζήτηση στην ομάδα

Το λόγο πήρε πρώτα ο Νίκος και περιέγραψε τη δική του μέθοδο ταξινόμησης. Είπε: «Πρόσθεσα τις θέσεις κάθε χαρακτηριστικού και βρήκα τον μέσο όρο. Στη συνέχεια ταξινόμησα από αυτό που έχει τον μικρότερο Μ.Ο. σε αυτό που έχει τον μεγαλύτερο Μ.Ο.». Η Χαρά είπε: «Εγώ έκανα το ίδιο πράγμα με τη μόνη διαφορά ότι έβαλα κλίμακα από το 10 στο 1. Δηλαδή πρώτο στη συνέχεια στην ταξινόμηση έβαλα το χαρακτηριστικό με τον μεγαλύτερο Μ.Ο.». Ο Παύλος είπε: «Ο Νίκος έκανε το εξής: Είπε για τα χαρακτηριστικά ότι αυτό είναι $1^{ο}$ μετά $2^{ο}$ κλπ. από τον πίνακα, δεν έβαλε βαθμούς». Ο Νίκος είπε: «Τι εννοείς βαθμούς;». Ο Παύλος απάντησε: «Εγώ και η Χαρά δώσαμε βαθμούς στα χαρακτηριστικά π.χ. το πρώτο στον πίνακα παίρνει 10 βαθμούς κλπ.». Η Χαρά είπε: «Από ό,τι κατάλαβα ο Νίκος είπε ότι το $1^{ο}$ στη σειρά είναι π.χ. το MP3 και του έβαλε τον αριθμό 1». Ο Νίκος συμφώνησε και κατάλαβε τι εννοούσαν λέγοντας «*βαθμούς*». Η Χαρά είπε: «Η μόνη διαφορά της δικιάς μου λύσης και του Παύλου με του Νίκου είναι αυτή: Εμείς βαθμολογήσαμε από το 10 στο 1 ενώ αυτός από το 1 στο 10».

Στη συνέχεια πήρε το λόγο ο Νίκος και ρώτησε τους υπόλοιπους: «Άμα δεν βρίσκαμε Μ.Ο. και κάναμε απλά την πρόσθεση το ίδιο δεν θα ήταν; Αφού τα κάναμε στην ουσία όλα :5». Ο Παύλος είπε: «Απλά εγώ σκέφτηκα ότι πρέπει να βρούμε την κοινή γνώμη. Από τη λέξη *κοινός* αμέσως μου ήρθε ο Μ.Ο.». Οι υπόλοιποι συμφώνησαν

και είπαν ότι το μυαλό τους πήγε κατευθείαν στο Μ.Ο. ενώ τώρα που ειπώθηκε και το παρατήρησαν δεν υπάρχει λόγος.

Ο Νίκος είπε: «Τα δύο χαρακτηριστικά που ισοβαθμούσαν τα έβαλα στην ίδια θέση και συνέχισα συμπληρώνοντας την $5^{η}$ θέση σαν τα αθλητικά». Ο Παύλος είπε: «Κι εγώ το ίδιο έκανα, αλλά σκέφτηκα αλλιώς. Το έκανα αυτό γιατί το blue tooth είναι $5^{ο}$ κατά σειρά, δεν μπορούμε να το βάλουμε ως $4^{ο}$, παρ' ότι τα άλλα δύο ισοβαθμούν. Αλλά θέλω να πω ακόμα πως πρόσεξα ότι το μέγεθος οθόνης έχει πιο μέσες τιμές (δηλαδή τιμές που πλησιάζουν περισσότερο) από ό,τι η κάμερα. Βέβαια οι αποκλίσεις είναι μικρές. Αν ήμουν στην εταιρία ίσως $3^{ο}$ να έβαζα το μέγεθος οθόνης και $4^{ο}$ την κάμερα». Η Χαρά είπε: «Κι εγώ το σκέφτηκα αυτό. Αλλά έβγαλα από τη σύγκριση και από τα δύο χαρακτηριστικά τις τιμές 7 και 8 επειδή ήταν ίδιες και μετά δεν μπορούσα να καταλήξω σε κάποιο συμπέρασμα».

Τέλος η Χαρά είπε: «Εγώ στην ταξινόμηση έβαλα και τα δύο χαρακτηριστικά που ισοβαθμούσαν στην $3^{η}$ θέση, αλλά συνέχισα με την $4^{η}$. Δεν σκέφτηκα πόσα είναι τα στοιχεία, αλλά τη σειρά με την οποία κάνουν την κατάταξη».

Η συζήτηση διήρκησε περίπου 10 λεπτά.

Ακολουθούν οι ατομικές προσεγγίσεις των φοιτητών στο 2ο πρόβλημα:

1η ομάδα φοιτητών

Από την ανάλυση του μαθηματικού συλλογισμού των φοιτητών της 1ης ομάδας κατά την προσέγγιση του 2ου προβλήματος (Το ιδανικό μέρος για καλοκαιρινές διακοπές), εντοπίσθηκαν τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις:

1) Η προσέγγιση που ακολούθησε η Χρύσα

2) Η προσέγγιση που ακολούθησε η Μαρία

3) Η προσέγγιση που ακολούθησε η Ελπίδα

Στη συνέχεια περιγράφονται οι τρεις αυτές προσεγγίσεις.

1) Η προσέγγιση που ακολούθησε η Χρύσα

Η Χρύσα ξεκινά με τον υπολογισμό του κόστους για κάθε προορισμό (λαμβάνει υπ' όψιν της μόνο την τιμή του ξενοδοχείου) και στη συνέχεια για διασκέδαση λαμβάνει υπ' όψιν της μόνο τις καφετέριες. Στη συνέχεια σκέφτεται μήπως θα έπρεπε να λάβει υπ' όψιν της και τους άλλους παράγοντες που υπάρχουν στον πίνακα.

Αποφασίζει να υπολογίσει το συνολικό κόστος για κάθε προορισμό, αλλά με σειρά προτεραιότητας (πρώτα το εισιτήριο, μετά το κόστος διαμονής και τέλος το κόστος ενοικίασης αυτοκινήτου). Σε αυτό το σημείο απορρίπτει τους ακριβούς προορισμούς (απλοποίηση του προβλήματος).

Υπολογίζει τα μέρη διασκέδασης με σειρά προτεραιότητας για τους δύο προορισμούς που είναι οι πιο οικονομικοί. Πρώτα την ενδιαφέρει ο παράγοντας εστιατόρια-καφέ, μετά οι παραλίες, μετά τα αξιοθέατα και τέλος τα καταστήματα. Δεν προχωρά σε κάποια μαθηματική πράξη, αλλά «με το μάτι» αποφασίζει ότι καταλληλότερο μέρος για τον κ. Άρη είναι η Αφροντίνια.

2) Η προσέγγιση που ακολούθησε η Μαρία

Η Μαρία ταξινόμησε τους προορισμούς για κάθε παράγοντα από αυτόν που είναι καταλληλότερος προς αυτόν που είναι λιγότερο κατάλληλος βάζοντας βαθμούς στους προορισμούς από το 6 έως το 1:

Προορισμός	Παραλίες	Αξιοθέατα	Καταστήματα	Εστιατόρια-καφετέριες	Κόστος διαμονής ανά μέρα σε ξενοδοχείο **** (δίκλινο) €	Κόστος ενοικίασης αυτοκινήτου ανά μέρα €	Εισιτήριο μετ' επιστροφής ανά άτομο €	Κατάσταση οδικού δικτύου
Απολλώνεια	5 (3)	4 (3)	35	15 (1)	60 (6)	8 (6)	325 (6)	Μέτρια
Αθήνια	8 (5)	0 (1)	28	24 (6)	90 (3)	15 (3)	425 (3)	Καλή
Αφροντίνια	9 (6)	5 (5)	27	20 (5)	60 (6)	12 (5)	330 (5)	Καλή
Αρτεμίσια	5 (3)	4 (3)	38	16 (2)	95 (1)	13 (4)	450 (2)	Κακή
Έρμια	3 (1)	10 (6)	24	18 (4)	78 (4)	18 (2)	400 (4)	Καλή
Ποσειδώνια	6 (4)	5 (5)	32	17 (3)	92 (2)	19 (1)	500 (1)	Κακή

Στη συνέχεια κατασκεύασε πίνακα με τις ταξινομήσεις της. (στον παράγοντα διασκέδαση δεν υπολόγισε τα καταστήματα):

	Εστιατόρια-καφετέριες	Παραλίες	Αξιοθέατα
Απολλώνεια	1	3	3
Αθήνια	6	5	1
Αφροντίνια	5	6	5
Αρτεμίσια	2	3	3
Έρμια	4	1	6
Ποσειδώνεια	3	4	5

	κόστος διαμονής	κόστος ενοικίασης αυτοκινήτου	εισιτήριο
Απολλώνεια	6	6	6
Αθήνια	3	3	3
Αφροντίνια	6	5	5
Αρτεμίσια	1	4	2
Έρμια	4	2	4
Ποσειδώνεια	2	1	1

Στη συνέχεια πρόσθεσε για κάθε προορισμό όλες τις θέσεις του για κάθε παράγοντα:

Απολλώνεια : 1+3+3+6+6+6= 25
Αθήνια : 6+5+1+3+3+3= 21
Αφροντίνια : 5+6+5+6+5+5= 32
Αρτεμίσια : 2+3+3+1+4+2= 15
Έρμια : 4+1+6+4+2+4= 21
Ποσειδώνεια : 3+4+5+2+1+1= 16

Επέλεξε τον προορισμό με την μεγαλύτερη βαθμολογία ως τον πιο κατάλληλο για τον κ Άρη και τη γυναίκα του, ο οποίος είναι η Αφροντίνια.

3) Η προσέγγιση που ακολούθησε η Ελπίδα

Η Ελπίδα ξεκινά υπολογίζοντας το συνολικό κόστος για κάθε προορισμό σχηματίζοντας τον υπερπαράγοντα *οικονομικά ανά ημέρα* και ταξινομεί τους προορισμούς από τον οικονομικότερο στον ακριβότερο:

	Οικονομικά ανά ημέρα σε €
Απολλώνεια	393 (1)
Αθήνια	425 (3)

Αφροντίνια	402 (2)
Αρτεμίσια	558 (5)
Έρμια	496 (4)
Ποσειδώνεια	611 (6)

Στη συνέχεια υπολογίζει τους τόπους διασκέδασης χρησιμοποιώντας τον υπερπαράγοντα διασκέδαση που περιλαμβάνει τις παραλίες, τα αξιοθέατα και τα εστιατόρια-καφετέριες και ταξινομεί τους προορισμούς:

	Διασκέδαση (χωρίς τα καταστήματα)
Απολλώνεια	24 (6)
Αθήνια	32 (2)
Αφροντίνια	34 (1)
Αρτεμίσια	25 (5)
Έρμια	31 (3)
Ποσειδώνεια	28 (4)

Στη συνέχεια υπολογίζει τους τόπους διασκέδασης χρησιμοποιώντας τον υπερπαράγοντα διασκέδαση που περιλαμβάνει τις παραλίες, τα αξιοθέατα, τα εστιατόρια-καφετέριες και τα καταστήματα και ταξινομεί τους προορισμούς:

	Διασκέδαση (με τα καταστήματα)
Απολλώνεια	59 (5)
Αθήνια	60 (4)
Αφροντίνια	61 (2)
Αρτεμίσια	63 (1)
Έρμια	55 (6)
Ποσειδώνεια	60 (3)

Τέλος συγκρίνει τις δύο ταξινομήσεις της:

- Χωρίς τα καταστήματα:

Απολλώνεια : $1^{η}$, $6^{η}$

Αθήνια : $3^{η}$, $2^{η}$

Αφροντίνια : $2^{η}$, $1^{η}$

Αρτεμίσια : $5^{η}$, $5^{η}$

Έρμια : $4^{η}$, $3^{η}$

Ποσειδώνεια : $6^{η}$, $4^{η}$

- Με τα καταστήματα

Απολλώνεια : $1^{η}$, $5^{η}$

Αθήνια : $3^{η}$, $4^{η}$

Αφροντίνια : $2^{η}$, $2^{η}$

Αρτεμίσια : $5^{η}$, $1^{η}$

Έρμια : $4^{η}$, $6^{η}$

Ποσειδώνεια : $6^{η}$, $3^{η}$

Και στις δύο περιπτώσεις παρατηρεί πως η Αφροντίνια έχει υψηλότερες θέσεις και στον παράγοντα μέρη για διασκέδαση και στον οικονομικό παράγοντα.

Η συζήτηση στην ομάδα

Το λόγο πήρε πρώτα η Χρύσα και είπε: «Τα χώρισα αρχικά σε δύο ομάδες. Έκανα μια κατηγορία για τον οικονομικό παράγοντα. Έβαλα σε σειρά προτεραιότητας την τιμή εισιτηρίου, μετά το κόστος διαμονής και μετά το κόστος ενοικίασης αυτοκινήτου. Βρήκα τις δύο χαμηλότερες τιμές και σύγκρινα στη συνέχεια εκείνους τους προορισμούς που αντιστοιχούσαν σε αυτές τις δύο χαμηλότερες τιμές. Ακόμα ένα κριτήριο που με ενδιέφερε ήταν η κατάσταση οδικού δικτύου. Στην κατηγορία της διασκέδασης έστω ότι με ενδιέφερε περισσότερο τα εστιατόρια-καφετέριες, μετά οι παραλίες, στην τρίτη θέση τα αξιοθέατα και τελευταία τα καταστήματα. Σύγκρινα τους δύο οικονομικότερους προορισμούς, αφού απέρριψα τους άλλους προορισμούς που ήταν ακριβοί (κοίταξα ασυναίσθητα και τα υπόλοιπα και είδα ότι δεν είχαν πολύ μεγάλη διαφορά)». Η Μαρία ρώτησε: «Πήρες το κόστος διαμονής ανά ημέρα ή το εισιτήριο;». Η Χρύσα απάντησε:

«Το εισιτήριο. Επέλεξα τον προορισμό που είναι λίγο ακριβότερος γιατί μου δίνει καλύτερη διασκέδαση και καλό οδικό δίκτυο και θεωρώ ότι η διαφορά είναι μικρή (5€). Η Ελπίδα ρώτησε: «Τι υπολόγισες για διασκέδαση;». Η Χρύσα απάντησε: «Για την διασκέδαση σύγκρινα πάλι αυτούς τους δύο προορισμούς. Συγκεκριμένα κοίταξα κατά προτεραιότητα τα εστιατόρια-καφετέριες και μετά τα άλλα. Επέλεξα τον λίγο ακριβότερο γιατί μου δίνει καλύτερη διασκέδαση, δηλαδή την Αφροντίνια.

Η Ελπίδα είπε: «Εγώ έκανα προσθέσεις. Χώρισα κι εγώ σε δύο κατηγορίες: οικονομικά και διασκέδαση. Στα οικονομικά πρόσθεσα όλα τα € και τα ταξινόμησα σε σειρά. Το ίδιο έκανα και στην διασκέδαση. Στην αρχή πήρα μόνο τις παραλίες, τα εστιατόρια και τα αξιοθέατα, αλλά σκέφτηκα ότι κάποιος μπορεί να θεωρεί διασκέδαση και τα καταστήματα. Έκανα δύο ταξινομήσεις, απ' τον οικονομικότερο προς τον πιο ακριβό προορισμό και από το πιο «διασκεδαστικό» προς το λιγότερο «διασκεδαστικό». Μετά είδα ποιο μέρος είναι ποιο κοντά στις πρώτες θέσεις».

Τέλος τον λόγο πήρε η Μαρία: «Εγώ δεν έκανα δύο ταξινομήσεις. Τα υπολόγισα όλα μαζί. Για διασκέδαση έβαλα παραλίες, αξιοθέατα και εστιατόρια. Στη συνέχεια βαθμολόγησα τις θέσεις. Ο προορισμός που είχε την καλύτερη θέση (π.χ. περισσότερες παραλίες) πήρε 6 βαθμούς και αυτός που είχε την χειρότερη πήρε έναν βαθμό. Το αντίθετο έκανα στο κόστος διαμονής. Αυτός που είχε το μικρότερο κόστος διαμονής πήρε 6 βαθμούς και αυτός που είχε το μεγαλύτερο κόστος διαμονής πήρε 1 βαθμό. Σε κάθε κατηγορία ο κάθε προορισμός πήρε κάποιους βαθμούς, τους οποίους μετά πρόσθεσα όλους μαζί και αυτός που είχε τον μεγαλύτερο, τον επέλεξα». Η Χρύσα είπε: «Εγώ δεν έκανα καμία πρόσθεση». Η Μαρία είπε: «Θεωρώ πως ο τρόπος της Χρύσας δεν είναι καθόλου αντικειμενικός. Έβαλε από μόνη της ως προτεραιότητα το εισιτήριο, πράγμα υποκειμενικό». Η Ελπίδα είπε: « Συμφωνώ. Ας πούμε για τις παραλίες. Κάποιοι θεωρούν τις παραλίες πιο σημαντικές». Η Μαρία είπε: «Πιστεύω πως βόλεψαν και λίγο οι αριθμοί. Σε άλλη περίπτωση θα μπορούσαν να είναι διαφορετικοί οι αριθμοί και με τον τρόπο που το σκέφτηκες να σε έβγαζε σε άλλο μέρος. Θεωρώ ότι είναι τυχαίο που βρήκε το ίδιο μέρος με εμάς».

Έγινε μια σύντομη ανασκόπηση όλων των προτεινόμενων λύσεων και τελικά συμφώνησαν ότι η μέθοδος της Μαρίας είναι η καλύτερη και πιο «εύκολη». Η συζήτηση διήρκησε περίπου 10 λεπτά.

2η ομάδα φοιτητών

Από την ανάλυση του μαθηματικού συλλογισμού των φοιτητών της 2ης ομάδας κατά την προσέγγιση του 2ου προβλήματος (Το ιδανικό μέρος για καλοκαιρινές διακοπές), εντοπίσθηκαν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις:

1) Η προσέγγιση που ακολούθησε ο Αντώνης και ο Χρήστος

2) Η προσέγγιση που ακολούθησε ο Πέτρος

Στη συνέχεια περιγράφονται οι δύο αυτές προσεγγίσεις.

1) Η προσέγγιση που ακολούθησε ο Αντώνης και ο Χρήστος

Ξεκίνησαν υπολογίζοντας το συνολικό κόστος για κάθε προορισμό σχηματίζοντας τον υπερπαράγοντα *οικονομικά.* Αφού έκαναν όλους τους υπολογισμούς προχώρησαν σε μια υπερεκτίμηση του παράγοντα κόστος και μια απλοποίηση του προβλήματος καθώς απέρριψαν αμέσως τους προορισμούς εκείνους που δεν ήταν οικονομικοί. Στη συνέχεια ομαδοποίησαν τα μέρη διασκέδασης (παραλίες, καταστήματα, εστιατόρια-καφετέριες), χρησιμοποιώντας τον υπερπαράγοντα *μέρη διασκέδασης*. Υπολόγισαν μόνο για τους δύο προορισμούς τα συνολικά μέρη διασκέδασης:

Απολλώνεια:5+35+15=55 μέρη διασκέδασης

Αφροντίνια:9+27+20=56 μέρη διασκέδασης

Μετά από μια σύγκριση της κατάστασης των οδικών δικτύων έδωσαν την τελική τους απάντηση: «Η Αφροντίνια είναι το ιδανικότερο μέρος για αυτούς».

2) Η προσέγγιση που ακολούθησε ο Πέτρος

Ο Πέτρος ξεκίνησε υπολογίζοντας τα μέρη διασκέδασης χρησιμοποιώντας τον υπερπαράγοντα *διασκέδαση* που περιελάμβανε τις παραλίες, τα καταστήματα και τα εστιατόρια-καφετέριες. Ως ξεχωριστό παράγοντα υπολόγισε τα αξιοθέατα. Στη συνέχεια

υπολόγισε το συνολικό κόστος για κάθε προορισμό σχηματίζοντας τον υπερπαράγοντα *οικονομικά.*

	Διασκέδαση	Αξιοθέατα	Οικονομικά
Απολλώνεια :	55	4	600+80+650=1330€
Αθήνια :	60	0	900+150+850=1900€
Αφροντίνια :	56	5	600+120+660=1380€
Αρτεμίσια :	59	4	950+130+900=1980€
Έρμια :	45	10	780+180+800=1760€
Ποσειδώνεια :	55	5	920+190+1000=2110€

Η απάντηση που έδωσε ήταν η εξής: «Ο καλύτερος προορισμός είναι η Αφροντίνια μιας και τα χρήματα είναι 1380, ο δρόμος είναι καλός και σχετικά υπάρχουν πολλά μέρη για διασκέδαση (≤61)».

Με το σύμβολο ≤ εννοεί ότι τα μέρη διασκέδασης είναι =61 όταν υπολογίζονται τα αξιοθέατα και <61 όταν δεν υπολογίζονται τα αξιοθέατα.

Η συζήτηση στην ομάδα

Το λόγο πήρε πρώτα ο Χρήστος και είπε: «Τα χώρισα αρχικά σε δύο ομάδες. Έκανα μια κατηγορία για τον οικονομικό παράγοντα και υπολόγισα το συνολικό κόστος για κάθε προορισμό. Στη συνέχεια πρόσθεσα τα μέρη διασκέδασης. Βρήκα τους δύο πιο οικονομικούς και απέρριψα τους υπόλοιπους». Ο Αντώνης είπε: «Κι εγώ έκανα το ίδιο πράγμα. Διάλεξα τους δύο οικονομικότερους προορισμούς και κοίταξα στον πίνακα τα μέρη διασκέδασης. Αποφάσισα ότι η Αφροντίνια δίνει πιο πολλά». Ο Χρήστος είπε: «Την Αφροντίνια επέλεξα κι εγώ, αλλά για άλλον λόγο. Πήρα τους δύο πιο οικονομικούς προορισμούς και πρόσθεσα τα συνολικά μέρη διασκέδασης από τον πίνακα. Η Απολλώνεια είχε 55 μέρη διασκέδασης και η Αφροντίνια 56. Μετά σκέφτηκα ότι στην

Απολλώνεια δεν έχει καλό οδικό δίκτυο, ενώ στη Αφροντίνια έχει, οπότε αποφάσισα ότι η Αφροντίνια είναι ο κατάλληλος προορισμός».

Στη συνέχεια πήρε τον λόγο ο Πέτρος και είπε: «Μέτρησα τα αξιοθέατα και ξεχωριστά τα υπόλοιπα μέρη για διασκέδαση. Υπολόγισα και τα οικονομικά. Πήρα το πιο οικονομικό προορισμό που είναι η Απολλώνεια, αλλά είδα ότι έχει μέτρια κατάσταση οδικού δικτύου, πράγμα που είναι αρνητικό. Μετά είναι η Αφροντίνια ($2^{η}$ πιο οικονομική), έχει καλό οδικό δίκτυο και πολλά μέρη για διασκέδαση, άρα επιλέγω αυτήν».

Από όσα περιγράφονται παραπάνω βλέπουμε πως και οι τρεις απέρριψαν προορισμούς λαμβάνοντας υπόψη τους μόνο τον έναν παράγοντα, τον οικονομικό. Αφού έκαναν όλους τους υπολογισμούς προχώρησαν σε μια υπερεκτίμηση του οικονομικού παράγοντα και μια απλοποίηση του προβλήματος καθώς απέρριψαν αμέσως τους προορισμούς εκείνους που δεν ήταν οικονομικοί.

Η συζήτηση διήρκησε περίπου 10 λεπτά.

<u>3η ομάδα φοιτητών</u>

Από την ανάλυση του μαθηματικού συλλογισμού των φοιτητών της 3ης ομάδας κατά την προσέγγιση του 2ου προβλήματος (Το ιδανικό μέρος για καλοκαιρινές διακοπές), εντοπίσθηκαν τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις:

1) Η προσέγγιση που ακολούθησε ο Παύλος

2) Η προσέγγιση που ακολούθησε η Χαρά

3) Η προσέγγιση που ακολούθησε ο Νίκος

Στη συνέχεια περιγράφονται οι τρεις αυτές προσεγγίσεις.

1) Η προσέγγιση που ακολούθησε ο Παύλος

Ο Παύλος ξεκίνησε υπολογίζοντας τα μέρη διασκέδασης χρησιμοποιώντας τον υπερπαράγοντα *διασκέδαση* που περιελάμβανε τις παραλίες, τα αξιοθέατα, τα καταστήματα και τα εστιατόρια-καφετέριες. Υπολόγισε και την κατάσταση οδικού δικτύου σε αυτόν τον υπερπαράγοντα ως εξής: καλή=3, μέτρια=2, κακή=1. Στη συνέχεια υπολόγισε το συνολικό κόστος για κάθε προορισμό σχηματίζοντας τον υπερπαράγοντα *οικονομικά*:

	Διασκέδαση (με κατάσταση οδικού δικτύου)	Οικονομικά
Απολλώνεια	: 8+4+35+15+2=61	600+80+650=1330€
Αθήνια	: 8+0+28+24+3=63	900+150+850=1900€
Αφροντίνια	: 9+9+27+20+3=64	600+120+660=1380€
Αρτεμίσια	: 5+4+38+16+1=64	950+130+900=1980€
Έρμια	: 3+10+24+18+3=58	780+180+800=1760€
Ποσειδώνεια	: 6+5+32+17+1=61	920+190+1000=2110€

Η απάντηση που έδωσε ήταν η εξής: «Τους περισσότερους πόντους από πλευράς διασκέδασης συγκεντρώνουν η Αφροντίνια και η Αρτεμίσια. Το πιο οικονομικό όμως είναι η Απολλώνεια. Ωστόσο, η Αφροντίνια είναι το 2ο πιο οικονομικό με μικρή διαφορά και το 1ο σε διασκέδαση. Άρα, η Αφροντίνια είναι το ιδανικότερο μέρος για διακοπές. Την κατάσταση οδικού δικτύου την κατατάσσω ως εξής: καλή=3, μέτρια=2, κακή=1».

Ο Παύλος αρχικά είχε σκεφτεί να ταξινομήσει σε κάθε παράγοντα τους προορισμούς από το 1 έως το 6 και στη συνέχεια να προσθέσει τις θέσεις για κάθε

προορισμό. Δεν συνέχισε όμως με αυτόν τον τρόπο, διότι του φάνηκε χρονοβόρος. Στη συζήτηση που πραγματοποιείται στην ομάδα αναφέρει και εξηγεί στα άτομα της ομάδας τον τρόπο αυτόν, διότι τον θεωρεί αντικειμενικό και γενικεύσιμο.

2) Η προσέγγιση που ακολούθησε η Χαρά

Η Χαρά ξεκίνησε υπολογίζοντας το συνολικό κόστος για κάθε προορισμό σχηματίζοντας τον υπερπαράγοντα *οικονομικά* και στη συνέχεια ταξινόμησε τους προορισμούς:

Απολλώνεια : 600+80+650=1330€
Αθήνια : 900+150+850=1900€
Αφροντίνια : 600+120+660=1380€
Αρτεμίσια : 950+130+900=1980€
Έρμια : 780+180+800=1760€
Ποσειδώνεια : 920+190+1000=2110€
Άρα:
1) Απολλώνεια, 2) Αφροντίνια, 3) Έρμια, 4) Αθήνια, 5) Αρτεμίσια, 6) Ποσειδώνεια

Στη συνέχεια υπολόγισε τον παράγοντα διασκέδαση. Είπε: «Επειδή παραλίες, αξιοθέατα, καταστήματα και εστιατόρια-καφετέριες είναι όλα προσόντα για ένα μέρος, τα προσθέτω»:

Απολλώνεια : 8+4+35+15=59
Αθήνια : 8+0+28+24=60
Αφροντίνια : 9+9+27+20=61
Αρτεμίσια : 5+4+38+16=63
Έρμια : 3+10+24+18=55
Ποσειδώνεια : 6+5+32+17=60
Άρα:
1) Αρτεμίσια, 2) Αφροντίνια, 3) Ποσειδώνεια, 3) Αθήνια, 4) Απολλώνεια, 5) Έρμια

Στη συνέχεια βαθμολόγησε το οδικό δίκτυο: καλή=3, μέτρια=2, κακή=1 και το πρόσθεσε στον παράγοντα της διασκέδασης. Άρα:

Απολλώνεια =61

Αθήνια =63

Αφροντίνια =64

Αρτεμίσια =64

Έρμια =58

Ποσειδώνεια =61

Άρα:

1) Αφροντίνια, 1) Αρτεμίσια, 2) Αθήνια, 3) Απολλώνεια, 3)Ποσειδώνεια, 4) Έρμια

Γράφει τις ταξινομήσεις και για τους δύο παράγοντες για να δει ποιος προορισμός έχει τις καλύτερες θέσεις:

Οικονομικά:	Διασκέδαση:
1) Απολλώνεια	1) Αφροντίνια, Αρτεμίσια
2) Αφροντίνια	2) Αθήνια
3) Έρμια	3) Απολλώνεια, Ποσειδώνεια
4) Αθήνια	4) Έρμια
5) Αρτεμίσια	
6) Ποσειδώνεια	

Άρα η Αφροντίνια έχει την καλύτερη θέση και είναι ο προορισμός που αποφάσισε να επιλέξει η Χαρά.

3) Η προσέγγιση που ακολούθησε ο Νίκος

Ο Νίκος υπολόγισε για κάθε προορισμό το συνολικά μέρη διασκέδασης και το συνολικό κόστος και κατέληξε στα παρακάτω:

κατάσταση οδικού δικτύου

Απολλώνεια : 8+4+35+15=59 μέτρια
60+8+325=393€

Αθήνια : 8+0+28+24=60 καλή
90+15+425=530€

Αφροντίνια : 9+9+27+20=61 καλή
60+12+330=402€

Αρτεμίσια : 5+4+38+16=63 κακή
95+13+450=558€

Έρμια : 3+10+24+18=55 καλή
78+18+400=496€

Ποσειδώνεια : 6+5+32+17=60 κακή
92+19+500=611€

Σε αυτό το σημείο άρχισε να απορρίπτει προορισμούς λόγο του οικονομικού παράγοντα ως εξής:

Λέει: «Η Αρτεμίσια και η Ποσειδώνεια είναι ακριβοί προορισμοί και έχουν κακό οδικό δίκτυο, άρα τους απορρίπτω. Στη συνέχεια απορρίπτω την Έρμια λόγω χρημάτων (πολύ ακριβή) και διασκέδασης (λίγα μέρη) και τέλος την Αθήνια λόγω χρημάτων (πολύ ακριβή). Μου έμειναν η Απολλώνεια και η Αφροντίνια. Η Αφροντίνια έχει περισσότερα μέρη διασκέδασης και καλό οδικό δίκτυο σε αντίθεση με την Απολλώνεια που έχει μέτριο οδικό δίκτυο και λιγότερα μέρη διασκέδασης, αν και είναι λίγο πιο οικονομική. Για τους παραπάνω λόγους επιλέγω την Αφροντίνια».

Ο Νίκος αφού έκανε όλους τους υπολογισμούς προχώρησε σε μια υπερεκτίμηση του παράγοντα κόστος και μια απλοποίηση του προβλήματος καθώς απέρριψε αμέσως τους προορισμούς εκείνους που δεν ήταν οικονομικοί. Δεν μαθηματικοποίησε τον παράγοντα οδικό δίκτυο, αλλά τον έλαβε υπόψη του για την συσχέτιση μεταξύ των δύο προορισμών Αφροντίνια και Απολλώνεια που του είχαν μείνει στο τέλος.

Η συζήτηση στην ομάδα

Το λόγο πήρε πρώτα η Χαρά και είπε: «Πρώτα έφτιαξα μια λίστα ταξινόμησης των προορισμών από οικονομικής πλευράς. Μετά είπα ότι οι παραλίες τα καταστήματα, τα αξιοθέατα και τα εστιατόρια είναι όλα προσόντα για ένα μέρος, άρα τα προσθέτω για να βγάλω μια βαθμολογία και ξανακάνω μια λίστα. Τέλος βαθμολογώ το οδικό δίκτυο και το συνυπολογίζω, το προσθέτω στην προηγούμενη βαθμολογία οπότε μου αλλάζει η λίστα. Συγκρίνω τις δύο τελικές μου λίστες και καταλήγω στην Αφροντίνια». Ο Παύλος είπε: «Εγώ ακολούθησα ακριβώς τον τρόπο που περιέγραψε και η Χαρά αλλά θέλω να επισημάνω κάτι. Πρέπει ή δεν πρέπει να συνυπολογίσουμε την κατάσταση του οδικού δικτύου; Διότι δεν ξέρουμε πού ανήκει. Στην κατηγορία της διασκέδασης ή στην κατηγορία της οικονομίας;». Η Χαρά ρώτησε: «Εννοείς ίσως να μην επηρεάζει και καθόλου;». Ο Παύλος απάντησε: «Ενδεχομένως βέβαια ένα κακό οδικό δίκτυο να επηρεάζει την ψυχολογία σου και να μην μπορείς να διασκεδάσεις, οπότε μπορούμε να το υπολογίσουμε στην κατηγορία της διασκέδασης».

Στη συνέχεια ο Νίκος περιέγραψε τη μέθοδο που ακολούθησε. Είπε: «Κι εγώ δούλεψα παρόμοια. Χώρισα σε δύο κατηγορίες. Υπολόγισα τα αθροίσματα από τη διασκέδαση και από τα οικονομικά. Στη συνέχεια απέκλισα τα δύο πιο ακριβά μέρη και κατέληξα στα δύο πιο φτηνά, γιατί είχαν μεγάλη διαφορά με τα υπόλοιπα». Ο Παύλος ρώτησε: «Αν όμως η διαφορά τους στους πόντους (διασκέδασης) ήταν πολύ μεγάλη; Αν κάποιο από τα ακριβά που απέκλισες ήταν στη διασκέδαση εξαιρετικά ψηλά;». Ο Νίκος απάντησε: «Ναι, εκεί αλλάζει». Ο Παύλος είπε: «Ναι, αλλά το απέκλισες». Ο Νίκος είπε: «Είχαν όλα γύρω στο 60». Ο Παύλος ρώτησε: «Το είχες δει δηλαδή;». Ο Νίκος απάντησε: «Ναι. Πρώτα έκανα τις προσθέσεις, οπότε το είχα δει. Αν υπήρχε μεγάλη διαφορά στη διασκέδαση δεν θα μπορούσα να απορρίψω». Η Χαρά είπε: «Αν ήταν άλλα τα δεδομένα, αν ήταν άλλο πρόβλημα θα έπρεπε να ακολουθήσεις τον τρόπο που ακολουθήσαμε εμείς».

Ο Παύλος στη συνέχεια περιέγραψε τη λύση που είχε σκεφτεί να ακολουθήσει αρχικά: «Αρχικά σκέφτηκα να βρω σε κάθε κατηγορία ποιο είναι το πρώτο, δεύτερο κλπ και μετά να βρω τη συνολική κατάταξη. Νομίζω πως αυτός ο τρόπος είναι ο πιο αντικειμενικός αλλά και πιο χρονοβόρος». Η Χαρά ρώτησε: «Και αν είχες ισοβαθμίες;

Αν π.χ. έβγαιναν 2 φορές 1^{ες} η Απολλώνεια και η Αφροντίνια τι θα έκανες;». Ο Παύλος είπε: «Μετά θα έβγαζα Μ.Ο. όπως στο προηγούμενο πρόβλημα και αν υπήρχε πάλι ισοβαθμία θα υπήρχε και ένας τρίτος παράγοντας, η κατάσταση οδικού δικτύου».

Μετά από μια σύντομη ανασκόπηση όλων των προτεινόμενων λύσεων το λόγο πήρε ο Παύλος και είπε: «Πιο αντικειμενικός τρόπος επίλυσης είναι αυτός που σκέφτηκα αρχικά». Η Χαρά είπε: « Νομίζω πως και ο τρόπος που κάναμε είναι αντικειμενικός». Ο Παύλος είπε: «Θα έβγαζα ταξινόμηση σε κάθε παράγοντα και μετά θα πρόσθετα τις θέσεις του κάθε προορισμού. Ο προβληματισμός μου για τον τρόπο που ακολουθήσαμε είναι το τι είναι οι αριθμοί π.χ. στα αξιοθέατα. Πόντοι;». Η Χαρά είπε: «Είναι όλα θετικά πράγματα». Ο Παύλος ρώτησε: «Δηλαδή είναι 15 θετικό το γεγονός ότι έχει 15 εστιατόρια;». Ο Νίκος είπε: «Μπερδευόμαστε επειδή το πρόβλημα είναι γενικά διατυπωμένο. Στην ουσία όταν είναι να επιλέξεις προορισμό μελετάς και αν δεις ότι κάποιος δεν έχει καθόλου αξιοθέατα δεν τον επιλέγεις. Θα δεις βέβαια και τα οικονομικά και όλα, αλλά αν δεν έχουν τεράστιες διαφορές στα άλλα, δεν τον επιλέγεις». Ο Παύλος είπε: «Δεν ξέρουμε το κατά πόσο είναι μετρήσιμο το γεγονός ότι ένας προορισμός έχει 4 αξιοθέατα κλπ.». Η Χαρά είπε: «Εξισώνουμε τα αξιοθέατα με τα καταστήματα, αυτό είναι το λάθος μας». Ο Νίκος είπε: «Έτσι όμως μόνο μπορείς να βγάλεις κάποιο συμπέρασμα». Η Χαρά είπε: «Ναι, αλλά προβληματίζομαι. Έτσι που τα κάνουμε ο ένας μπορούσε έχει 40 παραλίες και τίποτα άλλο και να έβγαινε πρώτος». Ο Νίκος είπε: «Βοήθησαν οι αριθμοί. Είναι πάνω κάτω στα ίδια, δεν έχουν μεγάλες διαφορές». Συμφώνησαν και οι υπόλοιποι.

Η συζήτηση διήρκησε περίπου 15 λεπτά.