

Το παρακάτω άρθρο δημοσιεύτηκε στο περιοδικό *ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Γ'* το 1996. Η πλήρης αναφορά είναι η εξής:

Χ. Λεμονίδης (1996). Δυσκολίες και αντιλήψεις των μαθητών κατά το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα. *ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Γ'* Τόμος 13, Τεύχος 45, σσ. 61-70.

## **ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΟ ΠΕΡΑΣΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ**

**Χαράλαμπος Λεμονίδης  
επίκουρος καθηγητής  
Διδακτικής Μαθηματικών  
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσ/νίκης**

Είναι γενική η ομολογία ότι κατά την εισαγωγή τους οι μαθητές στην άλγεβρα αντιμετωπίζουν πολλές δυσκολίες. Οι δυσκολίες αυτές σε ένα μεγάλο βαθμό οφείλονται στο γεγονός ότι με τη χρήση της άλγεβρας οι μαθητές στην ουσία εισάγονται σε ένα καινούργιο χώρο με δικό του συμβολικό σύστημα γραφής και διαφορετικό τρόπο σκέψης. Κατά την εισαγωγή τους οι μαθητές στον αλγεβρικό τρόπο σκέψης διαθέτουν πολλές γνώσεις και μεθόδους από την αριθμητική η οποία έχει αρκετά κοινά στοιχεία με την άλγεβρα αλλά και αρκετές διαφορές. Στην εργασία αυτή με βάση την κατανόηση και τις αντιλήψεις των μαθητών θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε μερικές από τις πιο βασικές διαφορές μεταξύ της αριθμητικής και της άλγεβρας. Οι διαφορές αυτές που αναφέρονται στο συμβολικό σύστημα γραφής και στον τρόπο σκέψης παίζουν ένα πολύ βασικό ρόλο για την εισαγωγή των μαθητών στην άλγεβρα και πρέπει να τις γνωρίζει ο διδάσκων.

Ξεκινώντας αυτή την ανάλυση αρχικά θα αναφερθούμε σε κάποια στοιχεία από την ιστορική εξέλιξη της ανάπτυξης του συμβολικού συστήματος μέσα στα Μαθηματικά τα οποία είναι διαφωτιστικά στο να εξηγήσουμε κάποιες δυσκολίες και την εξέλιξη της κατανόησης των μαθητών ως προς την συμβολική γραφή.

### **Ιστορική εξέλιξη της άλγεβρας ως συμβολικό σύστημα**

Είναι γενικά αποδεκτή από τους ιστορικούς των Μαθηματικών η άποψη ότι η άλγεβρα, όσον αφορά στην συμβολική της γραφή, πέρασε από τρία βασικά στάδια εξέλιξης: το ρητορικό, το συγκοπτόμενο και το συμβολικό.

Το ρητορικό στάδιο της άλγεβρας αναφέρεται στην περίοδο πριν από το Διόφαντο (περίπου 250 μ.Χ.) Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου χρησιμοποιείται η καθομιλουμένη γλώσσα για τη λύση των ειδικών προβλημάτων και δε χρησιμοποιούνται σύμβολα για την αναπαράσταση των αγνώστων.

Το δεύτερο στάδιο της συγκοπτόμενης άλγεβρας εκτείνεται από το Διόφαντο μέχρι το τέλος του 16ου αιώνα και χαρακτηρίζεται από τη χρήση των γραμμάτων για τις άγνωστες ποσότητες. Η χρήση των γραμμάτων για τις άγνωστες ποσότητες εισάγεται από το Διόφαντο ο οποίος λύνει εξισώσεις με ένα ή δύο αγνώστους χρησιμοποιώντας μόνο ένα σύμβολο, ο δεύτερος άγνωστος εκφράζεται σε συνάρτηση με τον πρώτο (π.χ.  $x$  και  $x+40$ ). Θα πρέπει να τονιστεί ότι στην περίοδο αυτή με γράμματα αναπαριστώνται μόνο οι άγνωστες ποσότητες και οι μαθηματικοί ενδιαφέρονται μόνο να ανακαλύψουν τις τιμές που παίρνουν τα γράμματα και όχι να εκφράσουν μ'αυτά τη γενικότητα.

Στη διάρκεια αυτής της περιόδου ανακαλύπτονται σταδιακά νέοι τύποι εξισώσεων που μπορεί να λυθούν, όπως εξισώσεις 2ου βαθμού και στη συνέχεια 3ου βαθμού. Όλες όμως αυτές οι εξισώσεις έχουν αριθμητικούς συντελεστές και οι λύσεις τους εκφράζονται μόνο με αριθμητικούς όρους. Μόνο οι μέθοδοι επίλυσης μπορούν να θεωρηθούν ως "γενικές" με την έννοια ότι αυτές μπορεί να εφαρμοστούν σε μια γενική ομάδα εξισώσεων. Αυτήν την περίοδο δεν υπάρχουν "γενικές λύσεις" που να χρησιμοποιούν γράμματα.

Το 17ο αιώνα όμως όλα αυτά αλλάζουν.

Το τρίτο στάδιο της συμβολικής άλγεβρας χαρακτηρίζεται από τον Francois Viète (περίπου 1600 μ.Χ.) που εισάγει τη χρήση των γραμμάτων και για τις δεδομένες ποσότητες. Αυτή η απλή για τα σημερινά δεδομένα ανακάλυψη άλλαξε τη μορφή της άλγεβρας. Η χρήση των γραμμάτων για την αναπαράσταση των δεδομένων ποσοτήτων εισάγει μια νέα αριθμητική έννοια στα Μαθηματικά, την έννοια του αλγεβρικού αριθμού ή του συμβολικού αριθμού.

Αυτοί οι αριθμοί δεν έχουν ειδικό "μέγεθος" και ειδική διάταξη. Κάθε γράμμα αναπαριστά ταυτόχρονα κάθε ένα και όλους τους αριθμούς σ'ένα δεδομένο σύνολο και μπορεί να οριστεί μια διάταξη όταν αυτό απαιτείται. Για παράδειγμα στην έκφραση  $x+\psi = \alpha$  το " $\alpha$ " μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι μια δεδομένη ποσότητα και μπορεί να αναπαριστά κάποιον (ή και όλους) τους αριθμούς. Τα " $x$ " και " $\psi$ " είναι τώρα εξαρτημένες μεταβλητές ή άγνωστοι με αλγεβρικούς προσδιορισμούς.

Γίνεται αμέσως φανερό ότι η νοητική δραστηριότητα εδώ λειτουργεί με έννοιες που δεν είναι οι ίδιες με αυτές που χρησιμοποιούνται όταν ενδιαφερόμαστε μόνο για τον προσδιορισμό των αριθμητικών τιμών που ικανοποιούν εξισώσεις όπως  $x+2=7$  ή  $x+\psi=6$  πράγμα που γινόταν την εποχή του Διόφαντου.

Αυτό είναι ένα παράδειγμα της αλλαγής που έγινε στο γλωσσικό σύστημα της άλγεβρας εισάγοντας μια νέα έννοια που άλλαξε ριζικά τη σημασία που αποδίδονταν στην προηγούμενη περίοδο στον άγνωστο.

Ο Viète στο βιβλίο του "*Εισαγωγή στην αναλυτική τέχνη*" για να δείξει την ανωτερότητα του δικού του αλγεβρικού συστήματος από αυτό του Διόφαντου διαλέγει να λύσει ένα πρόβλημα που λύνει ο Διόφαντος μέσα στο βιβλίο του τα "*Αριθμητικά*".

Στη δική μας σύγχρονη γλώσσα το πρόβλημα και οι δύο λύσεις μπορεί να αποδοθούν ως εξής:

*"Αν δίδονται το άθροισμα και η διαφορά από οποιουδήποτε δύο αριθμούς, τότε μπορούμε πάντοτε να βρούμε ποιοι είναι αυτοί οι αριθμοί"*

Η λύση του Διόφαντου απαιτεί την παρακάτω νοητική διαδικασία:

- υποθέτουμε ότι το άθροισμα είναι 100 και η διαφορά 40·

- υποθέτουμε ότι ο μικρότερος αριθμός είναι  $x$ .

- τότε ο μεγαλύτερος αριθμός θα είναι  $x+40$ .

- έτσι  $2x+40=100$ .

- έτσι  $x=30$ . Άρα οι δύο αριθμοί είναι 30 και 70.

Παρατηρούμε ότι αυτή η λύση δεν είναι άμεσα γενικεύσιμη (ο Viète επισημαίνει αυτό το σημείο) Θα πρέπει να προσαρμοστεί αυτή η μέθοδος για οποιοδήποτε άθροισμα ή διαφορά μας δίνεται. Το  $x$  εδώ αναπαριστά ένα άγνωστο του οποίου θα πρέπει να βρεθεί η τιμή.

Η λύση του Viète προσπερνάει αυτή τη δυσκολία διότι δίνει την έννοια "κάθε αθροίσματος" και "κάθε διαφοράς" χρησιμοποιώντας γράμματα για τις δεδομένες τιμές. Η λύση αυτή είναι ισοδύναμη με την παρακάτω:

- υποθέτουμε ότι το άθροισμα είναι  $\alpha$  και η διαφορά  $\beta$ .

- αν ο μικρότερος αριθμός είναι  $x$  τότε ο μεγαλύτερος είναι  $x+\beta$ .

- έτσι  $2x+\beta=\alpha$ .

- άρα  $x=(\alpha-\beta)/2$ . Οι δύο αριθμοί θα είναι λοιπόν  $(\alpha-\beta)/2$  και  $(\alpha+\beta)/2$ .

Αυτή η λύση είναι γενική. Ανεξάρτητα από το ποιους αριθμούς αναπαριστούν το  $\alpha$  και το  $\beta$  οι δύο αριθμοί δίνονται από το  $(\alpha-\beta)/2$  και  $(\alpha+\beta)/2$ .

Ο Harper (1987) σε μια έρευνά του θέτει το παραπάνω πρόβλημα του Viète σε 144 μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης υποθέτοντας ότι υπάρχουν στάδια εξέλιξης στην κατανόηση των εγγράμματων όρων ως μεταβλητές. Ο συγγραφέας βρίσκει στις απαντήσεις των μαθητών τους τρεις τύπους επίλυσης (ρητορική, Διοφαντική και επίλυση του Viète) που υπάρχουν και στην ιστορία των Μαθηματικών. Παρατηρείται στις απαντήσεις των μαθητών μια εξέλιξη από τη ρητορική απάντηση προς τη χρήση γραμμάτων για τον άγνωστο και στη συνέχεια τη χρήση γραμμάτων για τις δεδομένες ποσότητες όσο οι μαθητές αναπτύσσουν τη μαθηματική τους εμπειρία και γνώση.

Πολλοί λίγοι όμως μαθητές, οι πιο ικανοί, υιοθετούν τη μέθοδο του Viète δηλαδή χρησιμοποιούν γράμματα για να εκφράσουν τις δεδομένες ποσότητες.

## Τα μαθηματικά σύμβολα

Η αριθμητική και η άλγεβρα έχουν πολλά κοινά σύμβολα όπως είναι για παράδειγμα το σύμβολο της ισότητας "=" και της πρόσθεσης "+". Αν και φαίνεται να υπάρχει μια συνέχεια μεταξύ της αριθμητικής και της άλγεβρας όσον αφορά την ερμηνεία που δίνεται γι'αυτά τα σύμβολα βρίσκουμε να υπάρχουν αρκετές διαφορές στην θεώρηση που κάνει για αυτά η αριθμητική και η άλγεβρα.

Όσον αφορά στο σύμβολο "=" σύμφωνα με τους Cortes A., Vergnaud G. και Kavafian N. (1990) αυτό μπορεί να παίρνει τις παρακάτω διαφορετικές σημασίες:

α) **Δίνει ένα αποτέλεσμα:** Για πολλούς μαθητές στην αρχή της μάθησης της άλγεβρας το σύμβολο "=" έχει μόνο τη σημασία του "δίνει ένα αποτέλεσμα" π.χ.  $7+3=10$ . έτσι οι μαθητές αυτοί έχουν δυσκολίες να χειριστούν σχέσεις όπως  $7+3=6+4$  ή  $3x+5=x+17$  όπου το "=" έχει τη σημασία της ισοδυναμίας.

Αυτή η αντίληψη για το "=" που διδάσκεται και είναι κυρίαρχη στο δημοτικό διαμορφώνεται επίσης και από τη χρήση των υπολογιστών τσέπης. Πατώντας το πλήκτρο "=" εμφανίζεται το αποτέλεσμα των πράξεων ή σχέσεων που έχουμε

ήδη εκτελέσει. Επίσης στους περισσότερους συνήθεις τύπους π.χ.  $E = \beta \cdot \nu$  το σύμβολο "=" χρησιμοποιείται για να δείξει τον τρόπο που μπορούμε να υπολογίσουμε τον όρο του πρώτου μέλους π.χ. το E.

Η αποκλειστική χρήση του συμβόλου "=" μ'αυτή τη σημασία οδηγεί τους μαθητές να κάνουν λάθη όταν γράφουν ισότητες. Για παράδειγμα βρίσκουμε λάθη όπως:  $90-35=55+30=85-20=65$  ή  $3x-5=9+x=2x=14=x=7$ . όπου βλέπουμε να παραβιάζονται η συμμετρική και η μεταβατική ιδιότητα της ισότητας.

β) **Ισοδυναμία:** Στις εξισώσεις, για παράδειγμα, το σύμβολο "=" δίνει τη σημασία του ότι βρίσκεται στο αριστερό μέλος είναι ισοδύναμο μ'αυτό που βρίσκεται στο δεξιό μέλος για κάποια κατάλληλη τιμή του αγνώστου ή των αγνώστων π.χ.  $5x + 15 = 2x + 30$ .

γ) **Ταυτότητα:** Πολλές φορές το σύμβολο "=" έχει τη σημασία της ταυτότητας, όπως για παράδειγμα στις περιπτώσεις των εγγράμματων σχέσεων ή ταυτοτήτων π.χ.  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$ .

δ) **Προσδιορισμός:** Το σύμβολο "=" σε πολλές περιπτώσεις έχει τη σημασία του προσδιορισμού ή του ορισμού για κάτι που βρίσκεται από τα αριστερά του. Για παράδειγμα στη συνάρτηση  $f(x) = 5x^2 + x + 3$ , το "=" προσδιορίζει την αναλυτική έκφραση της συνάρτησης  $f(x)$ .

Στο δημοτικό σχολείο αποδίδεται στο "=" περισσότερο η σημασία του "δίνει ένα αποτέλεσμα" παρά η σημασία της "ισοδυναμίας". Στην άλγεβρα θα πρέπει οι μαθητές να είναι ικανοί να ερμηνεύουν το σύμβολο "=" με όλες τις παραπάνω σημασίες. Βρίσκουμε πολλούς μαθητές στους οποίους υπερισχύει η αντίληψη για το "=" του "δίνει ένα αποτέλεσμα" όχι μόνο στο επίπεδο του δημοτικού αλλά και σε πολύ μεγαλύτερους μαθητές όπως της Β' και Γ' τάξης του γυμνασίου. Στους μαθητές αυτούς η ισχυρή αυτή αντίληψη για το "=" αποτελεί εμπόδιο και δημιουργεί λάθη στην επίλυση και κατάστρωση των εξισώσεων (βλέπε, Λεμονίδης 1996).

Στην άλγεβρα υπάρχει ακόμη η εξής ιδιαιτερότητα που δεν υπάρχει στην αριθμητική: Μια αλγεβρική έκφραση που θεωρείται ως απάντηση μπορεί να αναπαριστά μια σχέση ή τη διαδικασία από την οποία προέκυψε η απάντηση αυτή μπορεί όμως να αναπαριστά ταυτόχρονα την απάντηση αυτή καθαυτή. Αυτό ονομάζεται "**δίλημμα διαδικασίας-ονόματος**" (Davis, 1975) και μπορεί να δημιουργεί πολλές δυσκολίες στους μαθητές. Για παράδειγμα η αλγεβρική έκφραση " $v+5$ " μπορεί ταυτόχρονα να θεωρηθεί: πρώτο, ως μια διαδικαστική κατάσταση όπου αναφέρεται ότι το 5 προστίθεται στη μεταβλητή  $v$  και η έκφραση αυτή ερμηνεύεται ως "*πρόσθεσε 5 στο  $v$* " και δεύτερο να θεωρηθεί ως απάντηση που δίνει ένα αποτέλεσμα μετά την εκτέλεση της πρόσθεσης, στην περίπτωση αυτή η έκφραση ερμηνεύεται ως "*ο αριθμός που είναι κατά 5 μεγαλύτερος από το  $v$* ".

Στην αριθμητική το σύμβολο + χρησιμοποιείται συνήθως διαδικαστικά δηλαδή με την έννοια ότι εκτελείται η πράξη, αντίθετα στην άλγεβρα είναι απαραίτητες και οι δύο αντιλήψεις του + ότι δηλαδή δείχνει το αποτέλεσμα της πρόσθεσης καθώς επίσης και τη λειτουργία της πράξης αυτής. Ο περιορισμένος τρόπος

ανάγνωσης του συμβόλου + της πράξης προκαλεί το "δίλημμα διαδικασίας-ονόματος" που αναφέρουμε παραπάνω.

Τα συχνά λάθη του τύπου  $3\alpha+2\beta=5\alpha\beta$  που συναντούμε στις εγγράμματες παραστάσεις μπορεί να οφείλονται σ' ένα μεγάλο βαθμό στις εξής αιτίες: Στην αριθμητική η έννοια της πρόσθεσης εισάγεται ως φυσική συνένωση δύο συνόλων.

Επιπλέον, το γεγονός ότι στους μεικτούς αριθμούς (π.χ.  $5\frac{3}{4} = 5 + \frac{3}{4}$ ) και στο αριθμητικό σύστημα (π.χ.  $37 = 3$  δεκάδες +  $7$  μονάδες) χρησιμοποιείται η σύνδεση των όρων για να εκφραστεί η πρόσθεση ίσως οδηγεί τους μαθητές να συμπεριφέρονται ανάλογα και στην άλγεβρα (Matz, 1980).

Η μεγάλη τάση που παρουσιάζεται από τους μαθητές να θεωρούν όρους όπως  $5\alpha$  ως αθροίσματα και όχι ως γινόμενο ίσως θα πρέπει να μας οδηγήσει στο να γράφουμε τους όρους αυτούς με μια πλήρη αναπαράσταση (5α) για την αρχική τουλάχιστον περίοδο της ενασχόλησης τους με την άλγεβρα. Όσον αφορά τη γραφή των μεικτών αριθμών θα πρέπει ίσως να αλλάξει η γραφή τους και να γράφουμε τους αριθμούς αυτούς ως άθροισμα χρησιμοποιώντας το +.

## Τα γράμματα και οι μεταβλητές

### Τα γράμματα

Μια από τις σημαντικές διαφορές μεταξύ της αριθμητικής και της άλγεβρας είναι η χρήση των γραμμάτων για την αναπαράσταση τιμών. Τα γράμματα στην αριθμητική χρησιμοποιούνται με ένα τελείως διαφορετικό τρόπο από ότι στην άλγεβρα. Στην αριθμητική συνήθως χρησιμοποιούνται ως συντομογραφίες μονάδων ή αντικειμένων (π.χ. 5μ). Έτσι το 5μ σημαίνει 5 μέτρα που είναι 5 φορές το ένα μέτρο. Στην άλγεβρα όμως το 5μ μπορεί να σημαίνει και 5 φορές τον αριθμό των μέτρων. Το γράμμα μ λοιπόν μπορεί να παίρνει μια διπλή σημασία, μπορεί να σημαίνει ένα μέτρο ή κάποιο άγνωστο αριθμό μέτρων. Αυτή η αλλαγή στο νόημα των γραμμάτων από την αριθμητική στην άλγεβρα δημιουργεί στους μαθητές το πρόβλημα της "έλλειψης αριθμητικής αναφοράς" (Booth, 1984 σελ. 28) όταν ερμηνεύουν τη σημασία των γραμμάτων στην άλγεβρα. Στην εργασία αυτή (Booth, 1984) περιγράφεται για παράδειγμα ένας διάλογος με μαθητή 15 ετών ο οποίος ερμηνεύοντας το γράμμα γ στη σχέση  $3+5\gamma$  έλεγε ότι έχουμε 8 γιοι ή 8 γιαιούρτια.

Στην άλγεβρα επίσης πολλές φορές διαβάζουμε τα γράμματα των μεταβλητών ως συντομογραφίες. Για παράδειγμα ο τύπος  $E = \beta \chi \nu$  διαβάζεται ως συντομογραφία του τύπου Εμβαδόν = βάση x ύψος και είναι δύσκολο να διαχωριστεί από ένα τύπο που εκφράζει σχέσεις μεταξύ συγκεκριμένων μέτρων ή μεταβλητών.

Σε μια έρευνα σε μαθητές ΣΤ' δημοτικού (Ε. Δεμίρη, Α. Μαρκέτος και Γ. Μπάρμπας, 1992) επισημαίνεται η αδυναμία των μαθητών αυτών να χειριστούν τα γράμματα όπως τους αριθμούς και να μπορούν να κάνουν πράξεις με γράμματα. Έτσι, στην παράσταση  $3\mu + 2\mu$  όπου απαιτείται από το παιδί η ικανότητα να αντιμετωπίζει το γράμμα όπως και τον αριθμό για να εκτελέσει την πράξη, βρέθηκαν μόνο το 21,6% των μαθητών που έδωσαν την απάντηση  $5\mu$  ή

μ<sup>5</sup>. Επίσης χαρακτηριστικός είναι ο παρακάτω διάλογος σ' αυτό το σημείο με μια μαθήτρια:

**Ερ:** Μπορείς να κάνεις πρόσθεση έτσι όπως είναι με τα γράμματα; Εδώ αυτό ( $2\beta + 3\beta$ ) μπορείς να το γράψεις πιο σύντομα;

**Στέλλα:** Όχι, γιατί δεν ξέρω ποιος είναι ο αριθμός  $\beta$ .

## Οι μεταβλητές

Μια από τις πιο σημαντικές έννοιες στην άλγεβρα είναι η έννοια της μεταβλητής. Η μεταβλητή αρχίζει να εμφανίζεται στη διδασκαλία από τις τελευταίες τάξεις του δημοτικού και συνεχίζει να εμφανίζεται και να κατασκευάζεται σαν έννοια για τους μαθητές μέχρι το Λύκειο.

Η μεταβλητή από την αρχή της διδασκαλίας εμφανίζεται σε διαφορετικές καταστάσεις όπου χρησιμοποιείται με διαφορετικό τρόπο. Η χρήση αυτή της μεταβλητής σε διαφορετικές καταστάσεις δημιουργεί στους μαθητές αντίστοιχες αντιλήψεις για την υπόστασή της.

Παραδείγματα διαφορετικών καταστάσεων όπου εμφανίζεται η μεταβλητή στην αρχή της διδασκαλίας της και των αντίστοιχων αντιλήψεων που δημιουργεί είναι τα παρακάτω:

1) Η χρήση της μεταβλητής σαν άγνωστος σε αριθμητικές σχέσεις με κενά ( $5 + \bullet = 8$ ) ή εξισώσεις ( $5 + x = 8$ ).

Στις καταστάσεις αυτές δημιουργείται στους μαθητές η αντίληψη ότι η μεταβλητή είναι ένας άγνωστος αλλά συγκεκριμένος αριθμός.

2) Η χρήση της μεταβλητής σε ένα γεωμετρικό ή φυσικό τύπο (π.χ.  $E = \beta \times \upsilon$ ) όπου εκφράζει κάποιο συγκεκριμένο φυσικό μέγεθος.

Οι καταστάσεις αυτές δημιουργούν στους μαθητές την αντίληψη ότι η μεταβλητή είναι το σύμβολο ενός συγκεκριμένου μεγέθους που μπορεί να παίρνει οποιαδήποτε τιμή.

3) Η χρήση της μεταβλητής σε γενικευμένους κανόνες της αριθμητικής ή σε αλγεβρικές σχέσεις (π.χ.  $a = \beta + 3$ ,  $\mu = 2\kappa + 1$ ).

Στις καταστάσεις αυτές σχηματίζεται στους μαθητές η αντίληψη ότι η μεταβλητή είναι ένας γενικευμένος αλλά άγνωστος αριθμός.

Οι διαφορετικές χρήσεις της μεταβλητής στη διδασκαλία όπου δεν διαχωρίζονται και δεν επεξηγούνται κάθε φορά δημιουργούν στους μαθητές διαφορετικές αντιλήψεις που συνυπάρχουν ταυτόχρονα ή ανεξάρτητα η μία από την άλλη μέσα σε αντιφατικά και συγκεχυμένα συμπλέγματα που παραμένουν ρευστά για πολύ καιρό (Ε. Δεμίρη, Α. Μαρκέτος και Γ. Μπάρμπας, 1994).

Η ρευστότητα αυτή όσον αφορά στην κατανόηση της μεταβλητής δημιουργεί αντιφάσεις και συγχύσεις στη χρήση της όπως επισημαίνεται από τους Ε. Δεμίρη, Α. Μαρκέτος και Γ. Μπάρμπας (1994, σελ. 68) και φαίνεται στις παρακάτω απαντήσεις των μαθητών της ΣΤ' τάξης του δημοτικού και της Α' γυμνασίου:

· στην παράσταση  $3\beta + 2\beta$

*"πρέπει να βρούμε πόσο είναι το  $\beta$  για να κάνουμε τις πράξεις"*

*στο πρόβλημα του ερωτηματολογίου όπου σε έναν αγώνα μπάσκετ η Ελένη πέτυχε στο  $\alpha'$  ημίχρονο  $\kappa$  πόντους και στο  $\beta'$  ημίχρονο  $\lambda$  πόντους, όταν ρωτήθηκε τι είναι το  $\kappa + \lambda$ :*

*"αν ξέρουμε πόσο είναι το  $\kappa$  και το  $\lambda$ , μπορούμε να υπολογίσουμε τους πόντους που έβαλε η Ελένη".*

*στο ερώτημα τι είναι το  $\beta$  στην παράσταση  $5 + \beta$*

*"έναν οποιοσδήποτε αλλά άγνωστος αριθμός".*

Οι μαθητές όταν χρησιμοποιούν τα γράμματα που αντιπροσωπεύουν αριθμούς συνήθως έχουν την τάση να αποδίδουν στα γράμματα αυτά μια μόνο συγκεκριμένη τιμή. Έτσι στην περίπτωση των εξισώσεων μαθητές της Β' και Γ' γυμνασίου μπορούν να λύνουν εξισώσεις του τύπου  $5x=8$  όπου το  $x$  έχει κάποια συγκεκριμένη τιμή ενώ στην αόριστη εξίσωση  $3x=3x$  πολλοί μαθητές δίνουν ως απάντηση μια συγκεκριμένη τιμή του  $x$  ή δε δίνουν καμία απάντηση γιατί η σχέση αυτή τους φαίνεται παράδοξη (Λεμονίδης, 1996).

Η τάση αυτή των μαθητών να αποδίδουν μια μοναδική τιμή στα γράμματα που αναπαριστούν μεταβλητές προέρχεται από την αριθμητική όπου στα σύμβολα αποδίδεται μια μοναδική τιμή. Για παράδειγμα το σύμβολο 5 αναπαριστά μονοδιάστατα κάτι συγκεκριμένο για τους μαθητές. Επίσης την αντίληψη της μοναδικής τιμής των γραμμάτων τη δημιουργεί και η ενασχόληση των μαθητών με τις εξισώσεις όπου συνήθως ο άγνωστος έχει κάποια συγκεκριμένη τιμή.

## **Η διαφορά μεθόδου στην αριθμητική και την άλγεβρα**

Όταν οι μαθητές εισάγονται στην άλγεβρα έχουν ήδη αρκετές αντιλήψεις και ικανότητες από την αριθμητική τις οποίες θα πρέπει να διευρύνουν και να προσαρμόσουν στις απαιτήσεις της άλγεβρας. Υπάρχουν όμως έννοιες στην άλγεβρα, όπως είναι οι τυπικές αναπαραστάσεις και μέθοδοι για τη λύση προβλημάτων, που δεν αποτελούν συνέχεια των συμβολισμών και των μεθόδων της αριθμητικής.

Στην αριθμητική οι μαθητές χρησιμοποιούν άτυπες μεθόδους οι οποίες δεν μπορεί να γενικευτούν και να εφαρμοστούν στα προβλήματα που αντιμετωπίζει η άλγεβρα.

Αυτοί οι άτυποι μέθοδοι που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να αντιμετωπίσουν τα προβλήματα της αριθμητικής στη στοιχειώδη εκπαίδευση βασίζονται στη διαίσθηση και δεν ανταποκρίνονται σ' ένα γενικό πλαίσιο αλλά κάθε φορά οριοθετούνται από τα χαρακτηριστικά του ειδικού προβλήματος που αντιμετωπίζουν.

Στην αριθμητική δε χρειάζεται να επεξηγηθούν οι διαδικασίες που χρησιμοποιούνται για τη λύση των προβλημάτων. Έτσι, στην αρχή της άλγεβρας οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες με την αναπαράσταση τυπικών μαθηματικών μεθόδων. Βέβαια, οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στην αριθμητική είναι πολύ συχνά άτυποι και είναι δύσκολο να συμβολιστούν.

Στην αριθμητική η όλη δραστηριότητα επικεντρώνεται στο να βρεθεί μια ειδική αριθμητική απάντηση. Στην άλγεβρα όμως η επικέντρωση γίνεται στην παραγωγή διαδικασιών και σχέσεων και η έκφραση αυτών με απλούς γενικούς τύπους.

Για παράδειγμα, όταν θέλουμε να αναπαραστήσουμε με εξισώσεις προβλήματα που δίνονται με λόγια. Οι εξισώσεις θα συμβολίζουν τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων που εμφανίζονται στο πρόβλημα. Με την αριθμητική μέθοδο οι μαθητές σκέφτονται τις πράξεις που θα χρησιμοποιήσουν για να λύσουν το πρόβλημα και ο στόχος της δραστηριότητάς τους είναι να βρουν ένα αριθμητικό αποτέλεσμα. Με την αλγεβρική μέθοδο οι μαθητές θα πρέπει να επικεντρώσουν τη δραστηριότητά τους στο να αναπαραστήσουν συμβολικά την κατάσταση του προβλήματος παρά στις πράξεις που θα πρέπει να εκτελέσουν.

Παίρνουμε, για παράδειγμα, ένα απλό πρόβλημα που δώσαμε στους μαθητές της Β' και Γ' τάξης του γυμνασίου (Λεμονίδης, 1996). *"Ο Πέτρος παίζει μπίλιες με τους φίλους του. Το πρωί κέρδισε 14 και το βράδυ έχασε 31 μπίλιες, οπότε του έμειναν 23. Πόσες μπίλιες είχε από την αρχή;"* Οι μαθητές που χρησιμοποίησαν την αριθμητική μέθοδο αφάιρεσαν το 14 από το 31 και ότι βρήκαν το πρόσθεσαν στο 23 ( $31 - 14 = 17$ ,  $23 + 17 = 40$ ) ή πρόσθεσαν το 31 στο 23 και από ότι βρήκαν αφάιρεσαν το 14 ( $31 + 23 = 54$ ,  $54 - 14 = 40$ ). Οι μαθητές που χρησιμοποίησαν την αλγεβρική μέθοδο αναπαράστησαν την κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα με πράξεις και σχέσεις μεταξύ των πράξεων και κατέληξαν στην εξίσωση  $x + 14 - 31 = 23$ .

Παρατηρούμε ότι στην κατάστρωση της εξίσωσης προσθέτονται οι μπίλιες που κερδίστηκαν και αφαιρούνται αυτές που χάθηκαν. Ενώ με την αριθμητική μέθοδο οι μαθητές σκέφτονται εντελώς αντίστροφα, αφαιρούν τις μπίλιες που κερδίστηκαν και προσθέτουν αυτές που χάθηκαν στο παιχνίδι.

Έτσι με την αλγεβρική μέθοδο εκτός του ότι θα πρέπει να αναπαρασταθούν και να συνδεθούν μεταξύ τους οι πράξεις που χρειάζονται για να λυθεί το πρόβλημα θα πρέπει να αναπαραστώνται πράξεις που είναι αντίστροφες από αυτές που χρησιμοποιούνται στην αριθμητική μέθοδο.

Στην αλγεβρική μέθοδο επίλυσης του προβλήματος από τη στιγμή που θα καταστρωθεί η εξίσωση (ή οι εξισώσεις) υπάρχει ένας διαφορετικός τρόπος σκέψης. Θα πρέπει να επιλυθεί η εξίσωση με διαδικασίες που είναι καινούργιες και υπάρχουν μόνο στην άλγεβρα (αλγόριθμος επίλυσης) ξεχνώντας το νόημα των τιμών και των σχέσεων που αντιπροσωπεύονται από τις αλγεβρικές εκφράσεις (διαδοχή ενδιάμεσων εξισώσεων).

Η επίλυση δηλαδή των εξισώσεων και η εύρεση των λύσεων γίνεται αλγοριθμικά και με συγκεκριμένους κανόνες ανεξάρτητους από τα δεδομένα και τις σχέσεις που υπάρχουν στο πρόβλημα.

## ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Booth, L. R. (1984). Algebra: Children's strategies and errors. Windsor, UK: NFER-Nelson.

Δεμίρη Ε., Μαρκέτος Α., Μπαρμπάς Γ. (1992). Οι αντιλήψεις των μαθητών της ΣΤ' δημοτικού για τη μεταβλητή. **Διάσταση 3-4**, (1992), Θεσσαλονίκη.

Δεμίρη Ε., Μαρκέτος Α., Μπαρμπάς Γ. (1994). Οι αντιλήψεις των μαθητών της Α' Γυμνασίου για τη μεταβλητή. **Διάσταση 4**, (1994), Ε.Μ.Ε., Θεσσαλονίκη.



Cortes A., Vergnaud G., Kavafian N. (1990). From arithmetic to algebra: negotiating a jump in the learning process. Proceedings of the 14th P.M.E. Conference. (Vol. II, pp. 27-34), Oaxtepec, Mexico.

Davis, Robert B. (1975). Cognitive Processes Involved in Solving Simple Algebraic Equations. **Journal of Children's Mathematical Behaviour 1(3) 1975.**

Harper, E (1987). Ghosts of Diophantus. **Educational Studies in Mathematics 18 (1987) pp. 75 - 90.**

Λεμονίδης Χ. (1996). Εμπειρική έρευνα στην ικανότητα επίλυσης εξισώσεων Α' βαθμού από μαθητές γυμνασίου. **Ερευνητική Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών 1, Ε.Μ.Ε., Θεσ/νίκη.**

Matz, Marilyn. (1980). Towards a Computational Theory of Algebraic Competence. **Journal of Children's Mathematical Behaviour 3(1) 1980.**