

Πρώτη λύση

Αφού σε κάθε πίτσα βάζει οπωσδήποτε σάλτσα (Σ) και τυρί (Τ) μπορεί να φτιάξει πίτσες με 2 έως 7 είδη γαρνιρίσματος. Ξεκινώντας από τη μοναδική πίτσα δύο ειδών -με σάλτσα και τυρί (Σ-Τ)- προσθέτουμε ένα ακόμη (διαφορετικό) είδος για να σχηματίσουμε τις πίτσες τριών ειδών, στη συνέχεια σε κάθε πίτσα τριών ειδών προσθέτουμε ένα ακόμη είδος για να σχηματιστούν οι πίτσες τεσσάρων ειδών (και διαγράφουμε τους συνδυασμούς που έχουν ήδη σχηματιστεί) και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο μέχρι να σχηματιστεί και η μοναδική πίτσα επτά ειδών.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται ολόκληρη η διαδικασία.

Για διευκόλυνση έχουμε υποθέσει ότι τα υπόλοιπα 5 είδη γαρνιρίσματος είναι: ελιές (Ε), ζαμπόν (Ζ), κοτόπουλο (Κ), μανιτάρια (Μ) και πιπεριές (Π).

2 είδη	3 είδη	4 είδη	5 είδη	6 είδη	7 είδη
Σ-Τ(1)	Σ-Τ-Ε(1)	Σ-Τ-Ε-Ζ(1)	Σ-Τ-Ε-Ζ-Κ(1)	Σ-Τ-Ε-Ζ-Κ-Μ(1)	Σ-Τ-Ε-Ζ-Κ-Μ-Π(1)
			Σ-Τ-Ε-Ζ-Π(2)	Σ-Τ-Ε-Ζ-Κ-Π(2)	Σ-Τ-Ε-Ζ-Κ-Π-Μ
			Σ-Τ-Ε-Ζ-Μ(2)	Σ-Τ-Ε-Ζ-Μ-Κ	Σ-Τ-Ε-Ζ-Μ-Π-Κ
		Σ-Τ-Ε-Κ(2)	Σ-Τ-Ε-Ζ-Π(3)	Σ-Τ-Ε-Ζ-Μ-Π(3)	Σ-Τ-Ε-Ζ-Μ-Π-Κ
			Σ-Τ-Ε-Ζ-Π(3)	Σ-Τ-Ε-Ζ-Π-Κ	
			Σ-Τ-Ε-Ζ-Π(3)	Σ-Τ-Ε-Ζ-Π-Μ	
		Σ-Τ-Ε-Μ(3)	Σ-Τ-Ε-Κ-Ζ	Σ-Τ-Ε-Κ-Μ-Ζ	
			Σ-Τ-Ε-Κ-Μ(4)	Σ-Τ-Ε-Κ-Μ-Π(4)	Σ-Τ-Ε-Κ-Μ-Π-Ζ
			Σ-Τ-Ε-Κ-Π(5)	Σ-Τ-Ε-Κ-Π-Ζ	
		Σ-Τ-Ε-Π(4)	Σ-Τ-Ε-Κ-Π(5)	Σ-Τ-Ε-Κ-Π-Μ	
			Σ-Τ-Ε-Μ-Ζ	Σ-Τ-Ε-Μ-Π-Ζ	
			Σ-Τ-Ε-Μ-Κ	Σ-Τ-Ε-Μ-Π-Κ	
	Σ-Τ-Ζ(2)	Σ-Τ-Ζ-Κ(5)	Σ-Τ-Ε-Μ-Π(6)	Σ-Τ-Ε-Μ-Π-Ζ	
			Σ-Τ-Ε-Π-Ζ	Σ-Τ-Ε-Π-Κ	
			Σ-Τ-Ε-Π-Μ		
		Σ-Τ-Ζ-Μ(6)	Σ-Τ-Ζ-Ε	Σ-Τ-Ζ-Κ-Ε	
			Σ-Τ-Ζ-Κ-Μ(7)	Σ-Τ-Ζ-Κ-Μ-Π(5)	Σ-Τ-Ζ-Κ-Μ-Π-Ε
			Σ-Τ-Ζ-Κ-Π(8)	Σ-Τ-Ζ-Κ-Π-Ε	
		Σ-Τ-Ζ-Π(7)	Σ-Τ-Ζ-Μ-Ε	Σ-Τ-Ζ-Μ-Π-Ε	
			Σ-Τ-Ζ-Μ-Κ	Σ-Τ-Ζ-Μ-Π-Κ	
			Σ-Τ-Ζ-Μ-Π(9)		
	Σ-Τ-Κ(3)	Σ-Τ-Κ-Μ(8)	Σ-Τ-Ζ-Π-Ε	Σ-Τ-Ζ-Π-Κ	
			Σ-Τ-Ζ-Π-Μ		
			Σ-Τ-Κ-Ε	Σ-Τ-Κ-Μ-Ε	
		Σ-Τ-Κ-Π(9)	Σ-Τ-Κ-Ε	Σ-Τ-Κ-Μ-Π(10)	Σ-Τ-Κ-Μ-Π-Ε
			Σ-Τ-Κ-Μ-Ε	Σ-Τ-Κ-Μ-Π-Κ	
			Σ-Τ-Κ-Π-Ε	Σ-Τ-Κ-Π-Κ	
	Σ-Τ-Μ(4)	Σ-Τ-Μ-Π(10)	Σ-Τ-Κ-Π(9)	Σ-Τ-Κ-Π-Μ	
			Σ-Τ-Μ-Ε	Σ-Τ-Μ-Π-Ε	
			Σ-Τ-Μ-Κ	Σ-Τ-Μ-Π-Κ	
	Σ-Τ-Π(5)	Σ-Τ-Π-Ε(5)	Σ-Τ-Μ-Π(10)	Σ-Τ-Μ-Π-Ζ	
			Σ-Τ-Π-Ε	Σ-Τ-Π-Ε-Ζ	
			Σ-Τ-Π-Ε-Κ	Σ-Τ-Π-Ε-Κ-Μ	

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 \text{ διαφορετικές πίτσες.}$$

Δεύτερη λύση

Είναι φανερό ότι μπορεί να φτιάξει:

- μόνο 1 πίτσα δύο ειδών
- και 5 διαφορετικές πίτσες τριών ειδών (προσθέτοντας κάθε φορά στη μοναδική πίτσα ενός είδους από ένα από τα υπόλοιπα 5 είδη).

Επίσης είναι φανερό ότι μπορεί να φτιάξει:

- μόνο 1 πίτσα επτά ειδών
- και 5 διαφορετικές πίτσες έξι ειδών (αφαιρώντας κάθε φορά από τη μοναδική πίτσα επτά ειδών ένα από τα 5 είδη που δεν χρησιμοποιεί οπωσδήποτε).

Τις πίτσες των τεσσάρων ειδών που μπορεί να φτιάξει, μπορούμε να τις μετρήσουμε αν σε κάθε πίτσα των τριών ειδών προσθέσουμε ένα ακόμη από τα 4 είδη που δεν έχουν χρησιμοποιηθεί. Όμως αν π.χ. για τρίτο είδος χρησιμοποιήσει το Α και για τέταρτο το Β ή για τρίτο το Β και για τέταρτο το Α δεν φτιάχνει διαφορετική πίτσα τεσσάρων ειδών. Το ίδιο φυσικά συμβαίνει και για κάθε άλλο ζευγάρι ειδών γαρνιρίσματος.

Έτσι αντί για $5 \times 4 = 20$ πίτσες τεσσάρων ειδών μπορεί στην πραγματικότητα να φτιάξει:

- $20 : 2 = 10$ διαφορετικές πίτσες τεσσάρων ειδών.

Με όμοιο τρόπο αλλά αφαιρώντας ένα ακόμη είδος (από τα υπόλοιπα 4 είδη που δεν χρησιμοποιεί οπωσδήποτε) από τις πίτσες των έξι ειδών, βρίσκουμε ότι μπορεί να φτιάξει και:

- 10 διαφορετικές πίτσες πέντε ειδών.

Επομένως μπορεί να φτιάξει: $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$ **διαφορετικές πίτσες**.