

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΦΛΩΡΙΝΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ



Φράκταλ ανθοδέσμη

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΗΣ
ΑΝΑΣΤΑΣΙΑΣ ΚΑΡΑΚΩΣΤΑ

ΓΝΩΡΙΜΙΑ ΜΕ ΤΑ ΦΡΑΚΤΑΛΣ – ΠΡΟΤΑΣΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΟΥΣ
ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΕΣ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ:
ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ ΛΕΜΟΝΙΔΗΣ – ΚΩΝ/ΝΤΙΝΟΣ ΝΙΚΟΛΑΝΤΩΝΑΚΗΣ

ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ: ΕΛΕΝΗ ΤΣΑΚΙΡΙΔΟΥ – ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΦΑΧΑΝΤΙΔΗΣ

Στα αγόρια μου,
τα καμάρια μου,
τα καμαράκια μου,
που κλειδώνουν απ' έξω το δέος του
θανάτου,
και κλείνουν μέσα την αγωνία του.
Και είναι, μερικές φορές,
Αβάσταχτο το βάρος,
αυτής, της μέσα κλίμακας του θανάτου,
της μικρής
και αυτό που τη βαραίνει είναι
το απρόβλεπτο
Τ. Κ.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ.....	6
ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	7

Θεωρητικό μέρος

A. Η θεωρία του Χάους

A1. Εισαγωγή	12
A2. Η εμφάνιση του Χάους στα Δυναμικά Συστήματα	12
A3. Η εμφάνιση του Χάους στα μαθηματικά - Fractals.....	21

B. Δυναμικά συστήματα και Χάος

B1. Δυναμικά συστήματα – Ελκυστές Fractals.....	27
B2. Δυναμικά συστήματα - Επαναληπτικές συναρτήσεις.....	30

Γ. Μελέτη των Φράκταλς

Γ1. Εισαγωγή.....	31
Γ2. Η φύση των Fractals.....	34
Γ2.1. Αυτοομοιότητα.....	34
Γ2.1.1. Ομοιότητα και λόγος ομοιότητας –Κλίμακα.....	34
Γ2.1.2. Αυτοομοιότητα σχήματος	35
Γ2.1.3. Αυτοομοιότητα ακολουθίας σχημάτων.....	36
Γ2.2. Αυτοομοιότητα και Φράκταλς.....	38
Γ3. Διάσημα φράκταλς.....	41
Γ3.1. Cantor Set, ή σύνολο του Cantor ή σκόνη του Cantor.....	41
Γ3.2. Τρίγωνο του Sierpinski ή Sierpinski Gasket, (Πλέγμα του Sierpinski).....	42
Γ3.3. Χαλί του Sierpinski (Sierpinski Carpet).....	44
Γ3.4. Καμπύλη του Koch.....	45
Γ4. Το ζήτημα της Διάστασης.....	48
Γ4.1. Η στοιχειώδης έννοια της Ευκλείδειας Διάστασης.....	48

Γ4.2. Η έννοια της Διάστασης από την σκοπιά της Ομοιότητας.....	51
Γ4.2.1. Υπολογισμός της διάστασης του συνόλου Cantor.....	52
Γ4.2.2. Υπολογισμός της διάστασης του τριγώνου του Sierpinski ή <i>Sierpinski Gasket</i> , (Πλέγμα του Sierpinski).....	53
Γ4.2.3. Υπολογισμός της διάστασης του <i>Sierpinski Carpet</i> . (Χαλί του Sierpinski).....	54
Γ4.2.4. Υπολογισμός της διάστασης της νιφάδας του Koch.....	54
Γ4.3. Αντιμετώπιση των κλασικών διαστάσεων κάτω από το πρίσμα της νέας σκοπιάς.....	56
Γ4.4. Συμπληρωματικές παρατηρήσεις.....	57
Γ5. Φράκταλς και Τέχνη.....	59
Γ5.1. Μαθηματικά μοντέλα στον Πραγματικό Κόσμο - Ανακαλύπτοντας την ομορφιά τους στην Φύση.....	59
Γ5.2. Ανακαλύπτοντας την ομορφιά τους στις Ανθρώπινες Κατασκευές.....	60
Γ5.2.1 Τα φράκταλς στην ζωγραφική.....	60
Γ5.2.2 Στην αρχιτεκτονική.....	63
Γ5.2.3. Στην λογοτεχνία.....	65
Γ5.2.4. Η Επίδραση των Φράκταλς στην σύγχρονη τέχνη.....	66
Γ5.2.5. Στην μόδα!.....	70
 Δ. Τα Φράκταλς στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση	
Δ1. Τα μαθηματικά μέσα στην τάξη.....	71
Δ1.1. Το όχημα της γεωμετρίας – Διεθνείς προβληματισμοί.....	71
Δ1.2. Ανάπτυξη νέων διδακτικών μεθόδων.....	78
Δ1.2.1. Διεθνές ενδιαφέρον.....	81
Δ2. Τα φράκταλς στην τάξη.....	83
Δ2.1. Η διδασκαλία των φράκταλς στο εξωτερικό.....	83
Δ2.2. Γιατί να διδαχθούν τα Φράκταλς;.....	94
Δ2.3. Επιλογή της διδακτικής προσέγγισης της προτεινόμενης διδασκαλίας.....	100

Εμπειρικό μέρος

Ε. Η έρευνα που διενεργήθηκε

Ε1. Εισαγωγή.....	105
Ε2. Μεθοδολογία της έρευνας	
Ε2.1. Ερευνητικά ερωτήματα.....	105
Ε2.2. Τα στάδια της έρευνας.....	105

ΣΤ. Ανάλυση των δεδομένων της έρευνας

ΣΤ.1. Οι αρχικές απόψεις των καθηγητών των μαθηματικών.....	110
ΣΤ.2. Παρουσίαση και ανάλυση των διδασκαλιών.....	113
ΣΤ.2.α. Περίπτωση Α.....	114
ΣΤ.2.β. Περίπτωση Β.....	115
ΣΤ.2.γ. Περίπτωση Γ.....	115
ΣΤ.2.δ. Περίπτωση Δ.....	116
ΣΤ.2.ε. Περίπτωση Ε.....	117
ΣΤ.2.1. Α) Ανάλυση της διδακτικής συμπεριφοράς των καθηγητών.....	118
ΣΤ.2.2.Β) Ανάλυση της ανταπόκρισης των διδασκαλιών στους μαθητές...	124
ΣΤ.2.3. Γ) Αξιολόγηση της δράσης- μετατόπιση των πεποιθήσεων των καθηγητών	131

Ζ. Επίλογος

Επίλογος.....	134
Βιβλιογραφία.....	139

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Από τα πιο ενδιαφέροντα, για μένα, θέματα των μαθηματικών ήταν το θέμα της ομοιότητας (οι αναλογίες είναι το κλειδί με το οποίο η ανθρώπινη σκέψη κάνει την υπέρβαση) αλλά και το ζήτημα του απείρου. Ήταν σίγουρο λοιπόν, ότι τα Φράκταλς θα με γοήτευαν. Μελετώντας τα, αποκαλύφθηκε μπροστά μου ένα παράθυρο προς τη γνώση, τόσο πολυεπίπεδο, που με άφησε έκπληκτη. Εκ των πραγμάτων, αντιμετώπισα το θέμα ολιστικά, αφού το κάθε επίπεδο συνδεόταν με το άλλο και μάλιστα με μη γραμμική διάταξη, όπως ακριβώς συνέβαινε και στα Φράκταλς. Στάθηκε πραγματική πρόκληση για μένα η χρησιμοποίησή τους στη διδασκαλία και τα θεώρησα Δούρειο Ίππο για την ανάδειξη στους μαθητές της γοητείας των μαθηματικών αλλά και για την ενεργοποίηση όσων περισσότερων μαθηματικών συναδέλφων μπορούσα, με στόχο την επαγγελματική μας αναβάθμιση.

Αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω αρχικά, τον σύμβουλο των μαθηματικών κ. Θεόδωρο Κουφό για την αμέριστη υποστήριξή του, καθώς και την συνάδελφο μαθηματικό Ερριέτα Κυράνη, σε τμήμα της οποίας διενήργησα την πιλοτική διδασκαλία. Επίσης ευχαριστώ ολόψυχα τα μέλη της ερευνητικής ομάδας, που συνεργάστηκαν μαζί μου και δεν δίστασαν να αποτολμήσουν αυτό που αποτελεί ακόμα ταμπού για πολλούς καθηγητές της μέσης εκπαίδευσης: το άνοιγμα της σχολικής τάξης σε μάτια τρίτων, με στόχο την κατανόηση της εκπαιδευτικής πραγματικότητας και παράλληλα την παρέμβασή μας για τη βελτίωσή της.

Οφείλω να ευχαριστήσω τους Καθηγητές κ. Χαράλαμπο Λεμονίδη, για την επιλογή του θέματος και την καθοδήγησή του και Κων/νο Νικολαντωνάκη, για τις συμπληρωματικές παρατηρήσεις του.

Εισαγωγή

Στόχος όλων των σύγχρονων διεθνών Προγραμμάτων Πλαισίων Σπουδών (Cockcroft 1982, Australian Education Council 1991, National Council of Teachers of Mathematics 1989, 2000) είναι να αποκτήσουν τα σχολικά μαθηματικά ουσιαστικό νόημα, έτσι ώστε η μαθηματική γνώση να διαμορφώνει τελικά πολίτες με αυξημένη κριτική ικανότητα για ορθή λήψη διαφόρων αποφάσεων και επεξεργασία των πολυπληθών πληροφοριών. Στην Ελλάδα, το ΠΙ, στο πλαίσιο του Διαθεματικού Ενιαίου Πλαισίου Προγράμματος Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) και της Ευέλικτης Ζώνης, δρομολογεί καινοτομίες στη μαθηματική εκπαίδευση, οι οποίες συνοψίζονται στη φράση: *«Μαθηματικά για όλους μέσω μιας διαδικασίας σύλληψης, οργάνωσης και τεκμηρίωσης των μαθηματικών γνώσεων.»* Αυτή η αναβάθμιση της ποιότητας της εκπαίδευσης, προτείνεται μέσα από τη διαθεματική οργάνωση του περιεχομένου των διδακτικών αντικειμένων, την αλλαγή της Διδακτικής των Μαθηματικών, με την υιοθέτηση διερευνητικών και ολιστικών προσεγγίσεων στη διδασκαλία αλλά και την είσοδο, όπου αυτό είναι εφικτό, και σύγχρονων θεμάτων, τα οποία θα προκαλέσουν το ενδιαφέρον των μαθητών.

Όλα όμως αυτά, προϋποθέτουν μεγάλες αλλαγές από μέρους των εκπαιδευτικών, οι οποίοι πρέπει να μεταβούν από τις παραδοσιακές σε εναλλακτικές αντιλήψεις, όχι μόνο για τη φύση των μαθηματικών αλλά και για τη μαθησιακή διαδικασία καθώς και τη διδακτική των μαθηματικών. Ειδικά οι μαθηματικοί, θα έρθουν αντιμέτωποι με μια διδακτική μεθοδολογία, μια υλικοτεχνική υποδομή (διδακτική χρήση Η/Υ) και γενικότερα μια νέα φιλοσοφία, άγνωστα σε αυτούς, αφού οι περισσότεροι δεν έχουν διδαχθεί κατά τη διάρκεια των σπουδών τους παιδαγωγικά μαθήματα. Σε διεθνείς έρευνες (Richardson et al. 1991) έχει διαπιστωθεί ότι οι πεπεισμένοι των εκπαιδευτικών σχετίζονται άμεσα με οποιαδήποτε αλλαγή στη διδακτική πρακτική και επίσης ότι η μεταστροφή ισχυρών πεποιθήσεων είναι πολύ δύσκολη υπόθεση γιατί είναι ανθεκτικές ακόμα και στην πιο εμπεριστατωμένη τεκμηρίωση (Munby 1982, Pajares 1992).

Το θέμα είναι πολύπλοκο αλλά το σίγουρο είναι ότι η ανάγκη για ουσιαστική επιμόρφωση των εκπαιδευτικών καταλήγει να είναι η αιχμή του δόρατος.

Υπάρχουν διαπιστώσεις¹ οι οποίες αμφισβητούν την αποτελεσματικότητα των διαφόρων παρεχομένων επιμορφωτικών προγραμμάτων, με τη μορφή τουλάχιστον που προσφέρονται στους μαθηματικούς της εκπαίδευσης στην Ελλάδα. Ίσως η ανεπάρκεια των κλασικών, μικρής διάρκειας, επιμορφωτικών προγραμμάτων, να οφείλεται κυρίως στο ότι αυτά δεν ακολουθούν τις ίδιες αρχές τις οποίες προτείνουν στους καθηγητές να εφαρμόσουν στη διδασκαλία τους. Δεν ακολουθούν καθόλου «καθηγητοκεντρικές» προσεγγίσεις (κατά το μαθητοκεντρικές) αφού δεν έχουν ως κέντρο εκκίνησης τις ανάγκες και τα ενδιαφέροντα των εκπαιδευτικών. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, οι καθηγητές, να παραμένουν παθητικοί ακροατές των αλλαγών, χωρίς ουσιαστική δυνατότητα συνδιαμόρφωσης ή αλλαγής των στάσεων και των πεποιθήσεών τους.

Οι διαπιστώσεις αυτές αποτέλεσαν την αφορμή για την εκπόνηση της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας. Πυρήνας της εργασίας είναι η δημιουργία μιας διδακτικής πρότασης και η εφαρμογή της στην τάξη με τη διενέργεια τεχνικής Έρευνας Δράσης. Η διδακτική παρέμβαση η οποία έγινε, στόχευε αφ' ενός μεν στον εμπλουτισμό του περιεχομένου της διδασκαλίας, με ένα ελκυστικό θέμα των σύγχρονων μαθηματικών και αφ' ετέρου στον διαφορετικό τρόπο προσέγγισής του. Επιπλέον, αυτή η παρέμβαση, εντασσόταν σε μια ευρύτερη θεώρηση του Αναλυτικού Προγράμματος και στην οπτική της αναμόρφωσής του από τον διδάσκοντα, τον πρώτο και βασικότερο κρίκο της εκπαιδευτικής αλυσίδας και επομένως στην καλλιέργεια ενός κλίματος συνεχούς βελτίωσης της εκπαιδευτικής πρακτικής.

Η εργασία αρθρώνεται σε δύο μέρη, το θεωρητικό και το εμπειρικό. Πριν από αυτά τα μέρη υπάρχει η εισαγωγή και μετά από αυτά παρατίθενται η βιβλιογραφία και το παράρτημά της.

Το θεωρητικό αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια, τα Α, Β, Γ και Δ. Στο κεφάλαιο Α, *Η θεωρία του Χάους*, γίνεται μια ιστορική αναδρομή της

¹ Οικονόμου, Π., Τζεκάκη, Μ. (1999). Στάσεις, Αντιλήψεις και πρακτικές των εκπαιδευτικών στη διδασκαλία των μαθηματικών, *Ερευνητική Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών*, 4, σελ. 37-65

Μαυρογιώργος, Γ. (2003). Ανιχνεύοντας την εκπαιδευτική πολιτική για τον εκπαιδευτικό στα επιχειρησιακά προγράμματα (ΕΠΕΑΕΚ) του ΥΠΕΠΘ. *Ο εκπαιδευτικός και η ευρωπαϊκή διάσταση στην εκπαίδευση*. Αθήνα:Μεταίχμιο

εμφάνισης της νέας θεωρίας στα διάφορα επιστημονικά πεδία και επισημαίνεται η επίδρασή της στη διαμόρφωση ενός ευρύτερου πλαισίου σκέψης, το οποίο αντιπαράτίθεται στην κατεστημένη ντετερμινιστική άποψη της κλασικής νευτώνειας φυσικής.

Στο κεφάλαιο Β, *Δυναμικά συστήματα και Χάος*, γίνεται η σύνδεση της θεωρίας του Χάους και των Φράκταλς με στόχο την ανάδειξη της εσωτερικής σύνδεσης και συμπληρωματικότητας των επιστημών αφού τα τελευταία, εκτός από καθαρά μαθηματικά δημιουργήματα εμφανίζονται και στη φυσική, ως ελκυστές δυναμικών συστημάτων.

Στο κεφάλαιο Γ, *Μελέτη των Φράκταλς*, γίνεται μελέτη των Φράκταλς, σε επίπεδο Β/θμιας εκπαίδευσης, παρουσιάζονται τα πιο γνωστά από αυτά, τίθεται το θέμα της ύπαρξης κλασματικών διαστάσεων και υπολογίζονται οι διαστάσεις των προαναφερθέντων Φράκταλς. Επίσης σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται σύνδεση των μαθηματικών με τον περιβάλλοντα χώρο, αφού τα παραπάνω σχήματα συνδέονται τόσο με τη Φύση, όσο και με τα ανθρώπινα δημιουργήματα, από τη ζωγραφική, αρχιτεκτονική και λογοτεχνία έως τη σύγχρονη ψηφιακή τέχνη και τη μόδα.

Στο τέταρτο κεφάλαιο Δ, *Τα Φράκταλς στην Β/θμια Εκπαίδευση*, καταγράφεται η σύγχρονη εκπαιδευτική πραγματικότητα και οι νέες τάσεις που έχουν προκύψει από αποτελέσματα ερευνών, τάσεις που αφορούν τόσο το περιεχόμενο των σύγχρονων σχολικών μαθηματικών όσο και τον τρόπο διδασκαλίας τους. Επίσης, δίνονται πληροφορίες, οι οποίες αφορούν τη διδασκαλία των Φράκταλς στο εξωτερικό καθώς και τα αποτελέσματα προσωπικής έρευνας στο διαδίκτυο για την καταγραφή και ομαδοποίηση των ιστοσελίδων για τα Φράκταλς, ανάλογα με το περιεχόμενό τους. Στόχος αυτού του μέρους είναι η θεωρητική στήριξη της διδακτικής πρότασης που προτείνεται και αφορά την διδασκαλία των Φράκταλς στην ελληνική Β/θμια εκπαίδευση καθώς και παροχή υλικού για περαιτέρω διδακτική χρήση.

Το εμπειρικό μέρος της εργασίας περιλαμβάνει την δημιουργία διδακτικής πρότασης διδασκαλίας των Φράκταλς στην Β/θμια εκπαίδευση και την εφαρμογή της στη σχολική τάξη, με την διενέργεια πρακτικής έρευνας δράσης. Η διδακτική πρόταση, η οποία βρίσκεται στο παράρτημα της εργασίας, αναπτύσσεται σπειροειδώς, και μπορεί να εφαρμοστεί από την Α' Γυμνασίου

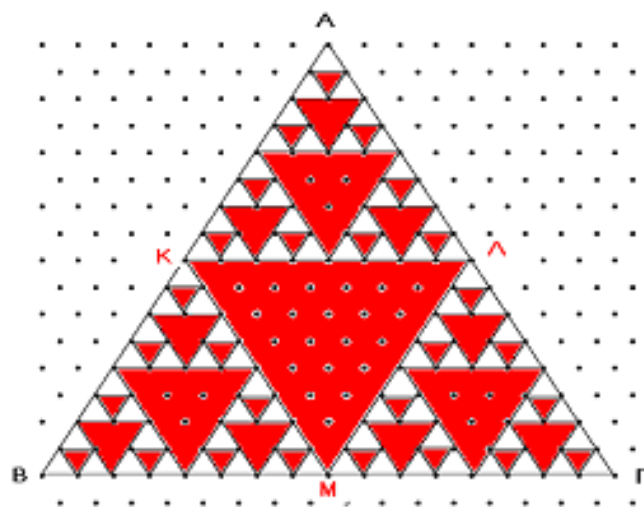
έως και την Β΄ Λυκείου. Το εμπειρικό αυτό μέρος αποτελείται από τα κεφάλαια Ε, ΣΤ και Ζ.

Το κεφάλαιο Ε, *Η έρευνα που διενεργήθηκε*, περιλαμβάνει τη μεθοδολογία, τα ερευνητικά ερωτήματα και τα στάδια της έρευνας.

Στο κεφάλαιο ΣΤ, *Ανάλυση των δεδομένων της έρευνας*, αναλύονται οι αρχικές απόψεις των καθηγητών των μαθηματικών, οι οποίοι πήραν μέρος στην έρευνα και παρουσιάζεται η διδασκαλία καθενός ξεχωριστά. Κατόπιν αναλύονται η διδακτική συμπεριφορά των καθηγητών και η απήχηση της διδασκαλίας τους στους μαθητές. Το κεφάλαιο κλείνει με την αξιολόγηση της δράσης από την ομάδα. Οι καθηγητές επανεξέτασαν το είδος της γνώσης και τις δεξιότητες που απαιτείται να καλλιεργήσουν οι μαθητές, είδαν στην πράξη τα αποτελέσματα των νεώτερων προσεγγίσεων γύρω από τη διδασκαλία και μάθηση και ενθαρρύνθηκαν να επανεξετάσουν το ρόλο τους μέσα στην τάξη.

Τέλος, η εργασία κλείνει με τον *Επίλογο*, στον οποίο εκθέτουμε σε συντομία τις τελικές διαπιστώσεις και τον προβληματισμό που ανέκυψε από την έρευνα.

Θεωρητικό μέρος



Τα τέσσερα πρώτα βήματα κατασκευής του
τριγώνου του Sierpinski

A. Η θεωρία του Χάους

A1. Εισαγωγή

Η θεωρία του Χάους² ή της χαοτικής δυναμικής αποτελεί έναν ιδιαίτερο κλάδο των θετικών επιστημών, όπου όλο και περισσότεροι επιστήμονες από διαφορετικά επιστημονικά πεδία (Ιατρικής, Γεωλογίας, Θερμοδυναμικής, Κοινωνιολογίας, Βιολογίας, Αεροδυναμικής κλπ.) βρίσκουν λύσεις σε πολλά από τα μέχρι τώρα άλυτα ερωτήματά τους. Ένα σημαντικό μέρος του επιστημονικού κόσμου δηλώνει ότι η επιστημονική ανάπτυξη του 20ού αιώνα θα περάσει στην ιστορία κυρίως για τρία πράγματα: τη θεωρία της Σχετικότητας, την Κβαντομηχανική και τη θεωρία του Χάους, που θεωρείται ως η τρίτη μεγάλη επιστημονική επανάσταση αυτού του αιώνα. Αλλά τι είναι η θεωρία του Χάους;

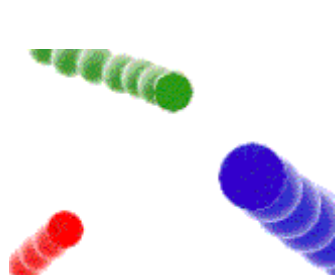
Η θεωρία του Χάους είναι μια καινούρια θεωρία, που αμφισβητεί την κλασική νευτώνεια θεωρία, η οποία έχει σαν θεμέλιο λίθο τη βεβαιότητα ότι με κατάλληλες συνθήκες η εξέλιξη κάθε συστήματος είναι πλήρως προβλέψιμη. Μελετά το ζήτημα αν μπορούμε ή όχι (και γιατί) να κάνουμε προβλέψεις σε μεγάλο βάθος χρόνου για τη συμπεριφορά ενός συστήματος και μας βοηθά να συνδέσουμε το προβλέψιμο με το απρόβλεπτο και το κανονικό με το τυχαίο, αποκαλύπτοντας τελικά μια κρυμμένη τάξη στην εξέλιξη ενός συστήματος. Η θεωρία αυτή δίνει στη λέξη Χάος ένα ειδικό νόημα, το οποίο διαφέρει από την καθημερινή σημασία της λέξης.

A2. Η εμφάνιση του Χάους στα Δυναμικά Συστήματα

Η νευτώνεια κοσμοθεωρία επικρατούσε στη φυσική για τέσσερις αιώνες. Κεντρική ιδέα αυτής της θεωρίας ήταν ότι οι νόμοι του φυσικού κόσμου μπορούν να γίνουν κατανοητοί μόνο αν εκφράσουμε τις φυσικές ιδιότητες ως ποσοτικές μετρήσεις, δηλαδή με αριθμητικούς όρους. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να εκφραστούν οι νόμοι της φυσικής με μαθηματικές εξισώσεις. Τις τιμές των μετρήσεων που κάνουμε μια δεδομένη χρονική στιγμή (που τη θεωρούμε σαν αρχή) για να μελετήσουμε ένα συγκεκριμένο σύστημα - είτε

² Η ονομασία οφείλεται στον μαθηματικό του Πανεπιστημίου του Maryland Jim York και δόθηκε μόλις το 1975. (Ένας οδηγός του Χάους σε αρχάριους- Σαν ιστορία. Στο <http://www.physics4u.gr>)

αυτό είναι το ηλιακό σύστημα, είτε ένα σώμα που πέφτει ελεύθερα στη γη, είτε τα ωκεάνια ρεύματα- τις αποκαλούμε αρχικές συνθήκες του συστήματος. Οι νόμοι της κλασικής φυσικής είναι ντετερμινιστικοί διότι υποδηλώνουν ότι για ένα δεδομένο σύστημα, οι ίδιες αρχικές συνθήκες θα παράγουν πάντα το ίδιο κατοπινό αποτέλεσμα. Σύμφωνα επομένως με αυτή την αρχή, η γιγαντιαία μηχανή του κόσμου λειτουργεί όπως ένας σωλήνας που δεν επιτρέπει καμία απόκλιση ούτε παρέμβαση. Μάλιστα απώτερος στόχος αυτού του εργαλειακού³ χαρακτήρα της επιστήμης είναι:



A) η εύρεση του κατάλληλου σωλήνα, δηλ. των κατάλληλων εξισώσεων- νόμων που περιγράφουν το υπό μελέτη σύστημα.

B) ο κατά δυνατόν ακριβέστερος προσδιορισμός της αρχικής άκρης του σωλήνα δηλ. ο ακριβέστερος προσδιορισμός των αρχικών συνθηκών του συστήματος ώστε να πετύχουμε όσο το δυνατό καλύτερη πρόβλεψη για το άλλο άκρο, για το πέρας της διαδικασίας. Όμως καμιά πραγματική μέτρηση δεν είναι απεριόριστα ακριβής αφού πάντα εμπεριέχει ένα βαθμό απροσδιοριστίας στην τιμή της. Αυτή η απροσδιοριστία, η οποία είναι παρούσα σε κάθε πραγματική μέτρηση, πηγάζει από το γεγονός ότι οποιαδήποτε μετρητική συσκευή που μπορούμε να φανταστούμε, ακόμη και αν σχεδιαστεί και χρησιμοποιηθεί τέλεια, μπορεί να καταγράψει την μέτρησή της με πεπερασμένη ακρίβεια. Και εδώ υπεισέρχεται το άπειρο. Για να καταγραφεί μια μέτρηση με άπειρη ακρίβεια, η συσκευή θα απαιτούσε ένα μέσο καταγραφής ικανό να απεικονίζει άπειρο αριθμό ψηφίων, πράγμα αδύνατο, άρα η απροσδιοριστία (αβεβαιότητα) στις μετρήσεις δεν μπορεί ποτέ να εξαλειφθεί τελείως, ούτε ως θεωρητική σκέψη.

Στη δυναμική, η παρουσία της απροσδιοριστίας σε κάθε πραγματική μέτρηση σημαίνει ότι κατά τη μελέτη οποιουδήποτε συστήματος, οι αρχικές συνθήκες δεν μπορούν να καθοριστούν με άπειρη ακρίβεια, επομένως εφαρμόζοντας τους αντίστοιχους νόμους οδηγούμαστε σε συμπέρασμα (πρόγνωση) που έχει και αυτό μια αντίστοιχη απροσδιοριστία. Εδώ τώρα

³ What is Chaos? Lesson One: The philosophy of Determinism. (<http://order.ph.utexas.edu/chaos/>)

πρέπει να τονιστεί ότι κατά το μεγαλύτερο μέρος της σύγχρονης ιστορίας της φυσικής, έχει υποτεθεί ότι η όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια στις αρχικές συνθήκες διασφαλίζει πάντα και μεγαλύτερη ακρίβεια στο τελικό αποτέλεσμα, στην πρόβλεψη του συστήματος. Αυτή η σιωπηρή παραδοχή είναι αποτέλεσμα του Καρτεσιανο-νευτώνειου πρότυπου, που χαρακτηρίζει τον δυτικό τρόπο σκέψης και έχει διαχυθεί σε όλα τα επιστημονικά πεδία, τουλάχιστον εδώ και τρεις αιώνες. Δεν πρέπει ποτέ να μας διαφεύγει ότι η επιστημονική γνώση, οι προτάσεις που διατυπώνονται από την επιστήμη, οι τεχνικές που χρησιμοποιεί, είναι όλα ανθρώπινα δημιουργήματα που αναπτύσσονται σταδιακά και γίνονται κοινά αποδεκτά από διάφορες ανθρώπινες κοινότητες μετασχηματίζοντας σταδιακά την κοινωνία και δημιουργώντας έτσι έναν τρόπο σκέψης, ένα πλαίσιο. Αυτό με τη σειρά του μεταφέρεται μέσα στις επιστημονικές θεωρίες, στα εργαλεία της επιστημονικής πρακτικής και στα πειραματικά σχέδια αντανakλώντας και στο επίπεδο της επιστήμης αυτήν την αντίληψη που έχει σχηματίσει η κοινωνία για τον εαυτό της και τον κόσμο.

Η επιστημονική σκέψη λοιπόν που εξουσίαζε απόλυτα το δυτικό μυαλό και που υπόκειται πλέον σήμερα σε μια προσεκτική αναθεώρηση είναι ο επιστημονικός ορθολογισμός. Διαμορφώθηκε ως προς τις γενικές της γραμμές κυρίως το 17^ο και 18^ο αιώνα με κύριους διαμορφωτές τον Γαλιλαίο, τον Καρτέσιο και τον Νεύτωνα. Ο Καρτέσιος ήταν αυτός που ανέπτυξε το επιστημονικό πεδίο της μαθηματικής ανάλυσης και απέδειξε ότι η φύση θα μπορούσε να απεικονιστεί ως μια μεγάλη μηχανή και ο Νεύτωνας αυτός που ανακάλυψε τους νόμους με τους οποίους η μηχανή αυτή λειτουργούσε. Όπως ήδη λέχτηκε, η νευτώνεια κοσμοθεωρία είναι μηχανιστική, πλήρως ντετερμινιστική και στηρίζεται στην αρχή της αιτιότητας.

Το 1890⁴ ο βασιλιάς της Σουηδίας Oscar ο 2^{ος} προκήρυξε βραβείο για την λύση του προβλήματος των n σωμάτων (της λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης του Νεύτωνα που περιγράφει την κίνηση « n υλικών σημείων» που κινούνται στο χώρο, μόνο κάτω από την επίδραση της αμοιβαίας βαρυτικής έλξης τους και το οποίο είχε λυθεί μόνο για $n=1$ και $n=2$). Τότε ο Γάλλος μαθηματικός και

⁴ Αραχωβίτης, Ι.(2001). *Εισαγωγή στη χαοτική δυναμική & στα κλασμοειδή*. Αθήνα: Παπασωτηρίου, σ. 8

αστρονόμος Henri Poincare (1854 - 1912), έκανε μια ανακάλυψη που έμελλε να αλλάξει τα θεμέλια της Νευτώνειας μηχανικής, και να αποτελέσει έτσι τη γέννηση ενός νέου κλάδου της επιστήμης: του Χάους. Συγκεκριμένα ο Poincare διαπίστωσε πως το πρόβλημα των τριών σωμάτων (μελέτησε το πρόβλημα του Ήλιου, της Γης και της Σελήνης) ήταν και θα παραμείνει άλυτο γιατί δεν μπορεί να προβλεφθεί η τροχιά οποιουδήποτε ουράνιου σώματος που δέχεται την επίδραση δύο η περισσότερων άλλων σωμάτων. Παρατήρησε ότι τα αστρονομικά συστήματα που αποτελούνταν τυπικά από τρία ή περισσότερα αστρονομικά σώματα με αλληλεπιδράσεις μεταξύ και των τριών δεν φαίνονταν να υπακούουν τον κανόνα ότι ελαττώνοντας την απροσδιοριστία των αρχικών συνθηκών ελαττώνεται επίσης κατ' αντίστοιχο τρόπο η απροσδιοριστία της τελικής πρόβλεψης. Γι αυτούς τους τύπους συστημάτων ο Poincare έδειξε ότι μια πολύ μικρή ανακρίβεια στις αρχικές συνθήκες, αυξάνεται με τον χρόνο με τεράστιο ρυθμό. Έτσι δύο σχεδόν πανομοιότυπα σύνολα αρχικών συνθηκών για το ίδιο σύστημα, θα κατέληγαν σε δύο τελικές προβλέψεις οι οποίες θα διέφεραν πάρα πολύ η μία από την άλλη. Γι αυτά τα συστήματα δηλαδή, ακόμα και αν μπορούσαμε να καθορίσουμε τις αρχικές μετρήσεις εκατό φορές ή ένα εκατομμύριο φορές ακριβέστερα, η αβεβαιότητα για μεταγενέστερους ή προηγούμενους χρόνους δεν θα ελαττωνόταν κατ' αυτό το ποσοστό αλλά τουναντίον, θα παρέμενε τεράστια. Ο Poincare⁵ πλησίασε στη λύση του προβλήματος κάνοντας ποιοτική μελέτη (χρησιμοποίησε γεωμετρία) και έτσι αποκάλυψε την δυναμική αστάθεια, το χάος στο Ηλιακό σύστημα και μαζί ανακάλυψε την απρόβλεπτη εξέλιξη ενός μη γραμμικού συστήματος που πηγάζει από την ακραία ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες.

Αν και η εργασία του Poincare θεωρήθηκε σημαντική από μερικούς διορατικούς φυσικούς του καιρού του, χρειάστηκε να περάσουν 80 χρόνια από τότε για να συνειδητοποιήσουν οι αστρονόμοι και οι υπόλοιποι επιστήμονες τη σπουδαιότητα αυτής της ανακάλυψης. Ένας από τους λόγους που αγνοήθηκε ήταν ότι η επιστημονική κοινότητα των φυσικών ήταν απασχολημένη με τις

⁵ Η μεγάλη συνεισφορά του Poincare ήταν ότι επανέφερε τη γεωμετρία στη μηχανική (επινόησε την τοπολογία, τα μαθηματικά της συνέχειας) απελευθερώνοντας τη φαντασία από τη "φυλακή" των αναλυτικών μεθόδων του Lagrange και της τυπολατρίας των Bourbaki.

νέες ανακαλύψεις στην κβαντομηχανική. Ο άλλος ότι δεν ήταν έτοιμη να δεχτεί έναν καινούριο τρόπο σκέψης, που ουσιαστικά ανέτρεπε το κατεστημένο του ντετερμινιστικού προτύπου.

Όμως τα θεμέλια της νευτώνειας άποψης για τον κόσμο αρχίζουν να τα υπονομεύουν οι ανακαλύψεις στο χώρο της κβαντομηχανικής, του μικροκόσμου. Το 1927 ο Bohr⁶ παρουσιάζει και ερμηνεύει τη νέα κβαντομηχανική θεωρία, ως μια πιθανοκρατική θεωρία με έντονο το στατιστικό της χαρακτήρα (ερμηνεία της Κοπεγχάγης). Δύο από τα κύρια θέματά της ήταν η άρνηση της αιτιοκρατίας καθώς και η θέση της μη τοπικότητας⁷ που προέβλεπε ότι, γεγονότα που συμβαίνουν σε ένα σημείο, μπορούν να επηρεάσουν γεγονότα σε άλλο σημείο που μπορεί να είναι πολύ απομακρυσμένο από το πρώτο. Ο Bohr ήταν πεπεισμένος ότι στο επίπεδο της κβαντικής φυσικής έχουμε να κάνουμε με συμπεριφορές που διαφέρουν ριζικά από αυτό που ήταν γνωστό ως κλασική συμπεριφορά κάνοντας συν τοις άλλοις την παρατήρηση ότι στα κβαντικά συστήματα τα όργανα μέτρησης που χρησιμοποιούμε αλληλεπιδρούν με το μετρούμενο αντικείμενο με τρόπο που να επηρεάζεται η μέτρηση. Η διαδικασία μέτρησης λοιπόν, καθορίζεται από τον επιστήμονα που εκτελεί την μέτρηση και συνεπώς το αποτέλεσμα της μέτρησης, άρα και το μετρούμενο μέγεθος, δεν είναι ένα «πράγμα» που υπάρχει αντικειμενικά και ανεξάρτητα από τον παρατηρητή, αλλά στον υπολογισμό του καθοριστικό ρόλο παίζει ο παρατηρητής⁸. Το συμπέρασμα αυτό καταδεικνύει την υποκείμενη φιλοσοφική παραδοχή του ίδιου του Bohr για τη φύση της πραγματικότητας, σύμφωνα με την οποία δεν υπάρχει κάποια πραγματικότητα ανεξάρτητη από τον παρατηρητή και την συνείδησή του⁹.

⁶ Niels Bohr(1885-1962). 40 χρόνια από το θάνατο του ανθρώπου με τη βαθύτερη σκέψη. (<http://www.physics4u.gr/articles/2002/bohr.html>)

⁷ Η διαμάχη για την ερμηνεία της κβαντικής μηχανικής. (<http://www.physics4u.gr/articles/2002/disputequantum.html>)

⁸ Χρηστίδης Θ. (1997). *Χάος και πιθανολογική αιτιότητα: Μεταξύ προκαθορισμού και τύχης. Μια σπουδή των φυσικών εννοιών και αρχών*. Θεσσαλονίκη :Εκδ. Βάνιας, σελ.217

⁹ Η διαμάχη για την ερμηνεία της κβαντικής μηχανικής. (<http://www.physics4u.gr/articles/2002/disputequantum.html>)

Επίσης ο David Bohm (1917-1992)¹⁰ προτείνει ότι η κβαντική φυσική απαιτεί μια νέα τάξη, μια νέα άποψη του κόσμου που θα αναπτύσσεται σε αντίθεση με τον Δυτικό Κόσμο, ενός κόσμου που θα εστιάζεται περισσότερο στην Ολότητα και τη διαδικασία παρά στην ανάλυση των ξεχωριστών μερών: *«Αντί να ξεκινήσουμε από τα τμήματα και να επιδείξουμε πώς αυτά λειτουργούν μαζί, τώρα αρχίζουμε από το σύνολο. Τα τμήματα φαίνονται να είναι άμεσα συνδεδεμένα. Από αυτή τη σύνδεση εξαρτάται η δυναμική τους σχέση, με τρόπο θεμελιώδη μέσα στο ευρύτερο σύστημα»*.

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να παρατηρήσουμε ότι η καινούρια θεωρία του χάους αρχίζει και διαφαίνεται στον μικρόκοσμο και στον μακρόκοσμο, δηλ. στους δύο κόσμους που προκύπτουν από τον περιβάλλοντα χώρο μας με σμίκρυνση και μεγέθυνση καθώς επίσης και από την επέμβαση του απείρου(ακριβείς μετρήσεις των αρχικών συνθηκών). Και πραγματικά, όπως θα δούμε παρακάτω, οι λέξεις κλειδιά για την καινούρια θεωρία είναι η αλλαγή κλίμακας και η έννοια του απείρου.

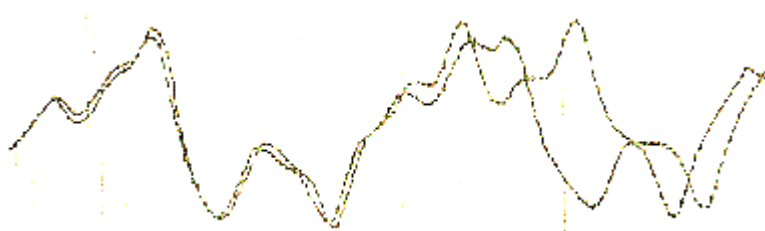
Όλες αυτές οι ανακαλύψεις άρχισαν να διαμορφώνουν ένα ευρύτερο πλαίσιο σκέψης με αποτέλεσμα το 1954 ο σοβιετικός επιστήμονας Α. Kolmogorov να δώσει προσοχή στην εργασία του Poincare και να ακολουθήσουν και άλλοι. Συγκεκριμένα, το 1960 περίπου, ο μεγάλος αμερικανός τοπολόγος S. Smale¹¹, χρησιμοποιώντας απλά γεωμετρικά παραδείγματα, έδειξε ότι ένα μεγάλο πλήθος 3-διάστατων δυναμικών συστημάτων εμπεριέχει λύσεις με ιδιότητες τόσο τυχαίες, όσο και η ρίψη ενός νομίσματος ή το παιχνίδι της ρουλέτας. Αυτός όμως που διέκρινε πως η επανάληψη (iteration) γεννά το χάος, ανήκει στον Αμερικανό μετεωρολόγο Edward Lorenz που, στα μέσα του χειμώνα 1961, εργαζόταν στο Τεχνολογικό Ινστιτούτο της Μασαχουσέτης (MIT). Ο Lorenz προσπαθούσε να προσεγγίσει λύσεις με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή σε μερικές μη γραμμικές εξισώσεις, που περιέγραφαν το μοντέλο της γήινης ατμόσφαιρας. Κάποια ημέρα, για να ελέγξει μια πρόγνωση που είχε πάρει από τον υπολογιστή, ξαναέδωσε τα δεδομένα του για τη θερμοκρασία, την ατμοσφαιρική πίεση και

¹⁰ D. Bohm (1917-1992). Ένας από τους βαθύτερους στοχαστές του αιώνα.

(<http://www.physics4u.gr/articles/2002/bohm.html>)

¹¹ Μπούνη, Τ. (2004). *Ο θαυμαστός κόσμος των Fractals*. Αθήνα: Leaders Books, σελ. 150

τη διεύθυνση του ανέμου αλλά αυτή τη φορά με στρογγυλοποιημένους αριθμούς, περιμένοντας να του βγάλει ο υπολογιστής την ίδια πρόγνωση. Το αποτέλεσμα όμως τον εξέπληξε. Τα νέα αποτελέσματα ήταν τελείως διαφορετικά. Αμέσως κατάλαβε πως η μεγέθυνση των διαφορών οφειλόταν στο συνδυασμό της μη γραμμικότητας και της επανάληψης. Για την ιστορία, αναφέρουμε πως αντί να βάλει τον αριθμό 0.506127 με έξι δεκαδικά ψηφία, έβαλε 0.506.



Στην παραπάνω εικόνα φαίνεται μια εκτύπωση που πήρε ο Lorenz το 1961. Από το ίδιο σημείο εκκίνησης ο Lorenz είδε τον καιρό που έδινε ο υπολογιστής της IBM να δημιουργεί σχήματα που ξελλίσονταν όλο και πιο διαφορετικά μέχρι που κάθε ομοιότητα εξαφανίστηκε.

Ο Lorenz δημοσίευσε κατόπιν σε ένα μετεωρολογικό περιοδικό του 1963 μια πολύ σημαντική μελέτη στην οποία έθετε το ερώτημα γιατί δεν μπορούμε να προβλέψουμε τον καιρό πάνω από 5 μέρες. Στη μελέτη του αυτή¹² περιέγραφε την εκπληκτική διαπίστωση που είχε κάνει δηλ. ότι οι λύσεις ενός απλού ντετερμινιστικού μοντέλου 3 διαφορικών εξισώσεων διακρινόντουσαν από την εξαιρετικά ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Όμως συνέχιζε παραπέρα λέγοντας ότι οι λύσεις συγκεντρωνόντουσαν όλες σε ένα πολύπλοκο σύνολο στο χώρο των φάσεων που ονομάστηκε παράξενος ελκυστής. Αυτός ο ελκυστής παρουσίαζε μια τόσο σύνθετη δομή κάτω από συνεχείς μεγεθύνσεις, που έδινε την εντύπωση ότι εκτεινόταν πέραν των 2 διαστάσεων, χωρίς όμως και να γεμίζει ένα τμήμα του 3-διάστατου χώρου. Σήμερα ξέρουμε ότι το αντικείμενο αυτό είναι ένα Fractal.

¹² Μπούντης, Τ. ό.π. , σελ. 151

Στον χώρο τώρα της χημείας συμβαίνουν εξ ίσου ενδιαφέροντα γεγονότα που εδραιώνουν ακόμα περισσότερο αυτήν την νέα θεώρηση των πραγμάτων. Ο μεγάλος Ρώσος Ilya Prigogine¹³ (Nobel Χημείας) που το 1945 άρχισε να μελετά στο Ελεύθερο Πανεπιστήμιο των Βρυξελλών τα ανοιχτά θερμοδυναμικά συστήματα υποστήριζε ότι το θανάσιμο πλήγμα στην κλασική φυσική θα δοθεί από δύο σχετικά περιθωριακές, κατά το παρελθόν, περιοχές τη φυσικής: τη θερμοδυναμική των ανοιχτών συστημάτων και τη μελέτη των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων, την επιστήμη του χάους. Η συμβολή του Ilya Prigogine στην ανάπτυξη αυτών των δύο νέων κλάδων είναι κατά κοινή ομολογία τεράστια, με αποτέλεσμα να αποκαλείται σύγχρονος ιερέας της θεωρίας του Χάους. Ο Prigogine δηλώνει ότι οι ζωντανοί οργανισμοί βρίσκουν εν τέλει τάξη και νόμο, ζώντας μέσα σε ένα κόσμο που τρεκλίζει - κι ότι αυτή η τάξη βγαίνει από χημικά συστήματα ανισόρροπα και πολύπλοκα - δηλαδή χαοτικά. Επίσης ότι οι αλαζονικές κλασικές επιστήμες καταρρίπτονται (το ωρολογιακό σύμπαν του Νεύτωνα, η έννοια της αντιστρεψιμότητας, η γραμμική συμπεριφορά των συστημάτων) κι ότι ασήμαντες δυνάμεις, που οι επιστήμονες ως τώρα θεωρούσαν αμελητέες, μπορεί να εισχωρήσουν στο εσωτερικό των συστημάτων προκαλώντας, γιγαντιαίες αλλαγές, την ώρα που γιγαντιαίες δυνάμεις μπορεί ν' αφήνουν τα συστήματα ανέπαφα. Για τον Prigogine¹⁴ η φύση με κανένα τρόπο δεν μπορεί να παρασταθεί σαν ένας σωλήνας και ούτε είναι οικοδομημένη έτσι που να ανεβαίνουμε προς τα πάνω από κάποιο χαμηλότερο επίπεδο, αλλά με ανάδραση μεταξύ όλων των επιπέδων. Επομένως, η αντίληψή του για μια επιστημονική περιγραφή της φύσης δεν υποθέτει κανέναν θεμελιώδη τρόπο περιγραφής, καμία ιεραρχία που να ξεκινάει με την δομή του ατόμου και να καταλήγει σε σύνθετους βιολογικούς οργανισμούς. Κάθε επίπεδο περιγραφής προκύπτει από πολλά άλλα και συνεισφέρει στη δημιουργία πολλών άλλων με αποτέλεσμα να χρειαζόμαστε ένα πλήθος επιπέδων που συνδέονται όλα μεταξύ τους, ενώ κανένα τους δεν μπορεί να διεκδικήσει την υπεροχή. Μάλιστα ο Prigogine φτάνει και σε ένα ακόμα πιο προκλητικό συμπέρασμα: πιστεύει πως οι νόμοι

¹³ Ο Ilya Prigogine διεύθυνε το κέντρο μελετών Στατιστικής Μηχανικής και πολύπλοκων συστημάτων στο πανεπιστήμιο Austin του Texas

¹⁴ Ποια κριτική κάνει στη κλασική θεωρία ο Prigogine; (<http://www.physics4u.gr/chaos/prig2.html>)

της φύσης, συμπεριλαμβανομένων των νόμων της φυσικής, δεν είναι δεδομένοι όλοι εξ αρχής ούτε είναι λογικά συνεπαγόμενοι. Εξελίσσονται με τον τρόπο που εξελίσσονται τα διάφορα είδη. Καθώς τα πράγματα γίνονται πιο σύνθετα, λαμβάνουν χώρα διακλαδώσεις και ενισχύσεις και εμφανίζονται νέοι νόμοι. Απόδειξη αυτού είναι η δημιουργικότητα της φύσης. Κάθε επίπεδο οργάνωσης παράγει κάτι θεμελιακά καινούργιο, κάτι που δεν συναντάται στα συστατικά στοιχεία ή «μέρη» του προηγούμενου επιπέδου. Για παράδειγμα, σ' ένα μείγμα υδρογόνου και οξυγόνου δεν υπάρχει νερό. Το νερό έχει νέα ταυτότητα η οποία, στην πράξη, θυσιάζει τα «μέρη» υδρογόνο και οξυγόνο και ο μόνος τρόπος να πάρουμε πίσω τα μέρη είναι να καταστρέψουμε το νερό. Επομένως, υποστηρίζει ο Prigogine, αφού κανένας νόμος ή «μέρος» του σύμπαντος δεν παίζει θεμελιωδέστερο ρόλο από οποιοδήποτε άλλο, η επιστήμη πρέπει να προσπαθεί να ξεχωρίζει και να περιγράφει το δίκτυο των νόμων και των διαδικασιών που ενώνουν όλα τα επίπεδα και όχι να προχωρεί γραμμικά και ιεραρχικά. Η φύση πρέπει να αντιμετωπίζεται ως δυναμική μεταλλασσόμενη υφή και όχι ως μηχανική, ιεραρχική πυραμίδα.

Κατά συνέπεια, οδηγούμαστε σε μία καινούργια θεώρηση του κόσμου με ολόένα και περισσότερους επιστήμονες να οδηγούνται σε παρεμφερή συμπεράσματα, όπως ο Rene Thom και η θεωρία του των καταστροφών, συγγενική με το χάος. Η θεωρία αυτή ψάχνει μια κρυφή μαθηματική αρχή πίσω από κάθε βιολογική αλλαγή, με σκοπό, να εξηγήσει τις ξαφνικές αστάθειες σε σχετικά σταθερά συστήματα. Το γιατί π.χ. συμβαίνουν σεισμοί, ή γιατί αλλάζει το σχήμα ενός σύννεφου. Η λέξη καταστροφή εδώ, δεν είναι κυριολεκτική. Μιλάει για εκείνη την απειροελάχιστη στιγμή όπου όλα «παιζονται» και την οποία ο Thom αναπαριστά με σπείρες και χελιδονοουρές¹⁵. Η θεωρία αυτή ξαναήλθε στην επιφάνεια στη δεκαετία του '60, όταν οι συνεχιστές της θεωρίας αυτής την επέκτειναν σε ό,τι έβλεπαν να κινείται και να παρουσιάζει ταυτόχρονα απότομες αλλαγές. Π.χ. γέννηση των βιολογικών

¹⁵ Προσωπικά παρομοιάζω αυτή τη στιγμή με τη «διστακτικότητα» των σημείων του συνόλου Julia που «αναπαράγοντας συνεχώς την ίδια σκέψη-κανόνα» δυσκολεύονται να «πάρουν θέση» και να διαλέξουν στρατόπεδο: Θα βρεθούν στο εσωτερικό του συνόλου, ισορροπώντας (σε ένα σημείο ή σε μια κίνηση) ή θα εκτιναχθούν στο άπειρο;

μορφών (κύτταρα), μια κοινωνική αλλαγή, μια στάση κρατουμένων, μια πτώση ενός καθεστώτος, την πτώση της Ρωμαϊκής αυτοκρατορίας, ακόμη και ψυχολογικές αρρώστιες (π.χ. εφηβική ανορεξία) που εμφανίζουν καταστροφικές συμπεριφορές με απότομες ψυχολογικές κρίσεις και μεταπτώσεις, π.χ. στην *anorexia nervosa* οι έφηβοι κινούνται ανάμεσα στην δίαιτα και την βουλιμία.

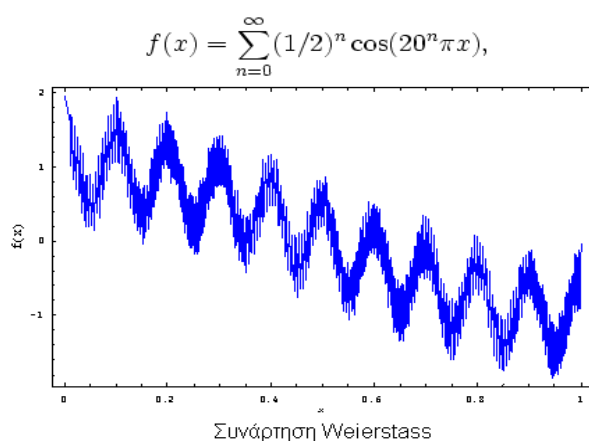
A3. Η εμφάνιση του Χάους στα μαθηματικά - Fractals

Όπως βλέπουμε, η Θεωρία του Χάους είναι μια θεωρία που συνεχώς εξελίσσεται κυριεύοντας όλους τους τομείς της επιστημονικής έρευνας αποδεικνύοντας ότι το παιχνίδι της Φύσης και της Ζωής αναπτύσσεται σε δυναμικά συστήματα - καταστάσεις που εξελίσσονται στο χρόνο κάτω από ένα πλήθος διαφόρων παραγόντων (φυσικών, χημικών, βιολογικών, ελκτικών κ.λ.π.) που αλληλοεπιδρούν. Αυτό έχει σαν φυσικό επακόλουθο ότι ο ελκυστής τους, η κατάσταση δηλ. ισορροπίας τους, να μην είναι πάντα η αναμενόμενη της κλασικής φυσικής (σημείο ισορροπίας ή περιοδική κίνηση) αλλά ένα περίεργο σχήμα που η ύπαρξή του κάνει την πρόβλεψη της τελικής συμπεριφοράς του συστήματος να «παίζεται» από την πλήρη βεβαιότητα (απόλυτος ντετερμινισμός) στην απόλυτη αβεβαιότητα. Οι κανόνες είναι συνήθως γνωστοί και απλοί, όμως οι διαφορετικοί συνδυασμοί που προκύπτουν από αυτήν την αλληλεπίδραση είναι τόσοι πολλοί με αποτέλεσμα να προκύπτει μια θαυμαστή πολυπλοκότητα που είναι αδύνατο να την ελέγξουμε πλήρως.

Και ενώ όλα αυτά συμβαίνουν στη μελέτη των δυναμικών συστημάτων, η επιστήμη των μαθηματικών, ακολουθώντας τον δικό της δρόμο, εφοδιάζει με τα κατάλληλα θεωρητικά εργαλεία τη μελέτη αυτών των παράξενων ελκυστών. Βασική αιτία ήταν η προσπάθεια σύνδεσης της Άλγεβρας με τη Γεωμετρία και η αναγωγή όλων των μαθηματικών σε μία και μοναδική βάση. Τελικά, στις αρχές του 19^{ου} αιώνα η θεωρία των απειροσυνόλων έγινε το κοινό θεμέλιο της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας, του διακριτού και του συνεχούς¹⁶. Η ιδέα του απείρου στους δύο αυτούς μαθηματικούς κλάδους παρουσιάζεται με διαφορετικές μορφές. Στην Άλγεβρα βρίσκεται ενσωματωμένη στα αριθμητικά

¹⁶ Vilenkin, N. Ya. (1997). *Αναζητώντας το άπειρο*. Αθήνα: Κάτοπτρο, σ.117.

απειροσύνολα, ενώ στη Γεωμετρία εμφανίζεται στην απεραντοσύνη του χώρου και, παράλληλα, στη δυνατότητα άπειρης διαίρεσης των σχημάτων. Ο A. Fraenkel (1891-1965), θέτει το ζήτημα ως εξής¹⁷: «Η γεφύρωση του χάσματος ανάμεσα στο διακριτό και το συνεχές, ή ανάμεσα στην αριθμητική και τη γεωμετρία, είναι από τα πιο σημαντικά προβλήματα στα θεμέλια των μαθηματικών, αν όχι το σημαντικότερο..Φυσικά, ο χαρακτήρας του συλλογισμού έχει μεταβληθεί, αλλά, όπως πάντα, οι δυσκολίες οφείλονται στο χάσμα ανάμεσα στο διακριτό και το συνεχές – αυτό το μόνιμο εμπόδιο που διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά, τη φιλοσοφία, ακόμη και τη φυσική.» Στα τέλη του 19^{ου} με αρχές του 20^{ου} αιώνα άρχισε να μπαίνει το θεωρητικό πλαίσιο γεφύρωσης αυτού του χάσματος με την ενασχόληση με



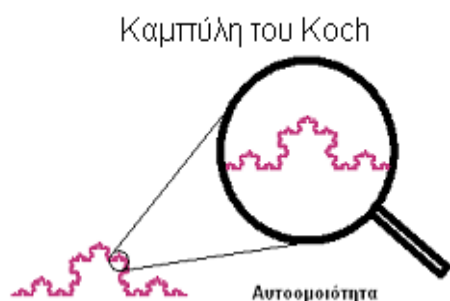
συναρτήσεις και καμπύλες που παρουσίαζαν παράξενες ιδιότητες. Μέχρι τότε οι μαθηματικοί ασχολούνταν μόνο με ομαλές καμπύλες¹⁸. Κανείς μαθηματικός δεν πίστευε ότι μπορούσε να υπάρχει συνεχής καμπύλη αποτελούμενη αποκλειστικά

από “δόντια, γωνίες και αγκάθια”. Γι’ αυτό, όλοι έμειναν άναυδοι όταν πρώτος ο Bolzano και μετά ο Weierstrass (1872) κατασκεύασαν συναρτήσεις με τέτοιες γραφικές παραστάσεις, δηλ. γραφ. παραστάσεις συνεχών συναρτήσεων που δεν έχουν εφαπτομένη σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού τους. Αργότερα και οι Cantor και Koch κατασκεύασαν τέτοιες καμπύλες και μετά ακολούθησαν και άλλοι όπως ο Henry Poincare, Felix Klein, Pierre Fatou, Gaston Julia. Διάσημα τέτοια σύνολα είναι το σύνολο Cantor, το τρίγωνο και το χαλί του Sierpinski, η καμπύλη και η νιφάδα του Koch. Τα νέα αυτά σχήματα, που πολύ αργότερα ονομάστηκαν Φράκταλς, στην αρχή θεωρήθηκαν μαθηματικά τερατουργήματα. Πολλά από αυτά

¹⁷ Vilenkin, N. Ya. ό.π. , σ. 21

¹⁸ Ομαλές χαρακτηρίζονται οι καμπύλες στις οποίες το πλήθος των σημείων τους που δεν δέχονται εφαπτομένη είναι αριθμήσιμο.

κατασκευάζονταν με την εφαρμογή απλών επαναληπτικών κανόνων (ανατροφοδοτούνταν, ακριβώς όπως και τα δυναμικά συστήματα) και εμφάνιζαν αυτοομοιότητα, δηλ. κάθε τμήμα τους ήταν αντίγραφο της αρχικής εικόνας σε σμίκρυνση, με αποτέλεσμα όταν μεγεθύνονταν να μη χάνουν τη δομή τους. Ο εκφραστής της κλασικής ανάλυσης Charles Hermite έγραψε τα παρακάτω λόγια στον φίλο του ολλανδό μαθηματικό Stieltjes¹⁹: *«Αποστρέφομαι με βδελυγμία αυτή την αξιοθρήνητη μάστιγα των συνεχών συναρτήσεων που δεν έχουν παράγωγο σε κανένα σημείο»* (δηλ. καμπύλες που είναι παντού αγκαθωτές και δεν δέχονται εφαπτομένη).



Τρίγωνο του Sierpinski



Όμως ο Hermite παρέβλεπε το γεγονός ότι σε κανένα σημείο της φύσης δεν υπάρχουν τέτοιες καμπύλες και όπως δήλωσε και ο Mandelbrot²⁰ στο αλησμόνητο μανιφέστο του²¹: *«Τα σύννεφα δεν είναι σφαίρες, τα βουνά δεν είναι κώνοι, οι ακρογιαλιές δεν είναι κύκλοι, και ο φλοιός της Γης δεν είναι λείος, ούτε οι κεραυνοί ταξιδεύουν ευθύγραμμα. Γενικότερα, ισχυρίζομαι ότι πολλά πρότυπα της φύσης είναι τόσο ακανόνιστα και αποσπασματικά, ώστε, συγκρινόμενη με την ευκλείδεια-την καθιερωμένη γεωμετρία-η φύση έχει όχι μόνο έναν υψηλότερο βαθμό αλλά και μια εντελώς διαφορετική στάθμη πολυπλοκότητας»*. Τα παραπάνω λοιπόν απειροσύνολα των οδοντωτών καμπύλων είχαν πολύ περισσότερη σχέση με τη φύση από ότι τα κλασικά

¹⁹ Vilenkin, N. Ya. ό.π. ,σ. 137

²⁰ Mandelbrot, B.(1986). *The Fractal geometry of Nature*. San Francisco: W.H. Freeman

²¹ Regis, Ed. (1995). *Ποιος πήρε την καρέκλα του Αϊνστάιν*, Αθήνα: Τροχαλία, σ. 108

σχήματα της γεωμετρίας –τρίγωνα, κύκλοι, σφαίρες, κύλινδροι, που όταν μεγεθύνονται χάνουν τη δομή τους.



Ο Benoit Mandelbrot εικονίζεται μέσα στο διάσημο fractal του.

Ιδρυτής των μαθηματικών της θεωρίας του Χάους, θεωρείται ο Γάλλος μαθηματικός της IBM, Benoit Mandelbrot. Το 1960 άρχισε να ερευνά την αυτοομοιότητα σε εργασίες όπως : «Τι μήκος έχει η ακτή της Βρετανίας; Στατιστική αυτοομοιότητα και κλασματική διάσταση²²». Ο Mandelbrot στηρίχτηκε σε προηγούμενη εργασία του Fry Richardson αλλά έκανε την υπέρβαση να αναγνωρίσει τη σύνδεση με τις σχετικές προηγηθείσες εργασίες των μαθηματικών και να δώσει έτσι νόημα σε αφηρημένες μαθηματικές έννοιες. Ο Άγγλος μετεωρολόγος Richardson (1880 - 1953) είχε ήδη διαπιστώσει ότι δεν μπορούσε να βρει το ακριβές μήκος μιας ακτής αφού, όποτε προσπαθούσε να μετρήσει το μήκος μιας ακτογραμμής πάνω σε διαφορετικούς χάρτες με αυξανόμενη λεπτομέρεια, έβρισκε κάθε τόσο διαφορετικό αποτέλεσμα. Η αιτία ήταν ότι έφτανε κάποια στιγμή που έπρεπε να λάβει υπόψη του μικρούς κολπίσκους, ρυάκια και χερσονήσους, στοιχεία τα οποία δεν λαμβάνονταν υπόψη σε πιο «τραχείς» χάρτες. Η απάντηση που έδωσε ο Mandelbrot στο ερώτημα του Richardson του χάρισε μεγάλη φήμη. Απέδειξε ότι, εφ' όσον μετράμε συνεχώς με ολοένα και μικρότερη μονάδα μέτρησης, το μετρούμενο μήκος μεγαλώνει απεριόριστα. Συμπέρανε λοιπόν ότι οι ακτές είναι ένα παράδειγμα αντικειμένων για τα οποία η απόλυτη μέτρηση του μήκους δεν έχει νόημα και επιπλέον ότι το σχήμα των ακτών με την τόσο πλούσια δομή του είναι σίγουρα κάτι παραπάνω από μονοδιάστατη καμπύλη και κάτι λιγότερο από τμήμα του δισδιάστατου επιπέδου, αφού δεν περιέχει καθόλου επιφάνεια (θετικού εμβαδού)! Έτσι γεννήθηκε η ανάγκη για την επινόηση μιας «διάστασης» διαφορετικής, που να παίρνει υπ' όψη της τη κλίμακα της μέτρησης σαν καθοριστική πια μεταβλητή του μετρούμενου αντικειμένου και

²² Mandelbrot, B. (1967). How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, 156, σ. 636-638
(http://www.math.yale.edu/mandelbrot/web_pdfs/howLongIsTheCoastOfBritain.pdf)

να μπορεί να περιγράψει αντικείμενα των οποίων η διάσταση είναι μεγαλύτερη από εκείνη την οποία βλέπουμε. Αυτή η διαφορετική διάσταση²³ είναι η κλασματική διάσταση ή διάσταση ομοιότητας, ή χωρητικότητας, περισσότερο γνωστή σαν box-διάσταση²⁴ (Box counting or capacity dimension), και με τη βοήθειά της μπόρεσε ο Mandelbrot και μέτρησε την «οδόντωση» της ακτογραμμής. Για τη βρετανική ακτή, ο αριθμός αυτός έβγαλε ότι ήταν ίσος κατά προσέγγιση με 1,58 και για την πιο «άγρια» νορβηγική ακτή ήταν περίπου ίσος με 1,70. Την διάσταση αυτή, ο Mandelbrot την ονόμασε φράκταλ διάσταση και τα αυτοόμοια (self-similar) αντικείμενα, όπως τις ακτογραμμές και τις περίεργες μαθηματικές κατασκευές, αντικείμενα Fractal. Τη λέξη fractal την πήρε από τη λατινική fractus²⁵, που σημαίνει σπασμένος ή μη κανονικός. Ο Mandelbrot συνέχισε τη μελέτη των φράκταλς με την βοήθεια των ηλεκτρονικών υπολογιστών, που ήδη είχαν αρχίσει να εξελίσσονται και έκαναν πολύ εύκολη την επαναληπτική υπολογιστική διαδικασία, καθώς και τη γραφική προσεγγιστική αναπαράσταση αυτών των συνόλων, προσφέροντας το κατάλληλο εργαλείο μελέτης τους. Τελικά εφεύρε την “άλλη” γεωμετρία, η οποία καταργώντας τις καθαρές και συγκεκριμένες γραμμές της ευκλείδειας, μας επιτρέπει να μετρήσουμε την αταξία, και το ακανόνιστο ενός αντικειμένου, τους ελκυστές των δυναμικών συστημάτων. Η γεωμετρία των Fractals, είναι μια νέα γεωμετρία που ενώνει τα μαθηματικά και την τεχνολογία με την πραγματικότητα της φύσης. Αυτή η γεωμετρία μπορεί να αναπαραστήσει τις ατέλειωτες αντιθέσεις και στρεβλώσεις των φυσικών μορφών (της πλαγιάς ενός ηφαιστείου, του φύλλου μιας φτέρης, του πνεύμονα ενός εμβρύου...) στην οθόνη ενός κομπιούτερ με την επανάληψη επ’ άπειρον μιας απλής μαθηματικής πράξης. Το τελικό σχήμα έχει έναν τέτοιο βαθμό αταξίας – τάξης, που παραμένει ίδιος σε κάθε κλίμακά του - στα μέρη και του όλου. Η πιο γνωστή εφαρμογή της κλασματικής γεωμετρίας έγινε για πρώτη φορά από τον ίδιο το Mandelbrot πάνω στα κομπιούτερ της IBM το Μάρτιο του 1980. Είναι το σύνολο Mandelbrot, μια «παιγνιώδης» εικόνα στο κομπιούτερ, που όσο κι αν

²³ Μπούνη, Τ. ό.π., σσ. 67-75

²⁴ Αραχωβίτης, Ι.(2001). *Εισαγωγή στη χαοτική Δυναμική & στα Fractals (Κλασμοειδή)*. Αθήνα: Παπασωτηρίου, σ. 102

²⁵ frangere: σπάζω, δημιουργώ ακανόνιστα θραύσματα.

την μεγεθύνσεις, τόσο πιο σύνθετους και ψυχεδελικούς κόσμους θα ανακαλύψεις, ανεξάντλητους και όμοιους με την αρχική εικόνα. Η εικόνα αυτή λειτούργησε αρχικά σαν κλειδί που απλούστευε τη διαδικασία κατανόησης και ταξινόμησης και άλλων φράκταλ αντικειμένων. Την μελέτη - περιπέτεια αυτή ο Benoît Mandelbrot τη διηγείται στο βιβλίο του *"Les objets fractals"* (Flammarion, Paris, 3rd edition, 1989). Σύμφωνα με αυτό το βιβλίο το κύριο πρόβλημα τότε ήταν να οριστούν κατάλληλα εργαλεία που θα μπορούσαν να περιγράψουν τα σχήματα της φύσης, όπως τις κορυφογραμμές βουνών ή δαντελωτών παραλιών. Ο πρακτικός σκοπός ήταν να κατασκευαστούν πολύπλοκα σχήματα με όσο το δυνατό λιγότερες παραμέτρους. Με αυτό ασχολήθηκε και ο Michael Barnsley, στο βιβλίο του με τον προκλητικό τίτλο, *Fractals Everywhere* (Academic Press, New York, 1988) όπου με μια σειρά πανέμορφων εικόνων απέδειξε με επιτυχία ότι οποιαδήποτε εικόνα μπορεί να αναπαραχθεί κατά προσέγγιση με ένα πολύ μικρό αριθμό επαναληπτικών διαδικασιών (IFS fractals "Iterated Function Systems"). Αυτό το θεωρητικό αποτέλεσμα της δουλειάς του είχε και εμπορικό αντίκτυπο αφού άνοιξε το δρόμο για έναν καινούριο τρόπο συμπίεσης εικόνων σε έναν ΗΥ, γνωστό σαν φράκταλ συμπίεση. Εκτός από την πρακτική εφαρμογή, το έργο των Barnsley και Mandelbrot έχει και μια καθαρά φιλοσοφική σπουδαιότητα αφού αποδεικνύει ότι τα Φράκταλς βρίσκονται σχεδόν παντού προκαλώντας μας να τα εξερευνήσουμε και να μελετήσουμε την οριακή απειροστική δομή τους καθώς και τις διαδικασίες που τα δημιουργούν. Θέτουν εκ νέου ζητήματα μελέτης καμπύλων και επιφανειών όπως επίσης και το πρόβλημα της διάστασης ενός γεωμετρικού σχήματος, ενώνοντας την Ανάλυση-Άλγεβρα με τη Γεωμετρία και προικίζοντάς μας με μια καινούρια γλώσσα για να περιγράψουμε και κατανοήσουμε τη μορφή του χάους. Κάθε εποχή ορίζει ένα πλαίσιο «δραστηριότητας» και αυτό με τη σειρά του, ανάλογα με τις ανάγκες και τα μέσα που διατίθενται, διαμορφώνει αλλά και προκαλεί την εξέλιξη της γνώσης. Έτσι, η γέννηση των Fractals, συνεχίζει την ιστορική πορεία της παραδοσιακής γεωμετρίας, της αποκομμένης από τα άλλα επιστημονικά πεδία και μας στρέφει σε μια νέα γεωμετρία, την γεωμετρία του 21^{ου} αιώνα, η οποία με τις νέες δυνατότητες της τεχνολογίας απελευθερώνει δυναμικά την οπτική

φαντασία και κινητοποιεί εκ νέου την εικασία και την διαίσθηση εφοδιάζοντάς μας με ένα ποιοτικό εργαλείο μελέτης της κίνησης, της φύσης και της ζωής.

B. Δυναμικά συστήματα και Χάος

B1. Δυναμικά συστήματα – Ελκυστές Fractals

Δυναμικό σύστημα²⁶ είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο αλληλεπιδρώντων μεταβλητών, π.χ. φυσικών, χημικών, βιολογικών, οικονομικών κ.λ.π. που εξελίσσονται στο χρόνο σύμφωνα με συγκεκριμένους νόμους ή κανόνες. Η μόνη ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος που μπορεί να είναι συνεχής ή διακριτός. Στην πρώτη περίπτωση η μεταβλητή του χρόνου παίρνει οποιαδήποτε τιμή από το $-\infty$ (απώτερο παρελθόν) έως το $+\infty$ (απώτερο μέλλον). Το δυναμικό σύστημα χαρακτηρίζεται τότε σαν σύστημα συνεχούς χρόνου και απαιτεί για την επίλυσή του διαφορικές εξισώσεις. Στην δεύτερη περίπτωση η μεταβλητή του χρόνου είναι διακριτή, που σημαίνει ότι οι τιμές του χρόνου δεν έχουν συνεχή ροή αλλά είναι απομονωμένες μεταξύ τους, δηλ. οι παρατηρήσεις γίνονται κατά τακτά χρονικά διαστήματα. Στην τελευταία περίπτωση η μαθηματική μελέτη είναι κατά πολύ απλούστερη της πρώτης αλλά χωρίς όμως αυτή η απλή μαθηματική περιγραφή να στερεί από τα προβλήματα που μελετώνται την πλούσια συμπεριφορά των δυναμικών συστημάτων.

Στην κλασική μηχανική, η συμπεριφορά ενός συστήματος που μεταβάλλεται στο χρόνο, ενός δυναμικού συστήματος, μπορεί να περιγραφεί γεωμετρικά ως κίνηση προς μια θέση ισορροπίας που αποτελεί τον ελκυστή του συστήματος. Ας πάρουμε την κίνηση ενός ιδανικού εκκρεμούς που είναι το κλασικό παράδειγμα στο μάθημα της φυσικής. Μετά από μια ώθηση, κινείται μπρος-πίσω μέχρι να ηρεμήσει και πάλι στο κέντρο. Η κεντρική αυτή θέση είναι το σημείο έλξης του συστήματος, ο ελκυστής του. Σε όποια θέση και αν αφήσουμε το εκκρεμές, αυτό θα έλκεται από αυτό το σημείο, θα ισορροπεί σε αυτό το σημείο. Δεν διαθέτουν όλα τα συστήματα ένα τέτοιο σημείο. Στα μαθηματικά της κλασικής μηχανικής ήταν γνωστοί τρεις τύποι ελκυστών:

²⁶ Μπούνη, Τ. ό. π., σ. 158

μεμονωμένα σημεία (που χαρακτηρίζουν σταθερές καταστάσεις, όπως το ιδανικό εκκρεμές που προαναφέρθηκε) , κλειστοί βρόχοι (περιοδικές κινήσεις σε «κύκλους») και δακτύλιοι (συνδυασμοί διαφόρων «κύκλων»). Για να αντιληφτούμε καλύτερα την έννοια του ελκυστή, ας μιλήσουμε για τις παραμέτρους που επηρεάζουν την κίνηση, με άλλα λόγια για τις διαστάσεις της κίνησης. Στο παράδειγμα του ιδανικού εκκρεμούς οι διάφορες παράμετροι της συμπεριφοράς της κίνησής του είναι τέσσερις, οι τρεις του χώρου (x, y, z) και ο χρόνος. Αν όμως το ίδιο το εκκρεμές είναι μια ανεστραμμένη αλατιέρα, τότε το βάρος του θα αλλάζει καθώς θα χύνεται το αλάτι. Αυτή η συνεχώς νέα πληροφορία της τιμής του βάρους επανεισάγεται συνεχώς στο σύστημα επηρεάζοντας την κίνηση και αυτή με τη σειρά της τον ρυθμό απώλειας του βάρους κ.ο.κ. με αποτέλεσμα το βάρος να γίνεται η πέμπτη διάσταση. Αν θεωρήσουμε τον πενταδιάστατο αυτό χώρο σαν σύστημα αναφοράς, τότε η συμπεριφορά του συστήματος θα περιγράφεται σαν μια τροχιά που διαγράφεται σε αυτόν τον ιδεατό χώρο.

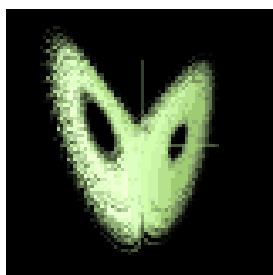
Αν παρατηρήσουμε και μελετήσουμε τα δυναμικά συστήματα που εμφανίζονται στη φύση, θα βρεθούμε μπροστά σε ένα χάος! Μερικά έχουν τόσο πολύπλοκη δόμηση και συμπεριφορά, ώστε να καταλήγουμε να μιλάμε για παράξενους ελκυστές και μάλιστα για "χώρους" έλξης αφού αυτά έλκονται προς παράξενα και πολύπλοκα σχήματα. Γι' αυτό αυτά τα συστήματα ονομάζονται χαοτικά, και παρόλο που συνήθως καθορίζονται από ένα σύνολο απλών κανόνων, λόγω συνθηκών αναδράσεως, ανατροφοδότησης δεδομένων, αναπτύσσονται κατά τρόπο περίπλοκο και ασαφή και χωρίς την χρήση των Η/Υ. θα ήταν αδύνατο να αντιληφτούμε τι συμβαίνει.

Στην θεωρία λοιπόν του Χάους, έχουμε γενίκευση των ελκυστών, των καταστάσεων δηλ. ισορροπίας του συστήματος με αποτέλεσμα τελικά η Θεωρία του Χάους να είναι μια Θεωρία Γενικής Ισορροπίας. Ισορροπία τώρα δεν είναι εξ ορισμού η τάση επιστροφής τού συστήματος σε ένα απλό σημείο, αλλά σε ένα σύνολο σημείων, σύνολο το οποίο καλείται ελκυστής (attractor). Εάν το σύνολο των σημείων ισορροπίας συρρικνωθεί σε ένα μόνο σημείο, τότε έχουμε την κλασική έννοια τού σημείου ισορροπίας (point attractor). Οι ελκυστές δεν είναι μόνο οι αναμενόμενοι, αυτοί της κλασικής μηχανικής, αλλά και διάφορες καμπύλες, στερεά ή και μια ολόκληρη επιφάνεια χωρίς

συγκεκριμένη διάταξη που λέγεται μάλιστα παράξενος ελκυστής (strange attractor). Η ύπαρξη αυτού του παράξενου ελκυστή προκαλεί το απρόβλεπτο της συμπεριφοράς του συστήματος²⁷. Αυτή η νέα τάξη παράξενων ελκυστών, προς τους οποίους η δυναμική είναι χαοτική, δηλ. απρόβλεπτη, ανακαλύφθηκε κατά την δεκαετία του 1960 από τον Αμερικανό μαθηματικό Stephen Smale. Αργότερα διαπιστώθηκε ότι αυτοί οι ελκυστές έχουν λεπτομερή αλλά και την ίδια δομή σε όλες τις κλίμακες μεγέθυνσης (αυτοομοιότητα). Εμφανίζονται λοιπόν πάλι τα Fractals όχι πια σαν ένα μαθηματικό κατασκευάσμα αλλά σαν ένα σύνολο έλξης των χαοτικών τροχιών ενός δυναμικού συστήματος. Η πολυπλοκότητά τους που διέπεται από την ιδιότητα της αυτοομοιότητας υπό αλλαγή κλίμακας παντρεύει μόνιμα τον χώρο και το χρόνο συνδέοντάς τους "γραφικά" στην κλίνη της οθόνης του Η/Υ. Σήμερα ξέρουμε ότι ο παράξενος ελκυστής του Lorenz που παρουσίαζε μια τόσο σύνθετη δομή κάτω από συνεχείς μεγεθύνσεις δίνοντας την εντύπωση ότι εκτείνεται πέραν των 2 διαστάσεων, χωρίς όμως και να γεμίζει ένα τμήμα του 3-διάστατου χώρου, είναι ένα Fractal.

Η εύρεση των ελκυστών ενός δυναμικού συστήματος είναι σημαντική γιατί είναι η κατάσταση στην οποία τελικά θα ισορροπήσει το σύστημα, επομένως η εύρεσή τους ισοδυναμεί με πρόβλεψη της τελικής κατάληξης. Καταλαβαίνουμε την σπουδαιότητα αυτής της εύρεσης αν σκεφτούμε ότι δυναμικά συστήματα είναι η κίνηση των πλανητών, το μετεωρολογικό σύστημα, οι αυξομειώσεις πληθυσμού, η ροή υγρού και γενικά οποιοδήποτε σύστημα μεταβάλλεται στο χρόνο. Βρίσκοντας λοιπόν τον ελκυστή ενός συστήματος μπορούμε να απαντήσουμε σε ερωτήσεις της μορφής: Θα υπάρξει αύξηση τιμών στο χρηματιστήριο; Θα βρέχει αύριο; Τι θα γίνει αν ενώσουμε αυτές τις χημικές ουσίες;

²⁷ Σε μια τέτοια περίπτωση, μεγάλη βοήθεια στην μελέτη της συμπεριφοράς του συστήματος προσφέρει η Θεωρία των Διχαλοδρομήσεων (Bifurcation Theory), σύμφωνα με την οποία όταν η αριθμητική τιμή μιας παραμέτρου (που ονομάζεται «αργή μεταβλητή») υπερβεί ένα όριο, τότε εμφανίζονται πολλαπλές λύσεις με τάσεις συνεχούς διακλάδωσης των λαμβανόμενων αριθμητικών αποτελεσμάτων.



Ο Ελκυστής του Lorenz. Αυτή η εικόνα έγινε το σύμβολο του Χάους στα πρώτα χρόνια. Αποκαλύπτει τη μικροσκοπική δομή που ήταν κρυμμένη μέσα σε μια άτακτη ροή δεδομένων. Η απεικόνιση αυτή εμφανίζει ένα είδος άπειρης πολυπλοκότητας και μοιάζει σαν δύο φτερά μιας πεταλούδας ή σαν ένα είδος διπλής έλικας. Το σχήμα φανερώνει μια καθαρή αταξία, αλλά και ένα νέο είδος τάξης.

B2. Δυναμικά συστήματα - Επαναληπτικές συναρτήσεις

Η μελέτη του χάους προϋποθέτει τη χρήση της “γλώσσας” των μαθηματικών. Στη μαθηματική γλώσσα η εύρεση των ελκυστών των διακριτών δυναμικών συστημάτων της φυσικής, μεταφράζεται σε εύρεση ορίου ακολουθιών. Το Χάος δεν σχετίζεται κατ’ ανάγκη με περίπλοκα συστήματα και αφηρημένες έννοιες. Μπορούμε να βρούμε χαοτική συμπεριφορά και σε απλά συστήματα και έτσι να μελετήσουμε το απροσδιόριστο στη πιο βασική του μορφή. Ακόμα και στις πιο απλές εξισώσεις δευτέρου βαθμού έχουμε χάος, αρκεί να τις χειριστούμε σαν δυναμικά συστήματα. Αυτό το επιτυγχάνουμε αν τις χειριστούμε σαν επαναληπτικές συναρτήσεις, δηλ. αν έχουμε κάθε τόσο ανατροφοδότηση της τιμής της από το αμέσως προηγούμενο αποτέλεσμα (συνεχής σύνθεση της συνάρτησης με τον εαυτό της). Αν πάρουμε λοιπόν μια τυχαία συνάρτηση, την $\psi = \phi(x)$, μια αρχική τιμή x_0 και βρούμε τις τιμές της:

$\Psi_1 = \phi(x_0), \quad \Psi_2 = \phi(\Psi_1) = \phi(\phi(x_0)), \quad \Psi_3 = \phi(\Psi_2) = \phi(\phi(\phi(x_0))), \quad \Psi_4 = \phi(\Psi_3) = \phi(\phi(\phi(\phi(x_0))))$,...

προκύπτει η ακολουθία $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \dots$, που ονομάζεται τροχιά του x_0 . Αυτή η τροχιά, για ορισμένες μορφές του $\phi(x)$ και για ορισμένα x_0 , είναι πολλές φορές χαοτική. Χαοτικές^{28 29} ονομάζονται οι τροχιές που δεν είναι

²⁸ Μακριδής, Γ. (1993). Fractals σαν εργαλείο δημιουργίας αλλά και εκτίμησης της δύναμης των μαθηματικών από τους μαθητές. *Πρακτικά 10^{ου} Πανελλήνιου συνεδρίου της ΕΜΕ*, σ. 37.

περιοδικές (δεν τείνουν σε περιοδική ακολουθία), και επίσης δεν τείνουν σε μια σταθερή τιμή (πεπερασμένη τιμή ή άπειρο). Για μια συγκεκριμένη συνάρτηση, το σύνολο των x_0 που μας δίνει χαοτική τροχιά ονομάζεται σύνολο JULIA αυτής της συνάρτησης. Η ονομασία αυτή οφείλεται στο Γάλλο μαθηματικό Gaston Julia, που ήταν από τους πρώτους που διατύπωσε πολλές ιδιότητες αυτών των συνόλων το 1920.

Γ. Μελέτη των FRACTALS

Γ1. Εισαγωγή

«Ο επιστήμονας δεν μελετάει τη φύση επειδή είναι χρήσιμη. Την μελετάει επειδή τον ενθουσιάζει και τον ενθουσιάζει επειδή είναι όμορφη»

H. Poincare

Η γεωμετρία Φράκταλ υπακούει σε μια μαθηματική Δυναμική, της κίνησης, της αδιάκοπης ροής, όπως την αντιλαμβανόταν ο προσωκρατικός φιλόσοφος

Ηράκλειτος

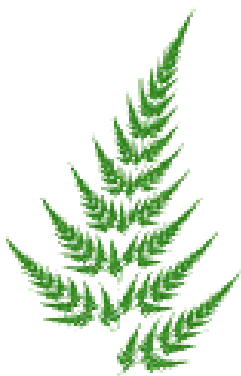
Η μελέτη των φράκταλς υπόσχεται να παίξει σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη των επιστημών, τον 21ο αιώνα. Όπως είδαμε τα Φράκταλς και το Χάος είναι όψεις του ίδιου νομίσματος. Το Χάος προκύπτει από την επαναληπτική διαδικασία ανατροφοδότησης των δεδομένων στην πάροδο του χρόνου, δηλ. από χρονική πολυπλοκότητα ενώ τα Φράκταλς από χωρική πολυπλοκότητα αφού είναι ή το αποτέλεσμα της γραφικής αποτύπωσης στο χώρο του Χάους ή «περίεργων» μαθηματικών κατασκευασμάτων ή ακόμα και φυσικών αντικειμένων. Όμως έχουν ήδη αποκτήσει πολλούς θαυμαστές και έξω από τον επιστημονικό κόσμο γιατί στηρίζονται σε μια γεωμετρική διαίσθηση, που όλοι λίγο - πολύ διαθέτουμε και επιπλέον επειδή γοητεύουν την αισθητική μας με ελκυστικές εικόνες. Τα φράκταλς είναι περίπλοκα και ιδιόμορφα γεωμετρικά σχήματα, που υπήρχαν πάντοτε γύρω μας και δεν τα είχαμε αντιληφθεί τόσο καιρό επειδή βρίσκονται πάνω στο «σύνоро» ανάμεσα σ' έναν ιδεατά απλό κόσμο και στην πολύπλοκη πραγματικότητα που μας περιβάλλει. Όπως

²⁹ Μακρίδης, Γ. (1994). Κατασκευή μορφοκλάσματος (Fractal) με τον Ηλεκτρονικό Υπολογιστή. *Πρακτικά 11^ο Πανελληνίου συνεδρίου της ΕΜΕ*, σ. 117.

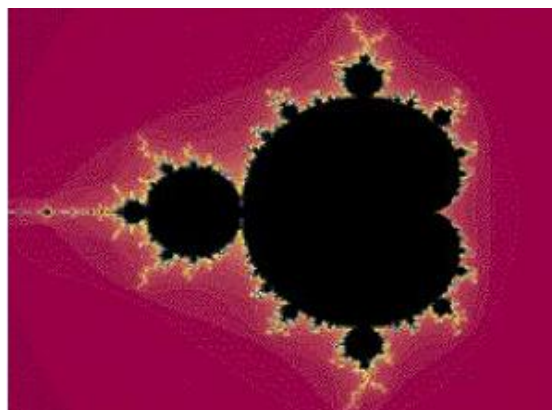
είδαμε, πρώτη η επιστήμη των μαθηματικών μας εξοικείωσε με τα μυστικά της πολυπλοκότητας. Διάσημοι μαθηματικοί³⁰ παρουσίασαν σχήματα που επαναλαμβάνουν τη δομή τους σε ολοένα μικρότερες κλίμακες εφαρμόζοντας επαναληπτικές διαδικασίες χαρακτηριστικές των δυναμικών συστημάτων. Τα δημιουργήματά τους που εμφανίζουν συνεχή κλιμάκωση απέδειξαν ότι η πολυπλοκότητα ενός σύνθετου αντικειμένου μπορεί να ανιχνευθεί μέσω μιας διαδικασίας σμικρύνσεων (ή μεγεθύνσεων) κατά μια συγκεκριμένη κλίμακα. Τα μαθηματικά λοιπόν των φράκταλς, σε συνδυασμό με την εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών μας εφοδίασαν με έναν πανίσχυρο μεγεθυντικό φακό που πάντρεψε τα μαθηματικά με τη φύση και μας βοήθησε να μελετήσουμε τα πάντα, γύρω μας και μέσα μας! Πίσω από την πολυπλοκότητα της φύσης κρύβονται κάποια πρότυπα που επαναλαμβάνονται σε διαφορετικές κλίμακες, μέσω συγκεκριμένων αλγορίθμων, συνθέτοντας έτσι την ολική εικόνα της. Ποιοι είναι όμως αυτοί οι αλγόριθμοι; Ποιους κανόνες επανάληψης εφαρμόζει η φύση και τι κλίμακες χρησιμοποιεί; Αυτό δεν είναι πάντα εύκολο να απαντηθεί. Το σίγουρο είναι ότι πολλά πράγματα γύρω μας εμφανίζουν αυτοομοιότητα υπό αλλαγή κλίμακας: Από τις διακλαδώσεις των δένδρων και των βρογχικών σωλήνων του πνεύμονα μέχρι τις ανώμαλες επιφάνειες πετρωμάτων και από τα σύννεφα και τις ακτές μιας παραλίας μέχρι το σφουγγάρι και το κουνουπίδι. Αν παρατηρήσουμε τη γνωστή μας φτέρη και συγκρίνουμε τον μεγάλο μίσχο με τα αμέσως μικρότερα κλαδιά, αυτά με τα ακόμη μικρότερα, κ.ο.κ. θα δούμε ότι η εικόνα χαρακτηρίζεται από αυτήν την ιδιότητα της αυτοομοιότητας υπό αλλαγή κλίμακας. Ακόμα και οι παραλίες μας είναι φράκταλ. Αν σκεφτούμε πόσο πολυσχιδείς είναι, με τόσες χερσονήσους και κολπίσκους, θα καταλήξουμε σε παρόμοιο συμπέρασμα με αυτό του Richardson, δηλ. ότι έχουν άπειρο μήκος και αν θέλαμε να περπατήσουμε μια παραλία ολόκληρη, ο περίπατός μας δεν θα τελείωνε ποτέ! Βέβαια αυτό δεν είναι άμεσα αντιληπτό αν το εξετάσουμε με κλίμακα το βήμα μας. Αν όμως αλλάξουμε κλίμακα (όπως έκανε ο Richardson με τους χάρτες) και σκεφτούμε ότι την περπατάει ένα μυρμήγκι ή ακόμα ένα μικρόβιο, τότε πράγματι θα

³⁰ Georg Cantor (1845-1918) και Felix Hausdorff (1868-1942)

αντιληφτούμε ότι κάθε βοτσαλάκι με την λεία ή όχι επιφάνειά του παίζει ρόλο. Οδηγούμαστε λοιπόν και εμείς διαισθητικά στο συμπέρασμα του Mandelbrot ότι το μήκος είναι εξάρτηση της κλίμακας, δηλαδή της ακρίβειας, στην οποία γίνεται η μέτρηση³¹ και όσο πιο ακριβής γίνεται κάποιος στη μέτρηση τόσο βρίσκεται μπροστά σε νέα λεπτομέρεια, λαμβάνοντας έτσι άπειρο μήκος το οποίο όμως πρέπει με έναν κάποιο τρόπο να μετρηθεί.



Η «φτέρη του Barnsley». Είναι φανερή η αυτο-ομοιότητα μεταξύ του μεγάλου μίσχου και των μικρότερων που βρίσκονται επάνω του.



Η μεγάλη «νήσος του Mandelbrot», με μικρές κυκλικές χερσονήσους επάνω της, που φέρουν ακόμα μικρότερες γύρω τους, σε μια αλληλουχία που δεν τελειώνει ποτέ. Η ιδιαίτερα πολύπλοκη «παραλία» (μεταξύ του μαύρου και του κόκκινου) έχει κλασματική διάσταση μεταξύ 1 και 2, αφού είναι κάτι παραπάνω από καμπύλη και κάτι λιγότερο από επιφάνεια.

³¹ Αυτό όπως είδαμε προέκυψε και στο επίπεδο της κβαντικής φυσικής, όπου ο Bohr τόνισε ότι η διαδικασία μέτρησης καθορίζεται από τον επιστήμονα που εκτελεί την μέτρηση και συνεπώς το αποτέλεσμα της μέτρησης, άρα και το μετρούμενο μέγεθος, δεν είναι ένα «πράγμα» που υπάρχει αντικειμενικά και ανεξάρτητα από τον παρατηρητή, αλλά στον υπολογισμό του καθοριστικό ρόλο παίζει ο παρατηρητής.

Γ2. Η φύση των Fractals

Ο παραπάνω τίτλος μας οδηγεί στο λανθασμένο συμπέρασμα ότι αν μελετήσουμε ένα φράκταλ, τότε τα έχουμε μελετήσει όλα. Αυτό όμως δεν ισχύει γιατί τα φράκταλς προέρχονται από διάφορα μέρη: μερικά έχουν τις ρίζες τους στο Χάος (είναι ελκυστές δυναμικών χαοτικών συστημάτων), άλλα όπως η νιφάδα του Koch έχουν προέλθει κατασκευαστικά από την έρευνα πάνω στα Ευκλείδεια σχήματα και άλλα έχουν αναπτυχθεί στο χώρο της γεωμετρίας κάτω από τη φιλοσοφική πίεση στα μαθηματικά να οριστεί το άπειρο όχι μόνο σαν μια δυναμική διαδικασία παραγωγής αριθμών οσωνδήποτε μεγάλων, αλλά και σαν μια υπαρκτή ποσότητα. Αυτό απασχόλησε πολύ τον Cantor αρχικά ³² γι' αυτό και το πρώτο Φράκταλ, ονομαζόμενο «σκόνη του Cantor» το δημιούργησε αυτός, το 1872.

Όπως προλέχτηκε λοιπόν κάθε ένα Φράκταλ είναι διαφορετικό από τα άλλα, αλλά όλα έχουν κάτι κοινό: έναν αλγόριθμο κατασκευής (συνεχή επανάληψη μιας διαδικασίας) και την αυτοομοιότητα. Κάθε ένα Φράκταλ έχει τον δικό του αλγόριθμο κατασκευής, η γεωμετρική όμως έννοια της αυτοομοιότητας είναι κοινή για όλα τα Φράκταλς.

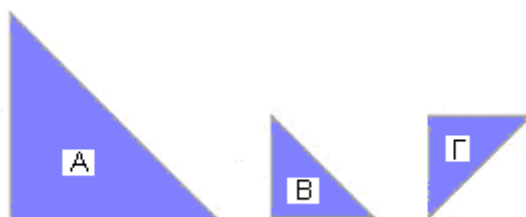
Γ2.1. Αυτοομοιότητα

Γ2.1.1. Ομοιότητα και λόγος ομοιότητας –Κλίμακα

Όταν οι άνθρωποι λένε ότι : «ο μπαμπάς και ο γιος μοιάζουν ή είναι ίδιοι», προφανώς φαντάζονται ότι όταν ο γιος μεγαλώσει και φτάσει το μέγεθος του πατέρα του, θα είναι δύο αντίγραφα. Η ιδέα αυτή του «ίδιου-όμοιου» που συναντάμε στη γλώσσα μας, μας μεταφέρει στην έννοια της ομοιότητας των μαθηματικών. Λέμε ότι δύο αντικείμενα είναι όμοια όταν το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου. Στην ειδική περίπτωση που εξετάζουμε την ομοιότητα δύο τριγώνων, ισχύει ότι: *Δύο τρίγωνα είναι όμοια όταν οι πλευρές τους είναι*

³² αλλά και τον Godel αφού αυτή η μελέτη του «προβλήματος του συνεχούς» ήταν η κύρια εργασία του στο ΙΠΣ και ο ίδιος ο Godel την περιέγραφε ως εξής: « *το θέμα είναι το πρόβλημα του συνεχούς του Cantor : Πόσα σημεία υπάρχουν πάνω σε μια ευθεία γραμμή στον Ευκλείδειο χώρο;*» στο Regis, Ed. (1995). *Ποιος πήρε την καρέκλα του Αϊνστάιν*, Αθήνα: Τροχαλία, σ. 76

ανάλογες και οι αντίστοιχες γωνίες τους ίσες. Ο σταθερός αυτός λόγος των αντίστοιχων πλευρών λέγεται λόγος ομοιότητας και είναι η κλίμακα μεγέθυνσης ή σμίκρυνσης των τριγώνων. Για παράδειγμα, στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα Α και Β είναι όμοια γιατί αν οι πλευρές του Α υποδιπλασιαστούν ή οι πλευρές του Β διπλασιαστούν, τότε τα τρίγωνα Α και Β θα αποκτήσουν επιπλέον και ίσο μέγεθος, θα γίνουν δύο ίσα τρίγωνα.



Η λέξη υποδιπλασιαστούν ή διπλασιαστούν, δηλώνει ότι ο λόγος ομοιότητας είναι $\frac{1}{2}$ ή 2, (αν πηγαίνω δηλ από το Α στο Β ή από το Β στο Α). Τα δύο τρίγωνα Α και Β θα μπορούσαν να προέλθουν το ένα από το άλλο και με τη βοήθεια ενός φωτοτυπικού μηχανήματος. Επίσης και το τρίγωνο Γ είναι όμοιο με το Α, μόνο που πρέπει να περιστραφεί για να φανεί η ομοιότητα.

Γ2.1.2. Αυτοομοιότητα σχήματος

Ένα σχήμα είναι αυτοόμοιο³³ αν αποτελείται από άλλα σχήματα όμοια προς αυτό (αντίγραφα του αρχικού). Το σχήμα δεξιά είναι αυτοόμοιο αφού είναι ένα τραπέζιο που σχηματίζεται από άλλα



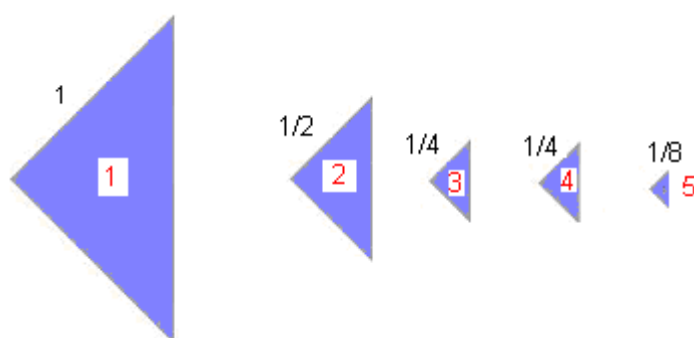
τραπέζια, όμοια με το αρχικό. Στην παρακάτω εικόνα βρίσκονται άλλα πέντε αυτοόμοια σχήματα.



³³ Cynthia Lanisus' Fractals Unit Self-Similarity.htm

Γ2.1.3. Αυτοομοιότητα ακολουθίας σχημάτων

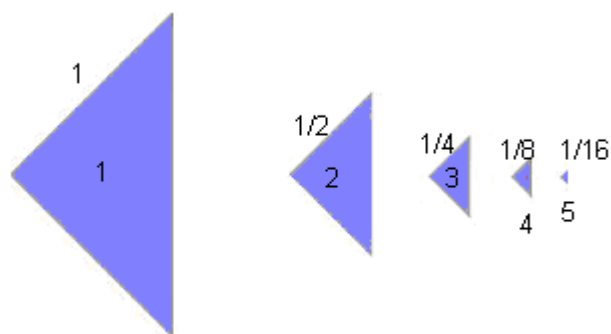
Αν παρατηρήσουμε το παρακάτω σχήμα θα δούμε ότι έχουμε πέντε όμοια τρίγωνα, αριθμημένα από το 1 έως το 5. Όπως κοιτάζουμε από αριστερά προς τα δεξιά, τα γειτονικά τρίγωνα σμικρύνονται κατά σταθερό συντελεστή (λόγο ομοιότητας), ίσο με $\frac{1}{2}$, εκτός από το 3^ο τρίγωνο που είναι ίσο με το 4^ο. Το 4^ο δηλ. τρίγωνο δεν ακολουθεί την ομοιόμορφη συνεχή σμίκρυνση των άλλων τριγώνων .



Γειτονικά τρίγωνα	1 → 2	2 → 3	3 → 4	4 → 5
Λόγος ομοιότητας	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$

Αν παρατηρήσουμε τώρα το παρακάτω σχήμα α. θα δούμε ότι έχουμε πάλι πέντε όμοια τρίγωνα, αριθμημένα από το 1 έως το 5. Όπως κοιτάζουμε από αριστερά προς τα δεξιά βλέπουμε ότι τα γειτονικά τρίγωνα σμικρύνονται όλα κατά σταθερό συντελεστή (λόγο ομοιότητας), ίσο με $\frac{1}{2}$, αποτελώντας μια ακολουθία τριγώνων που λέγονται αυτοόμοια. Επομένως:

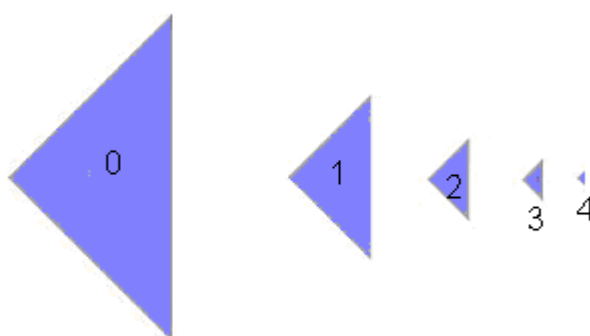
Αυτοόμοια λέγεται μια ακολουθία (άπειρων) ομοίων αντικειμένων που όλα κλιμακωτά αυξάνονται ή μειώνονται κατά σταθερό συντελεστή.



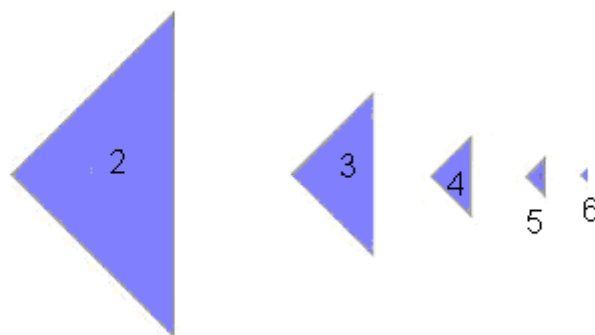
Σχήμα α.

Γειτονικά τρίγωνα	$1 \rightarrow 2$	$2 \rightarrow 3$	$3 \rightarrow 4$	$4 \rightarrow 5$
Λόγος ομοιότητας	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$

Τα αυτοόμοια αντικείμενα δεν έχουν ούτε αρχή ούτε τέλος, σχηματίζοντας μια ατελείωτη ακολουθία ομοίων αντικειμένων. Στο παραπάνω παράδειγμα, στα δεξιά του 5^{ου} τριγώνου βρίσκεται το 6^ο τρίγωνο που είναι το $1/32$ του αρχικού, κ.ο.κ. Επίσης, στα αριστερά του 1^{ου} τριγώνου βρίσκεται το τρίγωνο 0 με πλευρά 2, πιο αριστερά αυτό με πλευρά 4 κ.ο.κ. Μετακινούμενοι από δεξιά προς τα αριστερά καταλήγουμε σε όλο και μεγαλύτερα τρίγωνα με συντελεστή μεγέθυνσης 2.



Σχήμα β.



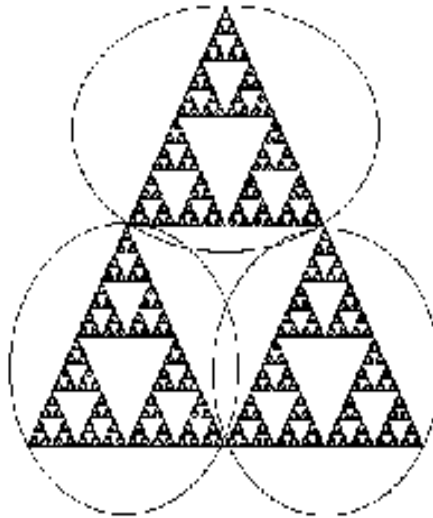
σχήμα γ.

Σε αυτοόμοια αντικείμενα, μπορούμε στην πράξη να κινηθούμε πάνω ή κάτω στην κλίμακα μεγέθους και να βλέπουμε πάντα την ίδια ακολουθία αντικειμένων. Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα του σχήματος α. είναι ακριβώς ίδια με τα τρίγωνα των σχημάτων β. και γ. τα οποία δημιουργήθηκαν με 50% σμίκρυνση ($\lambda = 0,5$) και 200% ($\lambda = 2$) μεγέθυνση αντίστοιχα του σχήματος α.

Γ2.2. Αυτοομοότητα και Φράκταλς

Στα φράκταλς η προηγούμενη ακολουθία αντικειμένων (B.2) βρίσκεται εσώκλειστη στο σχήμα τους (B.1). Είναι επομένως τα φράκταλς αυτοόμοια αντικείμενα που όμως αποτελούνται από μια άπειρη ακολουθία ομοίων αντικειμένων που βρίσκονται σε συνεχή κλιμάκωση. Η κλιμάκωση μεγέθους προς τα πάνω (αύξηση) σταματά στο ίδιο το αντικείμενο-φράκταλ, ενώ προς τα κάτω συνεχίζεται απεριορίστα.

Αν παρατηρήσουμε το τρίγωνο του Sierpinski στην παρακάτω εικόνα θα δούμε ότι αυτό αποτελείται από 3 άλλα τρίγωνα όμοια με το αρχικό και λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$ (προς το αρχικό). Αν κοιτάξουμε βαθύτερα στο σχήμα θα βρούμε 9 τρίγωνα όμοια με το αρχικό και λόγο ομοιότητας προς το αρχικό $\frac{1}{4}$, 27 τρίγωνα όμοια με το αρχικό και λόγο ομοιότητας $\frac{1}{8}$ κ.ο.κ



Το παραπάνω τρίγωνο του Sierpinski μας κάνει να αντιληφτούμε καλύτερα την έννοια της αυτοομοιότητας σε ένα Φράκταλ, αφού :

Ένα φράκταλ



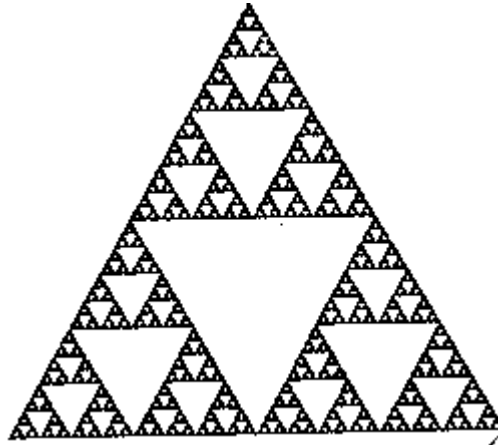
παραμένει το ίδιο



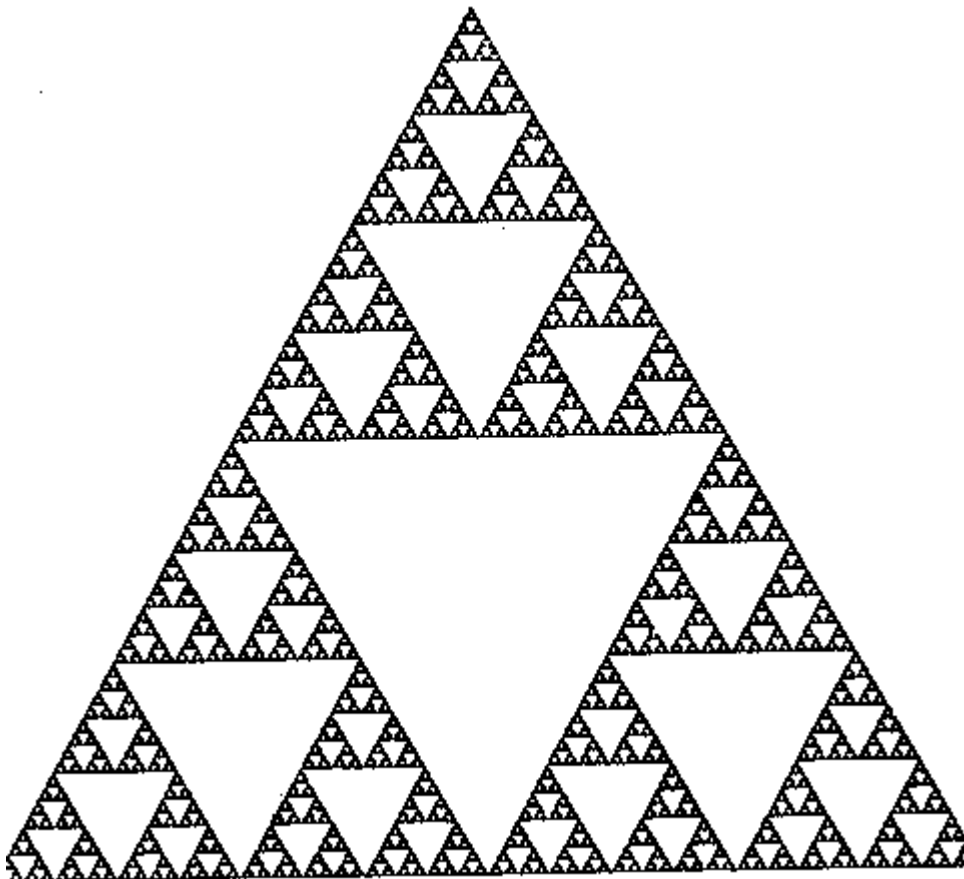
σε όλες τις διαβαθμίσεις



της κλίμακας



Είναι δηλ. ένα αυτοόμοιο αντικείμενο που εσωτερικά αναπαράγεται επ' άπειρο με συνεχή κλιμάκωση του μεγέθους του.

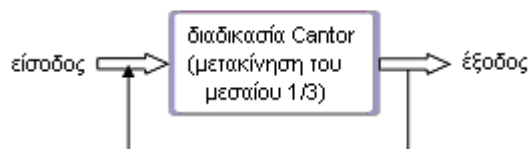


Γ3. Διάσημα φράκταλς

Γ3.1. Cantor Set, ή σύνολο του Cantor ή σκόνη του Cantor

Το πιθανότερο είναι ότι αυτό είναι το πρώτο μαθηματικό φράκταλ αφού δημιουργήθηκε από τον Georg Cantor, το 1872. Είναι ένα πολύ απλό φράκταλ, κατασκευάζεται από έναν απλό επαναληπτικό κανόνα και εμφανίζει αυτοομοιότητα όπως όλα τα φράκταλς. Αυτή η επαναληπτική διαδικασία είναι όπως είπαμε χαρακτηριστικό των δυναμικών συστημάτων αλλά αποτελεί και μια από τις αποτελεσματικότερες τεχνικές του προγραμματισμού των Η.Υ. όπου αποκαλείται βρόχος επαναλήψεων.

Για να κατασκευάσουμε αυτό το σύνολο, αρχίζουμε με ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους π.χ. μιας μονάδας. Το πρώτο βήμα είναι να το χωρίσουμε σε τρία ίσα μέρη και να απαλείψουμε το μεσαίο τμήμα. Στο δεύτερο βήμα επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στο καθένα από τα τμήματα που απόμειναν, δεξιά και αριστερά. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνέχεια και περιγράφεται σύντομα με το παρακάτω σχεδιάγραμμα:



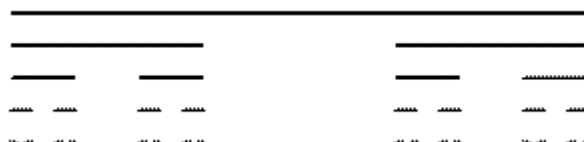
Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να περιγραφεί και με τα εξής βήματα που βοηθούν στην κατασκευή του αντίστοιχου προγράμματος στον υπολογιστή:

Άρχισε με το σύνολο $[0,1]$.

Χώρισε τα υπάρχοντα τμήματα σε τρίτα.

Αφαίρεσε το μεσαίο ένα τρίτο.

Πήγαινε στο βήμα #2.



Ο αριθμός των ευθ. τμημάτων που παράγονται με αυτή τη διαδικασία είναι άπειρος. Υποθέτοντας ότι το αρχικό ευθ. τμήμα έχει μήκος 1, θα βρούμε το μήκος αυτού που απέμεινε μετά από άπειρα βήματα: Το μήκος του τμήματος

που απαλείφουμε στο πρώτο βήμα της διαδικασίας είναι $1/3$. Απομένουν δυο τμήματα, το δεξιό και το αριστερό. Από αυτά, στο δεύτερο βήμα, πάλι απαλείφουμε το $1/3$ του μήκους τους. Το απαλειφόμενο τότε τμήμα του αρχικού μήκους είναι $2/9$, από $1/9$ για κάθε κομμάτι. Στο ίδιο πνεύμα, στο επόμενο βήμα απαλείφουμε συνολικά μήκος ίσο με $4/27$, εφόσον καθένα από τα τέσσερα κομμάτια του συνόλου χάνει $1/27$ του ολόκληρου αρχικού μήκους. Και τα λοιπά, ως το άπειρο. Τελικά, πόσο μήκος απαλείψαμε και πόσο απόμεινε από το αρχικό σύνολο;

Μπορούμε να βρούμε πόσο απαλείψαμε. Αντιστοιχεί στο άθροισμα³⁴:

$$S = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \dots =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + \dots = \frac{1/3}{1 - 2/3} = 1$$

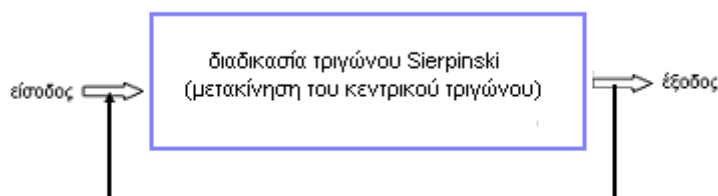
Επομένως το μέρος που απαλείφθηκε είναι ίσο με το συνολικό μήκος του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος και επομένως αυτό που παραμένει τελικά έχει μήκος 0. Το σύνολο Cantor λοιπόν είναι ένα αξιοσημείωτο σύνολο άπειρων διακεκριμένων σημείων (ή άπειρων πραγματικών αριθμών αν παίρναμε το διάστημα $[0,1]$) που γι' αυτό το λόγο αποκαλείται και σκόνη του Cantor. Ίσως με την πρώτη ματιά βγάλει κάποιος το λανθασμένο συμπέρασμα ότι δεν έχει μείνει απολύτως τίποτε. Όμως τα ευθ. τμήματα που μετακινούμε σε κάθε βήμα είναι ανοικτά διαστήματα, που σημαίνει ότι σε κάθε στάδιο μετακινούμε όλα τα σημεία μεταξύ του $1/3$ και του $2/3$ και αφήνουμε τα άκρα. Αν προσέξουμε την κατασκευή, θα δούμε ότι αυτά τα άκρα που αφήνουμε πίσω μας δεν μετακινούνται ποτέ. Άρα το σύνολο Cantor δεν είναι το κενό σύνολο αφού περιέχει σίγουρα τα σημεία $0, 1, 1/3, 2/3, 1/9, 2/9, 7/9, 8/9, 1/27$, κ.ο.κ.³⁵

³⁴ Έχουμε άθροισμα απείρων όρων απολύτως φθίνουσας γεωμετρικής προόδου.

³⁵ Και μάλιστα ο Cantor απέδειξε ότι το τελικό σύνολο των διακεκριμένων σημείων είναι ίσο με το σύνολο σημείων του αρχικού ευθυγράμμου τμήματος!

Γ3.2. Τρίγωνο του Sierpinski ή Sierpinski Gasket, (Πλέγμα του Sierpinski).

Για να κατασκευάσουμε αυτό το σύνολο, αρχίζουμε με ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς π.χ. μιας μονάδας. Το πρώτο βήμα είναι να βρούμε τα μέσα των πλευρών του και να τα ενώσουμε. Κατόπιν αφαιρούμε το κεντρικό τρίγωνο που σχηματίστηκε. Στο δεύτερο βήμα επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στο καθένα από τα τρία τρίγωνα που σχηματίστηκαν. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνέχεια και περιγράφεται σύντομα με το παρακάτω σχεδιάγραμμα:



Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να περιγραφεί και με τα εξής βήματα που βοηθούν στην κατασκευή του αντίστοιχου προγράμματος στον υπολογιστή:

1. Άρχισε με το ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1
2. Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο βρες τα μέσα των πλευρών του και ένωσέ τα.
3. Αφαίρεσε το μεσαίο τρίγωνο.

Πήγαινε στο βήμα #2.



Αφαιρώντας συνεχώς το κεντρικό τρίγωνο, παίρνουμε ένα σύνολο στο επίπεδο, το οποίο περιέχει τις πλευρές όλων των τριγώνων που έχουμε αφαιρέσει. Άραγε αυτό το σύνολο έχει εμβαδόν; Παρατηρούμε ότι ισχύει:

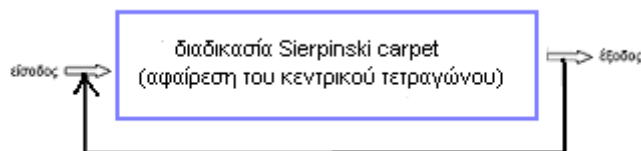
Βήμα No.	1	2	3	4	...	n	...
							

Μέρος του εμβαδού που απομένει		$\frac{9}{16} = (\frac{3}{4})^2$	$\frac{27}{64} = (\frac{3}{4})^3$	$\frac{81}{256} = (\frac{3}{4})^4$		$(\frac{3}{4})^n$	
--------------------------------------	--	----------------------------------	-----------------------------------	------------------------------------	-------------	-------------------	--------------

Το εμβαδό που απομένει είναι το όριο της ακολουθίας $(\frac{3}{4})^n$ που είναι 0, άρα δεν έχει απομείνει καθόλου εμβαδόν. Το σύνολο λοιπόν αυτό δεν είναι μια επιφάνεια, και βέβαια δεν είναι ένα σύνολο σημείων αφού περιέχει πλευρές τριγώνων. Είναι όμως γραμμή; Μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα μέρος του αποτελούμενο από γραμμές, αρκεί να είναι ένα πεπερασμένο μέρος του. Όμως εδώ έχουμε πλευρές άπειρων τριγώνων που σχηματίζονται συνεχώς μέσα σε τρίγωνα που κι αυτά είναι μέσα σε άλλα τρίγωνα κλπ.....Και είναι ακριβώς αυτή η απειρία των τριγώνων και των πλευρών τους που μας εμποδίζει να αποφασίσουμε αν είναι τελικά γραμμή αυτό που προκύπτει.

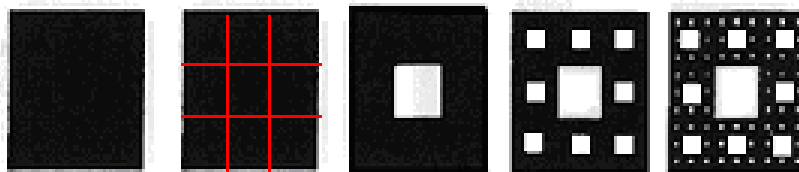
Γ3.3. Χαλί του Sierpinski (Sierpinski Carpet)

Για να κατασκευάσουμε αυτό το σύνολο, αρχίζουμε με ένα τετράγωνο. Το πρώτο βήμα είναι να αφαιρέσουμε το κεντρικό τετράγωνο χωρίζοντας την πλευρά του αρχικού τετραγώνου σε τρία ίσα μέρη. Στο δεύτερο βήμα επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στο καθένα από τα 8 τετράγωνα που απέμειναν. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνέχεια και περιγράφεται σύντομα με το παρακάτω σχεδιάγραμμα:



Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να περιγραφεί και με τα εξής βήματα που βοηθούν στην κατασκευή του αντίστοιχου προγράμματος στον υπολογιστή:

1. Αρχισε με το τετράγωνο πλευράς 1
 2. Σε κάθε τετράγωνο χώρισε την πλευρά του σε τρία ίσα μέρη και κατασκεύασε το πλέγμα του τετραγώνου.
 3. Αφαίρεσε το κεντρικό τετράγωνο.
- Πήγαινε στο βήμα #2.



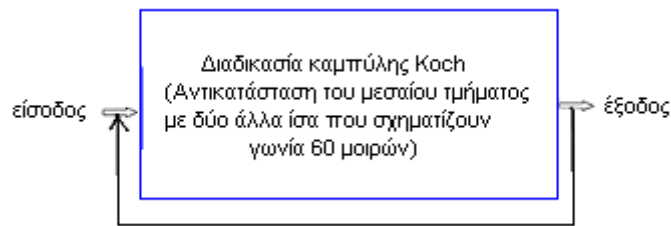
Αφαιρώντας συνεχώς το κεντρικό τετράγωνο, παίρνουμε ένα σύνολο στο επίπεδο, το οποίο περιέχει τις πλευρές όλων των τετραγώνων που έχουμε αφαιρέσει και το οποίο έχει μηδενικό εμβαδό αφού το όριο της ακολουθίας $(\frac{8}{9})^n$ είναι το 0.

Βήμα No.		2	3	4	...	n	...
Μέρος του εμβαδού που απομένει		$(\frac{8}{9})^2$	$(\frac{8}{9})^3$	$(\frac{8}{9})^4$	...	$(\frac{8}{9})^n$	...

Γ3.4. Καμπύλη του Koch

Η καμπύλη του Koch είναι από τις πρώτες καμπύλες φράκταλς που κατασκευάστηκαν. Για την ιστορία αναφέρουμε ότι εμφανίστηκε το 1904 σε εργασία με τίτλο³⁶ : *"Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire"* από τον Σουηδό μαθηματικό Helge von Koch. Για να κατασκευάσουμε αυτό το σύνολο, αρχίζουμε με ένα ευθύγραμμο τμήμα. Το πρώτο βήμα είναι να χωρίσουμε το ευθύγραμμο τμήμα σε τρία ίσα μέρη. Στο δεύτερο βήμα κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο με βάση το μεσαίο τμήμα. Στο τρίτο βήμα αφαιρούμε τη βάση του τριγώνου που σχηματίσαμε. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στο καθένα από τα 4 ευθ. τμήματα που σχηματίστηκαν. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνέχεια και περιγράφεται σύντομα με το παρακάτω σχεδιάγραμμα:

³⁶ http://en.wikipedia.org/wiki/Koch_curve



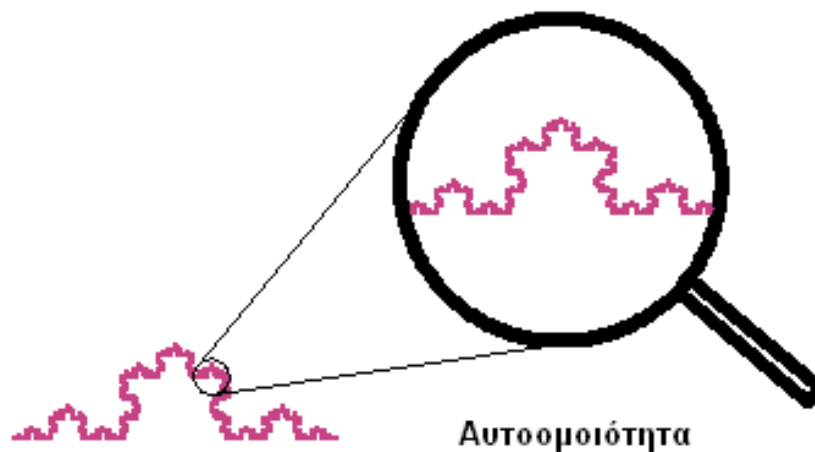
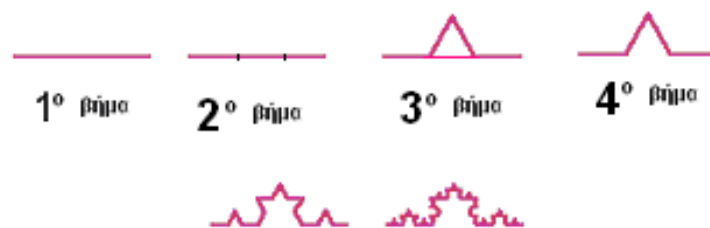
Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να περιγραφεί και με τα εξής βήματα:

1. Αρχισε με το ευθύγραμμο τμήμα μήκους 1
2. Χώρισε κάθε τμήμα σε τρία ίσα μέρη.

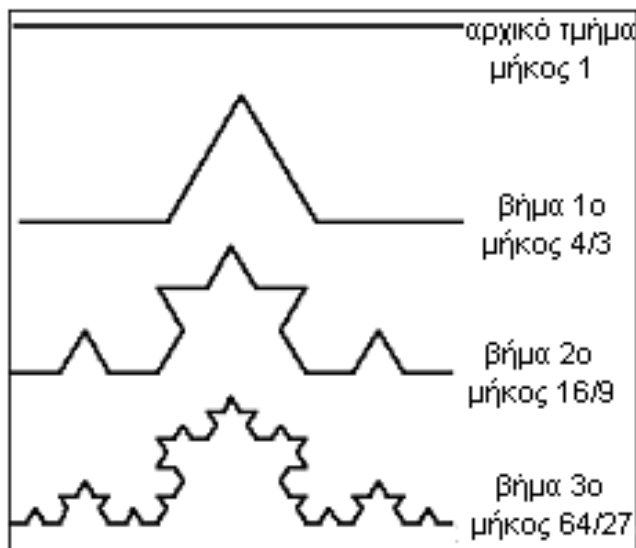
Σχεδίασε ένα ισόπλευρο τρίγωνο με βάση το μεσαίο ευθ. τμήμα του βήματος 2.

Αφαίρεσε το ευθύγραμμο τμήμα της βάσης του βήματος 3.

Πήγαινε στο βήμα #2.



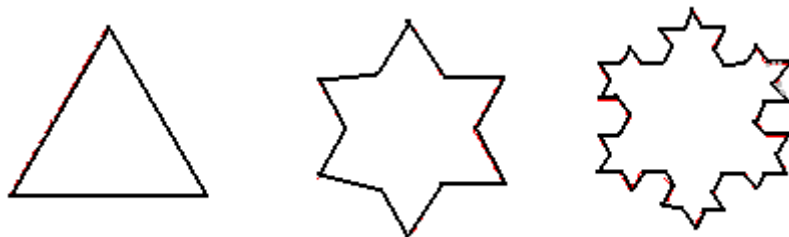
Η καμπύλη αυτή είναι συνεχής αλλά πουθενά διαφορίσιμη και το μήκος της είναι άπειρο αφού σε κάθε βήμα κάθε υπάρχον ευθύγραμμο τμήμα «γεννάει» άλλα 4 και έτσι αυξάνεται κατά το $\frac{1}{3}$ του.



Βήμα No.		2	3	...	n	...
Μήκος		$(\frac{4}{3})^2$	$(\frac{4}{3})^3$	...	$(\frac{4}{3})^n$	...

Το όριο της ακολουθίας $(\frac{4}{3})^n$ είναι το άπειρο.

Η νιφάδα του Koch ή Koch snowflake (Koch star) κατασκευάζεται σαν την καμπύλη, μόνο που αρχίζουμε εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία όχι σε ένα ευθ. τμήμα αλλά σε τρία, που είναι πλευρές ενός ισοπλεύρου τριγώνου. Η περίμετρος της νιφάδας είναι άπειρη. Το εμβαδό βέβαια της περιοχής που περικλείει είναι πεπερασμένο αφού όλη η νιφάδα μπορεί να εγκλειστεί σε ένα κύκλο και επομένως αυτό το εμβαδό δεν μπορεί να ξεπεράσει μια ορισμένη τιμή.



Γ4. Το ζήτημα της Διάστασης

Γ4.1. Η στοιχειώδης έννοια τής Ευκλείδειας Διάστασης.

Είναι γνωστό ότι μια γραμμή έχει διάσταση 1, ένα επίπεδο σχήμα διάσταση 2 και ένας π.χ. κύβος 3. Αλλά γιατί ισχύει αυτό; Η πρώτη μας σκέψη είναι ότι μια γραμμή έχει διάσταση 1 επειδή υπάρχει μόνο ένας τρόπος να κινηθείς πάνω σ' αυτήν και όμοια ένα επίπεδο έχει διάσταση 2 γιατί υπάρχουν 2 κατευθύνσεις για να κινηθείς, κ.λ.π. Βέβαια στην πραγματικότητα υπάρχουν 2 τρόποι να μετακινηθείς σε μια γραμμή, -μπροστά και πίσω- και άπειροι τρόποι σ' ένα επίπεδο. Αυτό που υπονοείται στη σκέψη μας είναι ότι υπάρχουν 2 γραμμικά ανεξάρτητες διευθύνσεις σ' ένα επίπεδο (η έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας θίγεται λίγο στα μαθηματικά κατεύθυνσης της Β' Λυκείου). Διαισθητικά λοιπόν, η διάσταση ενός συνόλου (ενός υποσυνόλου του ευκλείδειου χώρου), είναι ο αριθμός των ανεξάρτητων παραμέτρων που χρειαζόμαστε για να περιγράψουμε τη θέση ενός σημείου του αντικειμένου και επομένως, αυτές οι διαστάσεις είναι φυσικοί αριθμοί. Για παράδειγμα, ένα σημείο ενός επιπέδου περιγράφεται από δύο ανεξάρτητες παραμέτρους (είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου), επομένως το επίπεδο έχει διάσταση 2.

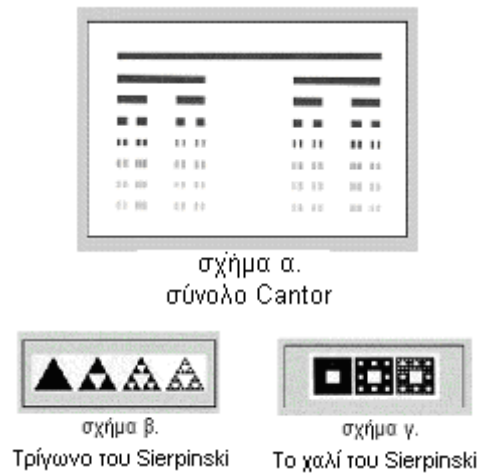
Αν το εξετάσουμε το θέμα από τη μεριά των μετρήσεων, θα δούμε πως με μια ευθεία γραμμή κάποιος μετρά την απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία. Για να μετρήσουμε όμως την περιοχή που καταλαμβάνει ένα τρίγωνο, χρειαζόμαστε δύο μετρήσεις αποστάσεων, της βάσης και του ύψους. Για να μετρήσουμε τον όγκο μιας πυραμίδας, χρειαζόμαστε και μια επιπλέον μέτρηση, αυτήν του ύψους της. Επομένως, ένας άλλος διαισθητικός ορισμός που έχουμε όλοι μας είναι ότι η διάσταση είναι ο αριθμός των μετρήσεων που χρειάζονται για να πούμε πόσο χώρο καταλαμβάνει ένα αντικείμενο γύρω μας.

Η μαθηματική έννοια που αναπτύσσει αυτή την ιδέα είναι αυτή της τοπολογικής διάστασης ή όπως συνηθίζουμε να λέμε της ευκλείδειας διάστασης.

Πρώτος ο αρχαίος φιλόσοφος και γεωμέτρης Ευκλείδης, προσπάθησε να περιγράψει τον χώρο που μας περιβάλλει και τα γεωμετρικά αντικείμενα μέσα σ' αυτόν, δηλ. τα σημεία, τις γραμμές, τις επιφάνειες και τα κομμάτια τού χώρου που έχουν όγκο. Κατά τα λεγόμενα τού Ευκλείδη: ‘Σημείον εστί ό ου μέρος ουδέν,’ δηλ. ένα σημείο δεν κατέχει όγκο μέσα στον χώρο και δεν έχει ούτε μήκος ούτε εμβαδόν, γι' αυτό λέμε ότι έχει διάσταση μηδέν. Με τις γραμμές τα πράγματα είναι κάπως πιο περίπλοκα. Υπάρχουν γραμμές απλές αλλά και πιο περίπλοκες, όπως θηλιές και κόμπτοι, όπως επίσης και γραμμές που ορίζονται μόνο στον τρισδιάστατο χώρο όπως είναι η κυλινδρική έλικα. Μια γραμμή όμως δεν έχει ούτε εμβαδόν ούτε όγκο. Έχει μόνο σημεία και ορίζεται από την κίνηση ενός σημείου, αποτελώντας την τροχιά του. Επομένως, λέμε ότι μία γραμμή είναι ένα μονοδιάστατο γεωμετρικό αντικείμενο, δηλ έχει διάσταση ένα. Κατά τον Ευκλείδη : “Γραμμή εστί μήκος άνευ πλάτους”.

Οι επιφάνειες περιέχουν σημεία και γραμμές. Αλλά κυρίως περιέχουν εμβαδόν, κάτι που δεν συμβαίνει με τις γραμμές. Δεν έχουν βέβαια όγκο. Πάντως, τα λογικά βήματα είναι ξεκάθαρα και μας πηγαίνουν σταδιακά από τη μηδενική έως στις τρεις διαστάσεις. Μετακινώντας ένα σημείο κατασκευάζεται μια γραμμή. Μετακινώντας μια γραμμή προκύπτει μια επιφάνεια και ακολούθως μετακινώντας μια επιφάνεια προκύπτει μια γεωμετρική οντότητα που έχει όγκο. Άρα μπορούμε αναμφισβήτητα να πούμε ότι η διάσταση ενός γεωμετρικού αντικειμένου μπορεί να είναι μόνο ένας από τους ακεραίους 0,1,2 ή 3.

Όμως το σύνολο Cantor, το τρίγωνο και το χαλί του Sierpinski, είναι λίγο πιο



περίπλοκα από αυτά που συνηθίσαμε να αντιμετωπίζουμε στη κλασική Γεωμετρία. Αποτελούνται όπως είδαμε από ένα σύνολο σημείων (σχήμα α.) ή σύνολο γραμμών (σχήματα β και γ) τα οποία δημιουργήθηκαν με μια απλή επαναληπτική διαδικασία και εμφανίζουν αυτοομοιότητα, είναι δηλ. Fractals. Είναι δύσκολο να αποφασίσουμε τι διάσταση έχουν αυτά τα σύνολα. Π.χ. το τρίγωνο του Sierpinski φαίνεται καθαρά ότι δεν μπορεί να έχει διάσταση δύο αφού δεν του έχει απομείνει καθόλου εμβαδόν αλλά δυσκολευόμαστε να αποφασίσουμε ότι έχει και διάσταση ένα, σαν να ήταν απλά μια μονοδιάστατη γραμμή. Είδαμε ότι πρώτος ο ο Mandelbrot μίλησε για κλασματική (φράκταλ) διάσταση. Την καινούρια αυτή «ανάγνωση» της έννοιας της διάστασης μπορούμε να τη συλλάβουμε διαισθητικά σκεπτόμενοι κάπως έτσι: μια οδοντωτή γραμμή (διάσταση ένα) «πιάνει περισσότερο χώρο» πάνω στο επίπεδο (διάσταση 2) από μία που είναι πιο ομαλή. Όσο περισσότερο συστρέφεται και κάμπτεται η καμπύλη μας, τόσο περισσότερο χώρο πιάνει πάνω στο επίπεδο. Επομένως, η διάστασή της πλησιάζει όλο και πιο κοντά στο 2. Όμοια, ένα τσαλακωμένο κομμάτι χαρτί πιάνει περισσότερο χώρο από ένα επίπεδο χαρτί, αλλά λιγότερο χώρο από ό,τι μια σφαίρα. Άρα, όσο πιο πολύ τσαλακωμένο είναι το χαρτί, τόσο πιο κοντά στο 3 είναι η φράκταλ διάστασή του.

Ποια είναι επομένως η ακριβής διάσταση των μαθηματικών φράκταλς που μελετήθηκαν προηγουμένως; Ποιος είναι ο αριθμός των μετρήσεων που χρειάζονται για να πούμε πόσο χώρο καταλαμβάνουν;

Είναι επομένως απαραίτητο να έχουμε έναν εναλλακτικό ορισμό διάστασης που να μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε αντικείμενο, ευκλείδειο ή φράκταλ. Αυτός βασίζεται στην έννοια της «ικανότητας» (box dimension ή capacity dimension) δηλ. στο πώς ένα αντικείμενο γεμίζει το χώρο και προτάθηκε αρχικά από τον Ρώσο μαθηματικό Andrei Kolmogorov (1903-1987). Είναι γνωστή και σαν εντροπία του Kolmogorov, διάσταση εντροπίας, διάσταση πληροφορίας, λογαριθμική πυκνότητα, διάσταση Minkowski. Το 1919 ο Γερμανός μαθηματικός Felix Hausdorff ανέπτυξε έναν αυστηρό ορισμό της διάστασης ενός συνόλου εμπνεόμενος και από μία μέθοδο που ανέπτυξε ο Έλληνας μαθηματικός Κ. Καραθεοδωρή³⁷, τον οποίο ορισμό επεξεργάστηκε και ο Besikovich γι' αυτό και είναι γνωστός σαν διάσταση κατά Hausdorff – Besikovich³⁸. Η διάσταση Hausdorff – Besikovich – Καραθεοδωρή είναι τεχνικά δύσκολη γιατί υπολογίζεται μόνο με μαθηματικές μεθόδους, είναι θεωρητική γενίκευση της box dimension και χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό διάστασης αντικειμένων που εμφανίζουν «διαφορετική πυκνότητα»³⁹. Η box dimension, μετά την επεξεργασία της παραμελήθηκε για να αξιοποιηθεί πολύ αργότερα, το 1975, από τον Mandelbrot στο βιβλίο του: *Η Μορφολογική Γεωμετρία της Φύσης*. Αυτή η εύχρηστη διάσταση είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός, επεκτείνει την έννοια της ευκλείδειας διάστασης συσχετίζοντάς την και με άλλες μετρικές ιδιότητες του χώρου, όπως το εμβαδό ή τον όγκο και υπολογίζεται κατά προσέγγιση και με τη χρήση H/Y.

Γ4.2. Η έννοια της Διάστασης από την σκοπιά της Ομοιότητας

Είναι πραγματικά ενδιαφέρον, το ότι υπάρχει μια αριθμητική σχέση ανάμεσα στο μέγεθος δυο σχημάτων, την διάστασή τους και τον λόγο ομοιότητάς τους που μας επιτρέπει να μετρήσουμε το βαθμό «τραχύτητας» ενός Fractal .

Είναι γνωστό από την Ευκλείδεια γεωμετρία ότι για δύο όμοια επίπεδα σχήματα, ισχύει η σχέση: (Λόγος των Εμβαδών) = (Λόγος Ομοιότητας)² ,

³⁷ Μπούντης, Τ. ο.π. , σελ. 65

³⁸ Hausdorff dimension - Wikipedia, the free encyclopedia1.htm

³⁹ Μπούντης, Τ. ο.π. , σελ. 77

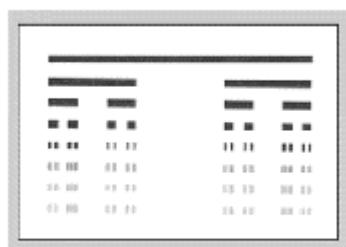
όπου ο εκθέτης «δύο» είναι η κοινή διάσταση των σχημάτων που εξετάζουμε. Αν τα αντικείμενά μας δεν είναι επίπεδα σχήματα, αλλά π.χ. κύβοι (διάσταση τρία), η σχέση που ισχύει είναι η: (Λόγος των Όγκων) = (Λόγος Ομοιότητας)³

Προφανώς δυο όμοια αντικείμενα, αφού το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου, βρίσκονται στον ίδιο «χώρο», μονοδιάστατο, δισδιάστατο ή τρισδιάστατο, δηλ. έχουν την ίδια διάσταση.

Αν ονομάσουμε λοιπόν το μήκος η το εμβαδόν η τον όγκο ενός αντικειμένου με τον όρο «Μέτρο» και ονομάσουμε N τον λόγο των αντίστοιχων μέτρων (λόγο μηκών, εμβαδών ή όγκων) δηλ. τον αριθμό τελικά των κομματιών του μικρού σχήματος που χρειάζεται για να καλυφθεί το μεγάλο σχήμα, λ τον λόγο ομοιότητας και D την διάσταση των δυο αντικειμένων, οι πιο πάνω σχέσεις γίνονται: $N = \lambda^D$

Γ4.2.1. Υπολογισμός της διάστασης του συνόλου Cantor

Προηγουμένως είδαμε πώς κατασκευάζεται το σύνολο Cantor . Αν



σχήμα α.
σύνολο Cantor

παρατηρήσουμε το σχήμα θα δούμε ότι το αριστερό κομμάτι είναι όμοιο με το δεξί και μάλιστα έχουν ίσα μήκη. Καθώς τα βήματα της διαδικασίας επαναλαμβάνονται, ό,τι αλλαγές συμβαίνουν στο ένα από τα δύο μέρη συμβαίνουν ακριβώς ίδιες και στο άλλο. Αυτό ισχύει για κάθε επαναλαμβανόμενο βήμα της

διαδικασίας, αλλά, το πιο σημαντικό, ισχύει και μετά από άπειρα βήματα. Και μάλιστα μετά από άπειρο πλήθος βημάτων παρατηρούμε και κάτι πολύ βασικό : *Το καθένα από τα δύο μέρη είναι όμοιο με ολόκληρο το σύνολο.* Τα δυο μεγάλα υποσύνολα που εξετάσαμε παραπάνω, το αριστερό και το δεξί, περιέχουν, με τη σειρά τους, το καθένα το δικό του 'αριστερό' και 'δεξί' μέρος. Έχουμε λοιπόν τέσσερα μικρότερα υποσύνολα. Εφόσον η διαδικασία συνεχίζεται είναι αναμφισβήτητο γεγονός ότι το σύνολο Cantor περιέχει έναν άπειρο αριθμό από υποσύνολα, όλο και πιο μικρά, αλλά πανομοιότυπα προς το αρχικό σύνολο! Κάθε ένα από αυτά, οσοδήποτε μικρό, είναι ένα πλήρες

σύνολο Cantor γι' αυτό και όπως λέχτηκε το σύνολο Cantor είναι αυτοόμοιο και αποτελεί ένα Fractal.

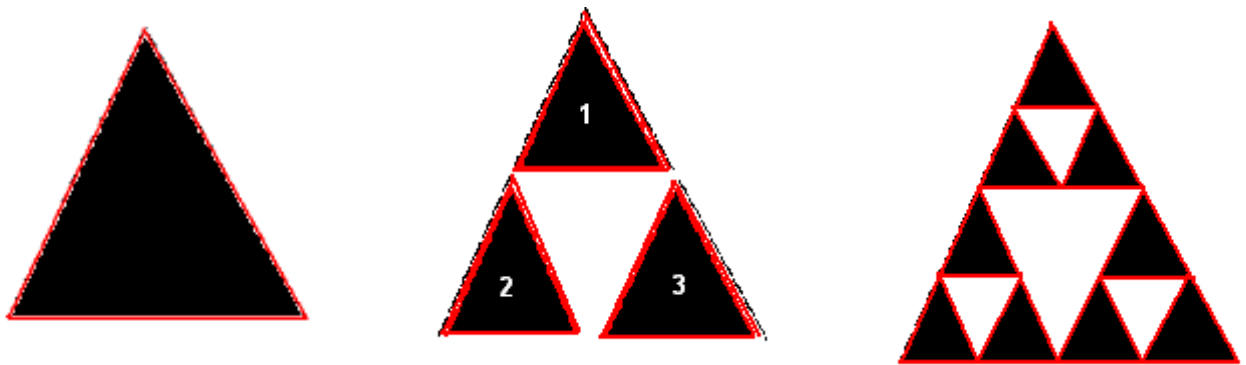
Ας βρούμε τώρα το λόγο ομοιότητας που το χαρακτηρίζει. Είναι φανερό ότι $\lambda = 3$ αφού όλο το σύνολο είναι τρεις φορές πιο μεγάλο από το αριστερό του μέρος και αυτό οφείλεται στον κανόνα σχηματισμού του. Τώρα πρέπει να δούμε αν τα σύνολά μας έχουν ένα κάποιου είδους «μέτρο», ώστε να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο που μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την διάσταση. Όπως αποδείχτηκε προηγουμένως το σύνολο Cantor δεν έχει 'μήκος' με την συνηθισμένη έννοια αφού στο τέλος δεν απομένει τίποτε άλλο παρά μεμονωμένα σημεία («σκόνη του Cantor»). Αν το σύνολο Cantor έχει κάποιο «μέτρο», τότε αυτό το μέτρο θα πρέπει να διαμοιράζεται εξίσου ανάμεσα στα δυο μέρη του συνόλου, το αριστερό και το δεξί αφού αποτελείται από δύο κομμάτια. Το καθένα από αυτά περιέχει το μισό από το 'μέτρο' ολόκληρου του σχήματος, άρα $N = (\text{Μέτρο του όλου})/(\text{Μέτρο του αριστερού ή δεξιού κομματιού}) = \text{«αριθμός κομματιών»} = 2$.

$$N = \lambda^D, \quad 2 = 3^D, \quad \log 2 = \log 3^D \quad \text{και τελικά: } D = [(\log 2)/(\log 3)] = 0,6039$$

Και αυτή είναι η διάσταση ομοιότητας του συνόλου Cantor, δηλ. η Fractal διάσταση του συνόλου Cantor.

Γ4.2.2. Υπολογισμός της διάστασης του τριγώνου του Sierpinski

Στο πρώτο βήμα παρατηρούμε ότι το σύνολο που προκύπτει (το τρύπιο τρίγωνο) αποτελείται από 3 κομμάτια, 3 μινιατούρες του αρχικού τριγώνου, άρα $N = 3$ (το 'μέτρο' του όλου συνόλου είναι τρεις φορές εκείνο του υποσυνόλου). Επίσης κάθε ένα από αυτά τα τρίγωνα μινιατούρες είναι όμοιο με το αρχικό τρίγωνο και μάλιστα παρατηρούμε ότι πρέπει να διπλασιαστεί η πλευρά του για να πάρουμε το αρχικό τρίγωνο, άρα $\lambda = 2$.



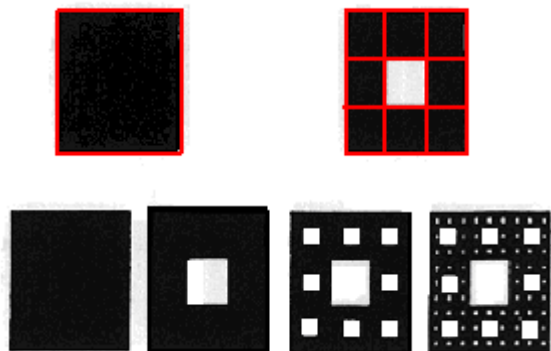
Η σχέση $N = \lambda^D$ γίνεται $3 = 2^D$, $\log 3 = \log 2^D$, $\log 3 = D \log 2$ και τελικά:
 $D = [(\log 3)/(\log 2)] = 1,585$

Παρατηρούμε ότι αν εφαρμόσουμε τον παραπάνω τύπο σε οποιοδήποτε βήμα θα βρούμε τον ίδιο αριθμό D αφού κάθε τόσο ο αριθμός των μικρών τριγώνων (κομματιών) που δημιουργούνται και ο συντελεστής με τον οποίο πρέπει να πολλαπλασιαστεί η πλευρά τους για να δώσει την αρχική πλευρά αυξάνονται εκθετικά κατά ίσο συντελεστή. Π.χ. στην επόμενη φάση έχουμε ότι το μεγάλο τρίγωνο αποτελείται από 9 τριγωνάκια και η πλευρά του είναι 4 φορές η πλευρά του μικρού.

$N = \lambda^D$ $9 = 4^D$, $\log 9 = \log 4^D$, $\log 9 = D \log 4$, $\log 3^2 = D \log 2^2$,
 $2 \log 3 = 2 D \log 2$ και τελικά: $D = [(\log 3)/(\log 2)]$

Γ4.2.3. Υπολογισμός της διάστασης του *Sierpinski Carpet*.

Στο πρώτο βήμα παρατηρούμε ότι η επιφάνεια που προκύπτει καλύπτεται από 8 κομμάτια, 8 μινιατούρες του αρχικού τετραγώνου, άρα $N = 8$. Επίσης κάθε ένα από αυτά τα μικρά τετραγωνάκια είναι φυσικά όμοιο με το αρχικό τετράγωνο και μάλιστα παρατηρούμε ότι πρέπει να τριπλασιαστεί η πλευρά του για να πάρουμε το αρχικό τετράγωνο, άρα $\lambda = 3$.



Η σχέση $N = \lambda^D$ γίνεται $8 = 3^D$, $\log 8 = \log 3^D$, $\log 8 = D \log 3$ και τελικά:

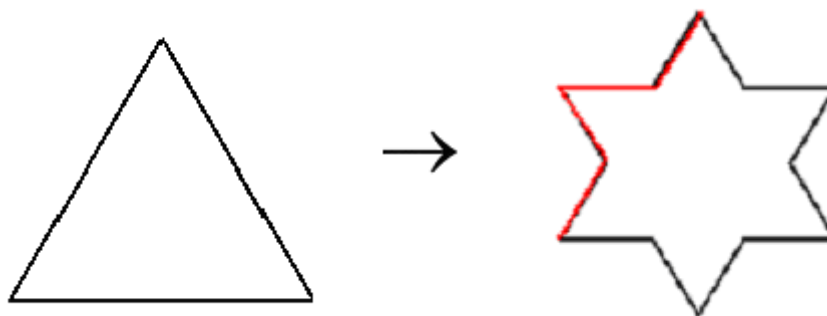
$$D = (\log 8)/(\log 3) = 3(\log 2)/(\log 3)$$

Άρα, η Fractal διάσταση του χαλιού του Sierpinski, είναι τρεις φορές εκείνη του συνόλου Cantor.

Γ4.2.4. Υπολογισμός της διάστασης της νιφάδας του Koch

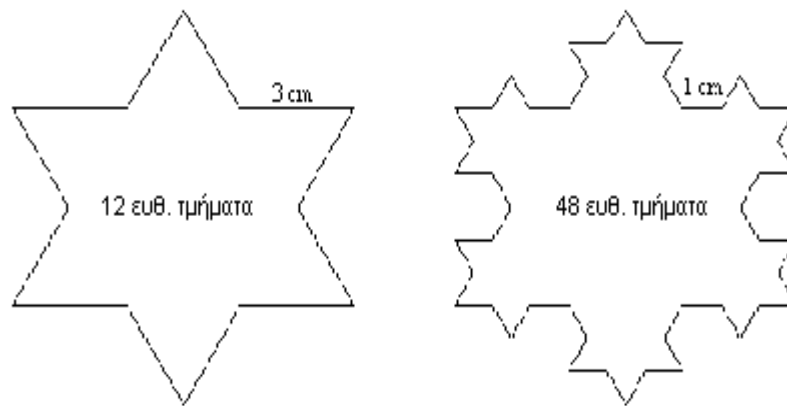
Εδώ τα πράγματα φαίνονται δυσκολότερα γιατί η νιφάδα δεν δείχνει να αποτελείται από αντίγραφα του εαυτού της. Υπάρχει επομένως μια σχετική δυσκολία να βρούμε τις τιμές του τύπου που δίνει την διάσταση.

Κατ' αρχήν σκεφτόμαστε ότι κάθε μέρος της νιφάδας θα έχει την ίδια διάσταση με τη νιφάδα. Αυτό είναι εύκολο να το αντιληφθούμε. Αν πάρουμε ένα κομμάτι οποιουδήποτε μεγέθους από μια ευθεία, ένα ευθ. τμήμα, αυτό θα έχει διάσταση 1. Όμοια αν πάρουμε ένα κομμάτι από ένα τετράγωνο, αυτό θα έχει διάσταση 2 και αν κόψουμε ένα κομμάτι από έναν κύβο, αυτό θα έχει διάσταση 3. Έχοντας στο μυαλό μας ότι μόνο η γραμμή είναι μέρος της νιφάδας και όχι το εμβαδό που περικλείεται, συμπεραίνουμε ότι αν βρούμε τη διάσταση μιας πλευράς που σχηματίζει το φράκταλ, τότε όλη η νιφάδα θα έχει την ίδια διάσταση.



Παρατηρούμε ότι κάθε ευθ. τμήμα μετασχηματίζεται σε άλλα 4 ίσα ευθ. τμήματα που το καθένα έχει μήκος ίσο με το $1/3$ του αρχικού.

Με άλλα λόγια, κάθε πλευρά έχει μετασχηματιστεί σε 4 αυτοόμοια αντίγραφα με συντελεστή ομοιότητας 3 αφού πρέπει να πολλαπλασιαστεί επί 3 για να πάρουμε το αρχικό μήκος. Άρα $N = 4$ και $\lambda = 3$. Ένας άλλος τρόπος να βρούμε τα μεγέθη N και λ είναι να παρατηρήσουμε την επόμενη φάση :

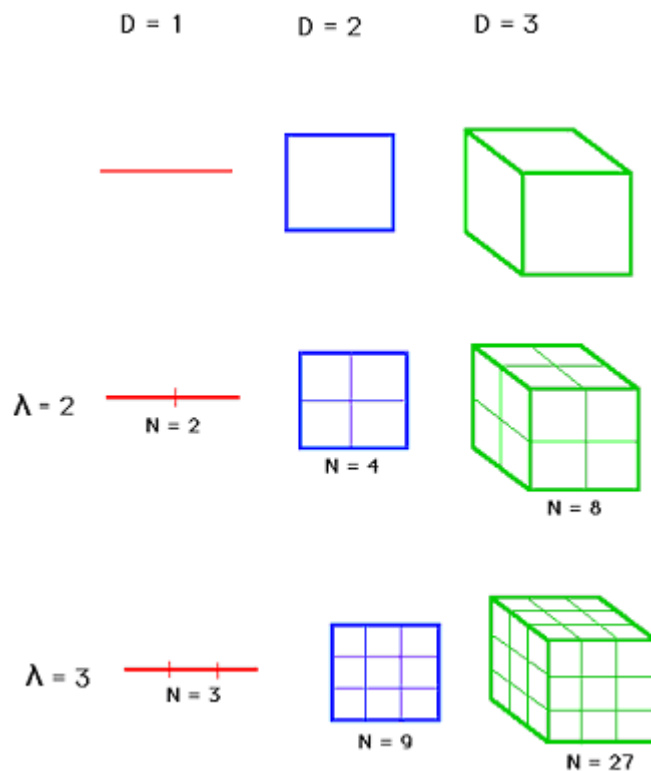


Αν το αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο είχε πλευρά 9 εκατοστών, στο 1^ο βήμα προκύπτει ένα αστέρι που αποτελείται από 12 ευθ. τμήματα μήκους 3 εκ. και στο 2^ο βήμα προκύπτουν 48 ευθ. τμήματα μήκους 1 εκ. Δηλαδή το αστέρι που προκύπτει κάθε τόσο έχει τετραπλάσια ευθ. τμήματα από το προηγούμενο και το καθένα από αυτά πρέπει να 3/σιαστεί για να δώσει το ευθ. τμήμα του προηγούμενου βήματος. Άρα $N = 4$ και $\lambda = 3$

Η σχέση $N = \lambda^D$ γίνεται $4 = 3^D$, $\log 4 = \log 3^D$, $\log 4 = D \log 3$ και τελικά:

$$D = (\log 4)/(\log 3) = 2(\log 2)/(\log 3) \approx 1,26185.$$

Γ4.3. Αντιμετώπιση των κλασικών διαστάσεων κάτω από το πρίσμα της νέας σκοπιάς



$$N = \lambda^D$$

Αν πάρουμε ένα ευθ. τμήμα και το χωρίσουμε σε 3 άλλα μικρότερα, θα παρατηρήσουμε ότι έχουμε αυτοομοιότητα μια και κάθε ένα από τα μικρά ευθ. τμήματα είναι όμοιο με το αρχικό με $\lambda=3$ (μεγεθύνοντάς το 3 φορές παίρνουμε το αρχικό). $N = \lambda^D$, $3 = 3^D$, $D=1$, η γνωστή ακέραιη διάσταση του μήκους.

Ένα τετράγωνο επίσης μπορεί να χωριστεί σε μικρότερα τετράγωνα πλευράς π.χ. ίσης με το $1/3$ της αρχικής. Όμως τώρα χρειαζόμαστε 9 κομμάτια για να καλύψουμε το αρχικό τετράγωνο.

$N = \lambda^D$, $9 = 3^D$, $D=2$, η γνωστή ακέραιη διάσταση της επιφάνειας.

Ένας κύβος μπορεί να χωριστεί σε 27 κομμάτια ακμής ίσης με το $1/3$ της ακμής του αρχικού κύβου. $N = \lambda^D$, $27 = 3^D$, $D=3$, η γνωστή ακέραιη διάσταση του χώρου. Γενικότερα λοιπόν, αν πάρουμε ένα αντικείμενο ευκλείδειας διάστασης D και διαιρέσουμε κάθε πλευρά του σε n ίσα τμήματα, θα προκύψουν N κομμάτια (μήκους, εμβαδού ή όγκου) όμοια με το αρχικό τα οποία θα πρέπει να μεγεθυνθούν n φορές για να πάρουμε το αρχικό σχήμα. Αν το αντικείμενο είναι ευθ. τμήμα, τότε $N = n$, αν είναι τετράγωνο, $N=n^2$ και αν είναι κύβος, $N=n^3$ άρα πράγματι ο εναλλακτικός ορισμός της διάστασης:

$$N = v^D, D = \frac{\log N}{\log v} = \frac{\log(\text{αριθμός κομματιών})}{\log(\text{λόγος μοιότητας κομματιού προς το αρχικό})}$$

τον οποίο εφαρμόσαμε στα Φράκταλς, μπορεί να εφαρμοστεί και στα κλασικά ευκλείδεια αντικείμενα αφού εφαρμόζοντάς τον παίρνουμε τις γνωστές μας θετικές ακέραιες διαστάσεις.

Γ4.4. Συμπληρωματικές παρατηρήσεις

Το σύνολο Cantor ορίζεται πάνω σε μια γραμμή γι' αυτό λέμε ότι το σύνολο Cantor είναι εμφυτευμένο στην μονοδιάστατη Ευκλείδεια γραμμή που αποκαλείται *περιβάλλοντος χώρου* του συνόλου Cantor. Η ευκλείδεια διάσταση (τοπολογική διάσταση) του συνόλου Cantor είναι μηδέν, αφού τελικά είναι ένα σύνολο διακριτών σημείων. Η Φράκταλ διάστασή του, όπως είδαμε, είναι:

$D = (\log 2)/(\log 3) \sim 0.6309$. Παρατηρούμε ότι ισχύει η σχέση $0 < 0.6309 < 1$, δηλ. η Φράκταλ διάσταση είναι ένας αριθμός ο οποίος βρίσκεται ανάμεσα στην ευκλείδεια διάσταση του Φράκταλ συνόλου και την διάσταση του περιβάλλοντος χώρου του. Σύνολα όπως το σύνολο Cantor αποκαλούνται 'σκόνες'.

Στο τρίγωνο τώρα του Sierpinski, υπολογίσαμε την Fractal διάστασή του που είναι:

$D = (\log 3)/(\log 2) \sim 1.5849$, η ευκλείδεια διάστασή του είναι 1 αφού με τις διαδοχικές αφαιρέσεις καταλήγουμε σε κάτι που έχει πλευρές αλλά δεν έχει εμβαδόν και η διάσταση του περιβάλλοντος χώρου του είναι 2 αφού αρχίσαμε από μια επιφάνεια (τρίγωνο). Παρατηρούμε και εδώ ότι ισχύει η σχέση :

ευκλείδεια διάσταση του Φράκταλ συνόλου $<$ Φράκταλ διάσταση $<$ ευκλείδεια διάσταση περιβάλλοντος χώρου, αφού $1 < 1.5849 < 2$

Το χαλί του Sierpinski έχει Φράκταλ διάσταση:

$D = (\log 8)/(\log 3) \sim 1.8928$. Και πάλι, $1 < 1.8928 < 2$.

Βέβαια πρέπει να σημειωθεί ότι ο παραπάνω υπολογισμός της fractal διάστασης αφορά κάποια 'τυποποιημένα' μαθηματικά κατασκευάσματα που ικανοποιούν αυστηρά τη συνθήκη της αυτοομοιότητας. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται συνολικά οι διαστάσεις των Φράκταλ αντικειμένων με τις οποίες ασχοληθήκαμε μαζί με τις γνωστές ευκλείδειες:

<u>Αντικείμενο</u>	<u>Διάσταση</u>
Σημείο	0
Σύνολο Cantor	0.6309
Γραμμή	1
Τρίγωνο Sierpinski	1.5849
Χαλί Sierpinski	1.8928
Τρίγωνο και τετράγωνο	2

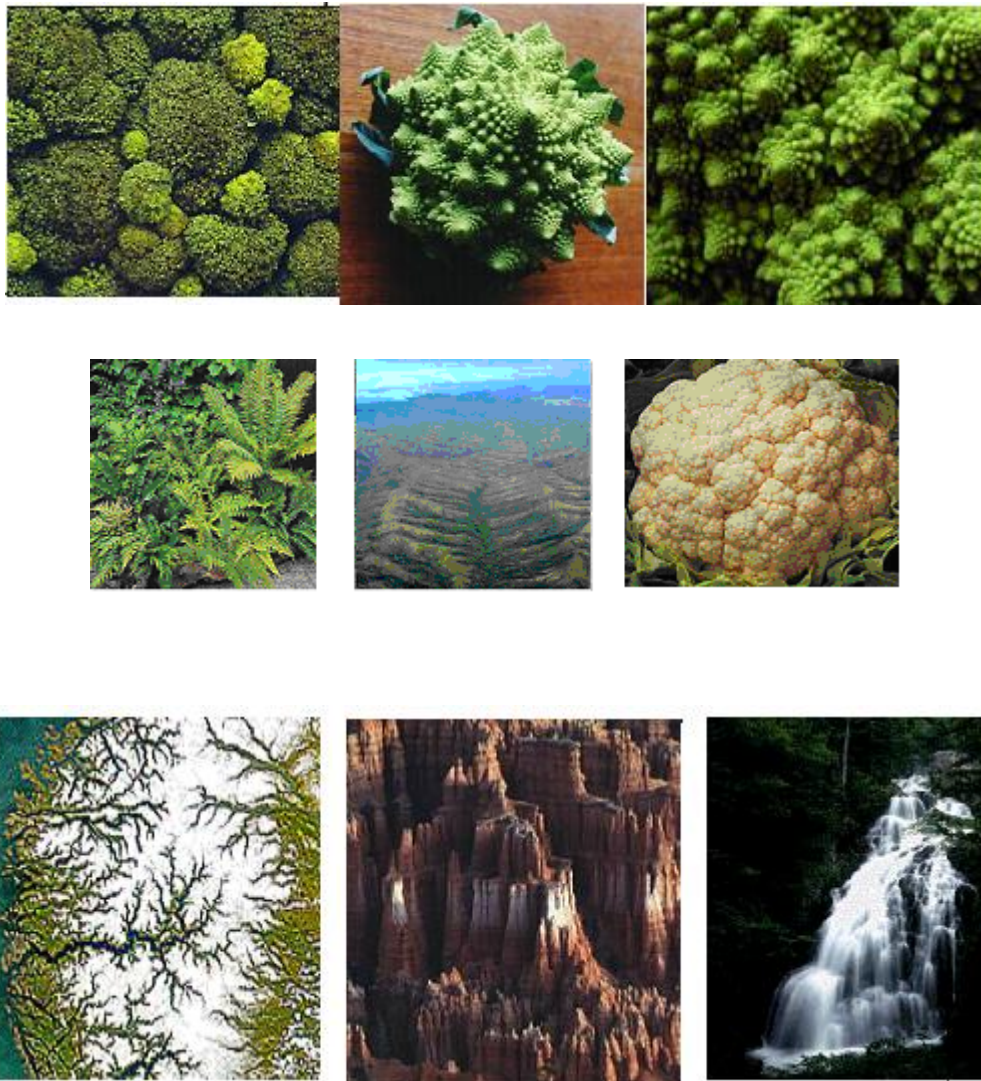
Η έννοια της κλασματικής διάστασης, η οποία αρχικά ήταν μια αφηρημένη μαθηματική ιδέα γνωστή σαν διάσταση Hausdorff-Besicovitch⁴⁰, αποδείχτηκε ένα πανίσχυρο εργαλείο για την ανάλυση των φράκταλ σχημάτων, των κλασματογενών συνόλων. Όπως είδαμε, η διάσταση αυτή μετράει τελικά το βαθμό λεπτομέρειας του αντικειμένου και το πόσο χώρο καταλαμβάνει ανάμεσα στις ευκλείδειες διαστάσεις και έχει το μεγάλο πλεονέκτημα να βρίσκεται σε συμφωνία με τη συνήθη διάσταση στους συνήθεις χώρους. Τώρα όχι μόνο οι μαθηματικοί αλλά και οι φυσικοί, οικονομολόγοι, αστρονόμοι, βιολόγοι, ανατομολόγοι, ηλεκτρονικοί μηχανικοί και γεωγράφοι μπορούν να μετρήσουν αναρίθμητες διαφορετικές μορφές που προηγουμένως ήταν αδύνατο να μετρηθούν από βουνά, σύννεφα, δέντρα και λουλούδια ως τους γαλαξίες και από τη ροή των ποταμών και τους τρόπους θραύσης των μετάλλων ως τις πτυχώσεις του ανθρώπινου εγκεφάλου⁴¹.

Γ5. Φράκταλς και Τέχνη

Γ5.1. Μαθηματικά μοντέλα στον Πραγματικό Κόσμο - Ανακαλύπτοντας την ομορφιά τους στην Φύση

⁴⁰ Stewart, Ian ό.π., σ. 254

⁴¹ Ο ανθρώπινος εγκέφαλος έχει κλασματική διάσταση που βρίσκεται κάπου ανάμεσα στο 2,73 και 2,79 αξιοποιώντας με τις πτυχώσεις του στο μέγιστο τον διαθέσιμο χώρο του κρανίου μας.



Η δομή Φράκταλ στις παραπάνω εικόνες που είναι φωτογραφίες παρμένες από τη φύση είναι ολοφάνερη. Εξ άλλου, κάθε τι που βλέπουμε γύρω μας δεν έχει δημιουργηθεί από διαδικασίες συνεχούς ανατροφοδότησης, δεν είναι δημιούργημα φυσικών δυναμικών συστημάτων; Βέβαια στα φυσικά αυτά αντικείμενα η δομή fractal είναι συνήθως προσεγγιστική ή πεπερασμένα αυτοόμοια γι' αυτό και τα φυσικά φράκταλς χαρακτηρίζονται σαν στατιστικά φράκταλς.

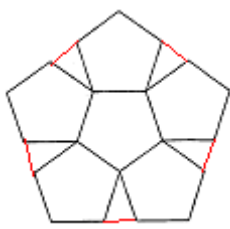
Γ5.2. Ανακαλύπτοντας την ομορφιά τους στις Ανθρώπινες Κατασκευές

Πολλές ανθρώπινες κατασκευές, απλές όπως τα Κινέζικα κουτιά και η γνωστή Ρωσική κούκλα Μπαμπούσκα αλλά και συνθετότερα καλλιτεχνικά δημιουργήματα αποδεικνύουν την έμφυτη γεωμετρική διαίσθηση απέναντι στην αυτοομοιότητα και το καλαίσθητό της που γοητεύει την αισθητική μας,

εκφράζοντας υποσυνείδητα αυτό που έχουμε μέσα μας και γύρω μας. Αυτή η ακολουθία ατελείωτης κλιμάκωσης του σχήματος σε ολοένα μικρότερα σχήματα πιστά όμως αντίγραφα του αρχικού, οδηγεί ακριβώς στην έννοια του απείρου από την πλευρά του οσοδήποτε μικρού. Αν αντιστρέψουμε τη διαδικασία, ξεχνώντας την ύπαρξη του αρχικού σχήματος και πάρουμε συνεχείς κλιμακώσεις μεγέθυνσης, τότε οδηγούμαστε στην έννοια του απείρου από την πλευρά του οσοδήποτε μεγάλου. Μετά από αυτό ή έννοια του Θεού δεν είναι μακριά. Θα μπορούσε κάποιος να σκεφτεί ότι «το όλο είναι μέσα σ' όλα» αφού «το αρχικό σύνολο – ανώτερη δύναμη» αντιγράφεται πιστά σε κάθε ένα από τα ολοένα και μικρότερα κομμάτια του. Η σκέψη αυτή μας παραπέμπει στην ανατολική φιλοσοφία και συγκεκριμένα στην παλιά Ερμητική σοφία που τόνιζε ότι: *το μέρος είναι το όλο και το όλο βρίσκεται σε κάθε μέρος* αλλά και στη χριστιανική ρήση ότι ο Θεός έπλασε τον άνθρωπο κατ' εικόνα και ομοίωση. Η αυτοομοιότητα λοιπόν, που δεν είναι ανάγκη κάποιος να είναι μαθηματικός για να την ανακαλύψει αφού βρίσκεται στην πραγματικότητα που μας περιβάλλει, μας εμβαπτίζει στην έννοια του απείρου και οδηγεί σε έναν υποβόσκοντα μυστικισμό. Πολλοί καλλιτέχνες αποτύπωσαν στα έργα τους αυτή τη σύλληψη του απείρου μέσω της συνεχούς κλιμάκωσης εκφράζοντας καθένας με τον τρόπο του αυτήν την συνεχή «γέννεση». Τα καλλιτεχνικά τους δημιουργήματα μίλησαν στις ψυχές πολλών ανθρώπων κατά τρόπο μάλιστα πιο άμεσο από αυτόν των αφηρημένων φιλοσοφικών συζητήσεων.

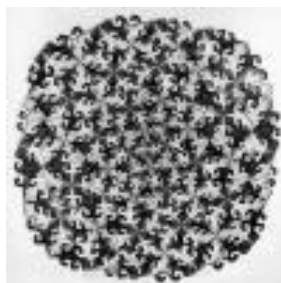
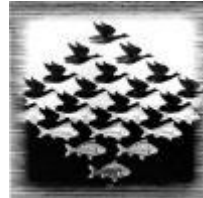
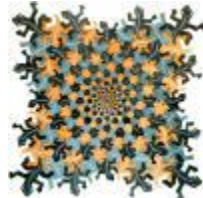
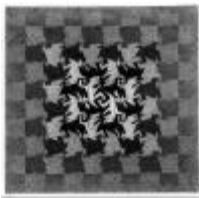
Γ5.2.1 Τα φράκταλς στην ζωγραφική

Είναι αξιοσημείωτο ότι ένας καλλιτέχνης του 15^{ου} αιώνα, ο Albrecht Durer (1471 – 1528) παρήγαγε ένα fractal αντικείμενο. Πήρε ένα κανονικό πεντάγωνο και στην κάθε πλευρά του προσάρτησε ένα ίδιο κανονικό πεντάγωνο. Το σχήμα στο οποίο κατέληξε είναι ένα μεγαλύτερο πεντάγωνο που από το μέσον κάθε πλευράς του λείπουν αντίστοιχα πέντε ισοσκελή τρίγωνα. Αν δούμε αυτή τη διαδικασία αντίστροφα και ξεκινήσουμε από το μεγάλο πεντάγωνο αφαιρώντας τα πέντε ισοσκελή τρίγωνα, βλέπουμε ότι



δημιουργούνται μέσα έξι νέα πεντάγωνα στα οποία εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία λαμβάνουμε ένα fractal απίστευτο για την εποχή του⁴².

Ο διάσημος Ολλανδός ζωγράφος Maurits Escher (1898 – 1972), αποτύπωσε σε πολλά έργα του την αυτοομοιότητα με αποτέλεσμα αυτές να έχουν καθαρά τη μορφή fractal. Τα παρακάτω αντιπροσωπευτικά έργα αυτής της τάσης πάρθηκαν από την επίσημη ιστοσελίδα της M. C. Escher Company B. V που βρίσκεται στην διεύθυνση: www.mcescher.com/



⁴² <http://www2.math.uoa.gr/~alkeos/edu/fractals/>



Επίσης δύο διάσημοι ζωγράφοι, ο Jackson Pollock και ο Mark Tobey θεωρούνται πρόδρομοι της Fractal Art που βρίσκεται σε μεγάλη εξέλιξη στις μέρες μας και θα την αναπτύξουμε παρακάτω σαν ειδική περίπτωση της σύγχρονης ψηφιακής τέχνης. Τα παρακάτω έργα τους έγιναν πριν τις ανακαλύψεις του Mandelbrot και το χαρακτηριστικό τους είναι ότι μπορούν να θεωρηθούν σαν καλλιτεχνικό αποτύπωμα της Φύσης αφού στην κατασκευή τους μιμούνται τις διεργασίες της φύσης, δηλ. είναι «φυσικά» φράκταλς.



Λεπτομέρεια από το *Cathedral*
Jackson Pollock, 1947



Λεπτομέρεια από το *Shadow Spirits of the Forest*,
Mark Tobey, 1961

Σε αντίθεση με τις διακοπτόμενες πινελιές της συμβατικής ζωγραφικής, οι παραπάνω ζωγράφοι χρησιμοποίησαν συνεχή ροή χρώματος για να παράγουν μοναδικές συνεχόμενες τροχιές στον καμβά τους, δουλεύοντας ξανά και ξανά τον ίδιο πίνακα για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα αρκετών μηνών. Αυτή η επαναλαμβανόμενη, αθροιστική, «συνεχούς δυναμικής» ζωγραφική αντιγράφει πιστά τον εξελικτικό τρόπο με τον οποίο δημιουργεί η Φύση. Επίσης και άλλοι παραλληλισμοί με τις φυσικές διαδικασίες εμφανίζονται σε αυτά τα καλλιτεχνικά δημιουργήματα αφού οι δημιουργοί τους εκμεταλλεύονται την βαρύτητα και χρησιμοποιούν τεράστιο καμβά χωρίς πλαίσιο που τον επεξεργάζονται και από τις τέσσερις πλευρές του σαν ένα μεγάλο φυσικό περιβάλλον.

Στην παρακάτω εικόνα⁴³, στα αριστερά είναι μια φωτογραφία χιονισμένου εδάφους, στο κέντρο τμήμα δάσους και στα δεξιά έργο του *Pollock* με τίτλο *'One: Number 31'* που ζωγραφίστηκε το 1950 (*Museum of Modern Art, USA*)

Η ομοιότητα του έργου του Pollock με τη φύση είναι φανερή.

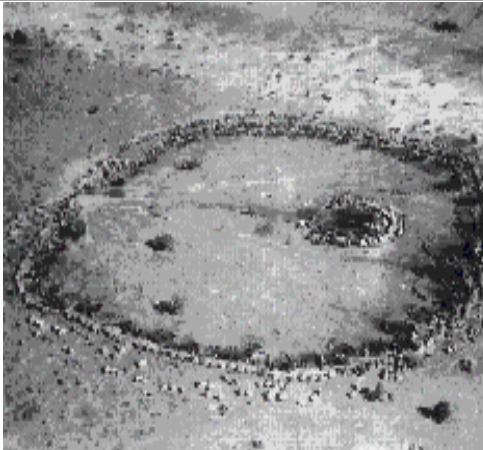


Γ5.2.2 Στην αρχιτεκτονική

Τα περισσότερα κτίρια που βλέπουμε γύρω μας έχουν κλασικά ευκλείδεια σχήματα γιατί έτσι είναι ευκολότερη η κατασκευή τους. Παρ' όλα αυτά υπάρχουν και κατασκευές που το αρχιτεκτονικό στυλ τους μιμείται τη φύση με

⁴³ Από την ιστοσελίδα του Πανεπιστημίου του New South Wales - Sydney Australia (School of Physics UNSW 2001) www.phys.unsw.edu.au ©

αποτέλεσμα αυτά να εμφανίζουν δομή φράκταλ. Οι κατασκευές αυτές δεν χαρακτηρίζουν κάποια συγκεκριμένη κουλτούρα, μια και συναντώνται τόσο στον δυτικό όσο και στον ανατολικό πολιτισμό. Συνήθως αυτά τα κτίρια είναι ναοί και είναι αξιοσημείωτο ότι για να προσεγγίσει ο άνθρωπος τον Θεό χρησιμοποιεί αυτήν την δομή. Οι παρακάτω φωτογραφίες είναι αφρικανικής, ευρωπαϊκής και ινδικής αρχιτεκτονικής⁴⁴.

		
Αφρικανική αρχιτεκτονική	Ευρωπαϊκή αρχιτεκτονική	Ινδική αρχιτεκτονική

Παρόμοια αρχιτεκτονική με αυτήν των Γοθικών καθεδρικών ναών έχει και ο



διάσημος πύργος του Gustave Eiffel (κατασκευάστηκε το 1889) στο Παρίσι που θυμίζει κατά κάποιο τρόπο ένα τρισδιάστατο τρίγωνο Sierpinski, μια πυραμίδα Sierpinski. Στο πεδίο της αρχιτεκτονικής, τέτοιου τύπου κατασκευές παρουσιάζουν πολύ μεγάλο ενδιαφέρον αφού μετά από

πάρα πολλά βήματα ένα τέτοιο οικοδόμημα θα αποτελείται –θεωρητικά τουλάχιστον – αποκλειστικά από συνδέσμους . Έτσι, οι κατασκευές τύπου

⁴⁴ <http://www.yale.edu/opa/v31.n15/story6.html>

Fractal έχουν το πλεονέκτημα να συνδυάζουν ελαχιστοποίηση της μάζας που χρησιμοποιείται στην κατασκευή συνεπώς και ελαχιστοποίηση του βάρους αλλά συγχρόνως και ανθεκτικότητα και ισορροπία, ιδιότητες τις οποίες εγγυάται η αυτοομοιότητα και η συμμετρία των συνδέσμων⁴⁵.

Επίσης δύο τουριστικά αξιοθέατα εμφανίζουν δομή φράκταλ. Το ένα είναι το χωριό⁴⁶ Cotswold του Bourton-on-the-Water που σε μια περιοχή του έχει κτισμένο ένα ομοίωμά του και στη σωστή γωνιά του ομοιώματος υπάρχει ένα ομοίωμα του ομοιώματος του χωριού και το άλλο είναι το περίφημο ιταλικό Κάστρο Del Monte του 12^{ου} αιώνα που το έχτισε ο Holy Roman Emperor Frederick II (1194 – 1250), ο οποίος ήταν Μαθηματικός. Το κάστρο έχει σχήμα κανονικού οκταγώνου και κάθε μια από τις κορυφές του είναι ένας μικρός πύργος και αυτός σχήματος κανονικού οκταγώνου.

Γ5.2.3. Στην λογοτεχνία

Όπως είδαμε προηγουμένως, πολύ πριν από την ανακάλυψη των φράκταλς και των νέων επιστημονικών ιδεών πολλοί καλλιτέχνες αποτύπωσαν στα έργα τους την επαναλαμβανόμενη δομή της αυτοομοιότητας αποκρυπτογραφώντας διαισθητικά την απλή μαγεία της φύσης. Αν εξετάσουμε τώρα το θέμα από φιλοσοφική οπτική γωνία επίσης θα δούμε ότι οι νέες επιστημονικές ιδέες περί του όλου που επαναλαμβάνεται και αυτοαναπαράγεται συνεχώς σε κάθε μέρος του έχουν τεράστια αξία, καθώς μας οδηγούν σε συνάντηση με τους μεγάλους πολιτισμούς του παρελθόντος.

Στον πάπυρο Rhind⁴⁷ των μαθηματικών της Αρχαίας Αιγύπτου (1650 π.Χ.) παρουσιάζεται ήδη ένα πρόβλημα, το No 79, η δομή του οποίου είναι φράκταλ. Το πρόβλημα λέει ότι: *"ένας Άρχοντας έχει μια έκταση γης με 7 σπίτια, σε κάθε σπίτι υπάρχουν 7 γάτες, κάθε γάτα ελέγχει 7 ποντίκια, κάθε ποντίκι κλέβει 7 στάχια, κάθε στάχτι έχει 7 σπόρους. Πόσα πράγματα έχει στη*

⁴⁵ Ο διάσημος αρχιτέκτονας και φιλόσοφος Buckminster Fuller (1895 – 1983) υποστήριζε πως η ευστάθεια μιας κατασκευής οφείλεται στους συνδέσμους και όχι στη μάζα και μια τέτοια κατασκευή τύπου φράκταλ έχει τη μέγιστη ευστάθεια (Who is R. Buckminster Fuller ? Design For Mobility. <http://www.bfi.org/>)

⁴⁶ Stewart, Ian ό.π., σ. 193

⁴⁷ Eves, H. ό. π., σ. 182

κυριότητά του ο Άρχοντας; " Η διατήρηση της κλίμακας σε κάθε υποεπίπεδο είναι χαρακτηριστική. Ο μεγάλος μαθηματικός *Moritz Cantor* (1829-1920) κατάλαβε ότι αυτό το πρόβλημα είναι ο αρχαίος πρόγονος ενός άλλου, νεώτερου προβλήματος που ήταν ιδιαίτερα δημοφιλές κατά τον Μεσαίωνα και το οποίο είχε διατυπώσει ο Ιταλός *Leonardo Fibonacci* (1175-1250) στο έργο του *Liber Abaci* (1202) ως εξής: *"7 ηλικιωμένες γυναίκες βρίσκονται στο δρόμο προς τη Ρώμη. Κάθε γυναίκα έχει 7 μουλάρια. Κάθε μουλάρι μεταφέρει 7 σάκους. Κάθε σάκος περιέχει 7 φραντζόλες. Για κάθε φραντζόλα υπάρχουν 7 μαχαίρια και κάθε μαχαίρι έχει 7 θήκες. Γυναίκες, μουλάρια, σάκοι, φραντζόλες μαχαίρια και θήκες, πόσα απ' όλα αυτά μαζί βρίσκονται στο δρόμο προς τη Ρώμη"*; 800 χρόνια μετά από την παραλλαγή του *Fibonacci* συναντάμε κάτι παρόμοιο σε ένα αγγλικό παιδικό τραγουδάκι⁴⁸. Επίσης η ευαισθησία και η εξάρτηση της συμπεριφοράς ενός δυναμικού συστήματος από τις αρχικές συνθήκες θυμίζει έντονα τους λαϊκούς στίχους που πολύ γραφικά τονίζουν ότι και η πιο ασήμαντη λεπτομέρεια (ένα καρφί) έχει τεράστια σημασία για το όλο (μια αυτοκρατορία)⁴⁹: *"Για ένα καρφί, χάθηκε το πέταλο. Για ένα πέταλο, χάθηκε το άλογο. Για ένα άλογο, χάθηκε ο καβαλάρης. Για ένα καβαλάρη, χάθηκε η μάχη. Για μια μάχη, χάθηκε η αυτοκρατορία."*

Γ5.2.4. Η Επίδραση των Φράκταλς στην σύγχρονη τέχνη

Η θεωρία του Χάους προκαλεί μια αληθινή επανάσταση σε όλα τα επίπεδα, όχι μόνο της επιστήμης αλλά και της τέχνης και γενικά του τρόπου σκέψης διαμορφώνοντας μια νέα Αισθητική αντίληψη όπου Επιστήμη, Τέχνη και πραγματική Ζωή είναι βαθιά εναρμονισμένες σ' ένα αξεδιάλυτο σύνολο.

Οι νέοι υπολογιστές με τα καταπληκτικά γραφικά τους αναδεικνύουν την εξαιρετική ομορφιά των φράκταλς η οποία έχει συνεπάρει ένα μεγάλο τμήμα του παγκόσμιου πληθυσμού που έχει κυριευτεί κυριολεκτικά από φρακταλομανία! Υπάρχουν χιλιάδες διευθύνσεις στο Internet με κύριο θέμα τους τα Φράκταλς. Άλλες είναι γκαλερί και άλλες έτοιμα προγράμματα με τα

⁴⁸ Eves, H. ό. π., σ. 183

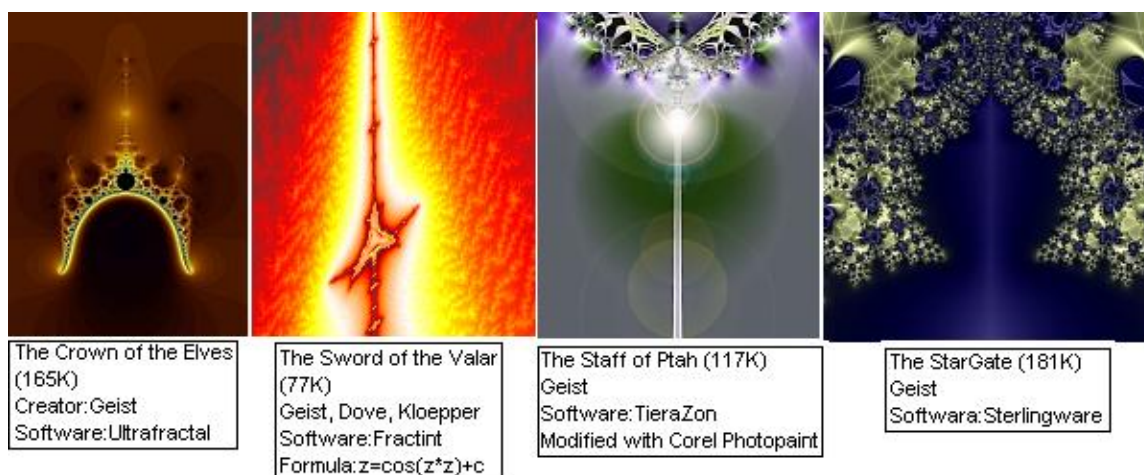
⁴⁹ Πλάνας, Γ. (2004). Η αισθητική του χάους. (<http://www.nea-acropoli.gr/publications/arthra/chaos.htm>)

οποία μπορεί κάποιος να κατασκευάσει το δικό του φράκταλ παίζοντας με αλλαγές παραμέτρων που αλλάζουν τα χρώματα σε ένα ήδη δημιουργημένο φράκταλ ή δημιουργώντας ένα διαφορετικό μεταβάλλοντας την επαναληπτική συνάρτηση που το δημιουργεί. Τέτοια προγράμματα είναι το Ultra Fractal, το Fractal Explorer, το Fractory κλπ. Το «The Spanky Fractal Database⁵⁰» είναι μια συλλογή από εικόνες fractals και προτεινόμενο software για ελεύθερη χρήση. Απ' αυτή τη διεύθυνση μπορεί κανείς να συνδεθεί με πολλές άλλες διευθύνσεις σχετικές με τα fractals. Φυσικά δεν είναι ανάγκη να ξέρει κάποιος μαθηματικά για τέτοιου είδους δημιουργίες γιατί το λογισμικό αυτών των προγραμμάτων είναι ήδη έτοιμο. Οι μαθηματικοί όμως που δημιουργούν αυτά τα λογισμικά είναι σίγουρα καλλιτέχνες μιας καινούριας μορφής τέχνης, της ψηφιακής τέχνης. Η ψηφιακή τέχνη είναι απλά τέχνη που δημιουργείται με τη βοήθεια των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Την χρησιμοποιούν βοηθητικά και παραδοσιακοί καλλιτέχνες, όπως ζωγράφοι, φωτογράφοι, γλύπτες κλπ γιατί τους δίνει την καταπληκτική ευκολία αναίρεσης μιας λανθασμένης τους ενέργειας (undo). Η διαφορά όμως της φράκταλ Τέχνης (Fractal Art) από τις παραδοσιακές είναι ότι δεν χρησιμοποιεί βοηθητικά τον υπολογιστή αλλά οφείλει την ύπαρξή της στον υπολογιστή και εξελίσσεται συγχρόνως με αυτούς. Μια μόνο εικόνα φράκταλ για να δημιουργηθεί απαιτεί τρισεκατομμύρια βαρετών επαναληπτικών υπολογισμών που είναι αδύνατο να εκτελεστούν χωρίς την ενεργό συμμετοχή ενός υπολογιστή. Οι φράκταλ καλλιτέχνες επιλέγουν την γεννεσιουργό συνάρτηση (image generator)⁵¹ και κατόπιν τις κατάλληλες παραμέτρους που μεταβάλλουν το σχήμα, το χρώμα, την φωτεινότητα, κλπ. της εικόνας έτσι ώστε η εικόνα που θα προκύψει να είναι αυτή που τους εκφράζει. Θα μπορούσε κάποιος να παραλληλίσει την καλλιτεχνική τους δημιουργία με αυτήν του γλύπτη που σε ένα κομμάτι ξύλου βλέπει κάτι κρυμμένο που περιμένει, με κατάλληλη επεξεργασία, να αποκαλυφθεί.

⁵⁰ <http://spanky.triumf.ca/>

⁵¹ <http://www.fractalus.com/info/fractalart.htm>

Οι παρακάτω εικόνες⁵² είναι έργα τέχνης που δημιουργήθηκαν από τα αναφερόμενα προγράμματα κατασκευής φράκταλς:



Τα φράκταλς όμως, εκτός του ότι είναι τα ίδια τους υλικό για καλλιτεχνική δημιουργία, μας βοηθούν και να αναπαραστήσουμε τη φύση αφού όπως είδαμε είναι το γεωμετρικό μοντέλο της. Παρέχουν λοιπόν ένα θαυμάσιο εργαλείο δημιουργίας καταπληκτικών σκηνικών που χρησιμοποιούνται τελευταία πολύ και στον κινηματογράφο, ειδικά στις ταινίες επιστημονικής φαντασίας. Πριν από λίγα χρόνια ο Loren Carpenter έφτιαξε με υπολογιστή μια ταινία που αναπαριστούσε μια πτήση πάνω από ένα φράκταλ τοπίο και προσλήφτηκε αμέσως από την Pixar – το τμήμα γραφικών από υπολογιστές της κινηματογραφικής εταιρίας Lucasfilms. Τα φράκταλς χρησιμοποιήθηκαν και στην ταινία: *Σταρ Τρεκ Νο 2: Η εκδίκηση του Κάαν*, για το τοπίο του πλανήτη Genesis. Επίσης χρησιμοποιήθηκαν στην ταινία: *Η επιστροφή των Τζεντάι* για να δημιουργήσουν τη γεωγραφία των δορυφόρων του Endor και το περίγραμμα του Αστέρα του Θανάτου. Ο Peter Orpenheimer έχει χρησιμοποιήσει τη διαδικασία διακλάδωσης των φράκταλς για να δημιουργήσει με την βοήθεια του υπολογιστή έργα αφηρημένης τέχνης καθώς επίσης ρεαλιστικά και γεμάτα ζωντάνια δέντρα και φυτά. Ο Richard Voss, ο πρωτοπόρος σ' αυτό το πεδίο εφαρμογών, εξακολουθεί ακόμα να δημιουργεί: μια πρόσφατη επιτυχία του είναι η δημιουργία συννέφων στον υπολογιστή, που είναι απόλυτα πειστικά.⁵³

⁵² <http://www.io.com/~iareth/fractal.html>

⁵³ Stewart, Ian. (1988). *Παίζει ο θεός ζάρια; Η επιστήμη του Χάους* (10^η έκδ.). Αθήνα: Τραυλός, σ. 266

Επειδή σε αυτήν την εργασία τονίστηκε η αμφίδρομη , ανατροφοδοτική σχέση επιστήμης και κοινωνίας, με την τέχνη να αποτελεί μια από τις κυριότερες γέφυρες επικοινωνίας τους, αξίζει να αναφέρω και τις πιο βατές στο ευρύ κοινό γέφυρες, αυτές του κινηματογράφου και της διαφήμισης. Όσον αφορά τον κινηματογράφο, το πιο αντιπροσωπευτικό είναι το έργο του Tom Stoppard, *Arcadia*, που προσφέρει στους δασκάλους των μαθηματικών και των κλασικών σπουδών την ευκαιρία να ενώσουν τις δυνάμεις τους κατά ένα μοναδικό και ανταποδοτικό τρόπο⁵⁴. Το σενάριο διαδραματίζεται σε δύο περιόδους. Στην αρχή του έργου (αρχές 19^{ου} αιώνα) συναντάμε μια δεκατριάχρονη μαθήτρια, την Thomasina , που έχει αναπτυσσόμενη μαθηματική σκέψη και σταδιακά ανακαλύπτει την γεωμετρία των ακανόνιστων μορφών ("Thomasina's geometry of irregular forms" ,aka fractal geometry) και τον 2^ο νόμο της Θερμοδυναμικής, βάζοντας τα θεμέλια της θεωρίας του Χάους. Κατόπιν, στην σύγχρονη εποχή, συναντάμε την Valentine, μια μαθηματικό που προσπαθεί να εξηγήσει την άνοδο και πτώση του πληθυσμού των αγριόγαλλων μιας περιοχής χρησιμοποιώντας επαναληπτική διαδικασία και που η τύχη φέρνει να γνωρίσει την προηγούμενη δουλειά της Thomasina. Καθώς το σενάριο περιπλέκεται, ο θεατής έρχεται αντιμέτωπος με όλη τη σύγχρονη θεώρηση της φυσικής (θεωρία του Χάους) και των



μαθηματικών (Γεωμετρία των Φράκταλς). Όσο αφορά την διαφήμιση, αξίζει να θυμίσουμε εκείνη την πολύ γνωστή και πετυχημένη του γαλλικού τυριού⁵⁵ "*La vache qui rit*", με το καταπληκτικό γραφικό πάνω στο χάρτινο κουτί της συσκευασίας του, που είναι ένα Φράκταλ: απεικονίζεται μια χαμογελαστή αγελάδα που φοράει για σκουλαρίκια το ίδιο το κουτί. Αν παρατηρήσουμε την εικόνα θα δούμε φυσικά ότι τα σκουλαρίκια δείχνουν σε μικρότερη κλίμακα την ίδια χαμογελαστή αγελάδα που φορά σκουλαρίκια που αναπαράγουν την ίδια εικόνα σε ακόμα μικρότερη κλίμακα, κοκ. Η φράκταλ τέχνη, λοιπόν, είναι το υβρίδιο των

⁵⁴ Devaney , Robert L. Chaos, Fractals, and Arcadia.(<http://math.bu.edu/DYSYS/arcadia/sect1.html>)

⁵⁵ http://www.art.com/asp/sp-asp/_/pd--10119374/Gruyeres_de_la_Vache_qui_Rit.htm (διαφήμιση του Benjamin Rabier)

Μαθηματικών και της Τέχνης και αποτελεί ένα καινούριο μέσο έκφρασης που βρίσκεται σε συνεχή εξέλιξη καταγράφοντας αυτήν την νέα Αισθητική αντίληψη όπου Επιστήμη, Τέχνη και πραγματική Ζωή είναι βαθιά εναρμονισμένες σ' ένα αξεδιάλυτο σύνολο.

Γ5.2.5. Στην μόδα!



Όλη αυτήν την φρακταλομανία, δεν θα μπορούσε να μην την εκμεταλλευτεί και η μόδα κατασκευάζοντας αντίστοιχα προϊόντα, είτε υφάσματα και κάρτες με σχέδια εικόνες φράκταλ, που σημειωτέον είναι πολύ εύκολο να αντιγραφούν και αναπαραχθούν από οποιοδήποτε υπολογιστή (πλεονέκτημα ή μειονέκτημα της ψηφιακής τέχνης), είτε κοσμήματα. Η παρακάτω σελίδα αντιγράφηκε

από τη διεύθυνση: [http : //www .allegria. com. Au / Prod_Fractals.html](http://www.allegria.com.Au/Prod_Fractals.html) και τα αντικείμενα που εκτίθενται, κολιέ, βραχιόλια, σκουλαρίκια, κάρτες, μπορεί ο καθένας να τα παραγγείλει με την πιστωτική του κάρτα.



Δ. Τα Φράκταλς στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

Δ1. Τα μαθηματικά μέσα στην τάξη

Δ1.1. Το όχημα της γεωμετρίας – Διεθνείς προβληματισμοί

Οι έρευνες έχουν αποκαλύψει ότι, παρόλο που τα μαθηματικά θεωρούνται ένα από τα σπουδαιότερα μαθήματα των σχολικών προγραμμάτων, πολλοί μαθητές έχουν αναπτύξει μια αρνητική διάθεση απέναντί τους και αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη μάθησή τους⁵⁶. Επίσης, κατά τη διάρκεια ιδίως των δύο τελευταίων δεκαετιών (ΟΟΣΑ:PISA 2000, 2003), έχει αναπτυχθεί μια αυξανόμενη ανησυχία καθώς και ένα γενικό ενδιαφέρον της κοινωνίας για την ανεπαρκή ικανότητα των αποφοίτων και των ενηλίκων να εφαρμόσουν στην καθημερινότητά τους τα μαθηματικά που έμαθαν στο σχολείο. Η ανάγκη επομένως για αλλαγές στον τρόπο που εξετάζουμε τη μαθηματική γνώση είναι έντονη. Ο Cockcroft⁵⁷ δίνει έναν καινούριο ορισμό των μαθηματικών θεωρώντας τα απλά σαν μέσο επικοινωνίας, τονίζει την αξία της διαδικασίας καθώς και της ποιότητας της διδασκαλίας τους και συνιστά τη χρήση διαφορετικών προσεγγίσεων στη διδασκαλία, όπως πρακτικές δραστηριότητες, έρευνες, συζήτηση και εμπέδωση.

Ειδικά το μάθημα της γεωμετρίας στη Β/θμια εκπαίδευση, είναι το μέσο με το οποίο επιτυγχάνεται ευκολότερα η παροχή γενικής μαθηματικής παιδείας γιατί αποτελεί ένα εξαιρετικό παράδειγμα ενός απλού και κατανοητού μαθηματικού συστήματος. Η διδασκαλία αυτού του μαθήματος κατέχει ένα κεντρικό κομμάτι στα αναλυτικά προγράμματα των σχολικών μαθηματικών όλων των χωρών γιατί η Γεωμετρία μας βοηθάει όχι μόνο να περιγράψουμε, να αναλύουμε και να καταλαβαίνουμε το φυσικό μας κόσμο αλλά εισάγει και

⁵⁶ Keitel, C., Damarow, P., Bishop, A. and Gerdes, P. (1989). *Mathematics Education and Society*. Paris: Unesco Document Series.

⁵⁷ W. H. Cockcroft, W. (1982). *Mathematics Counts (The Cockcroft report)*. HMSO (Her Majesty's Stationery Office).

«μαθηματική εμπειρία» συμπληρώνοντας και υποστηρίζοντας τη μελέτη και άλλων μαθηματικών αντικειμένων, όπως π.χ. είναι ο «αριθμός» και η «μέτρηση». Υπάρχει όμως τόσο μεγάλη και ενδιαφέρουσα ύλη, που είναι αδύνατο όλη να συμπεριληφθεί σε ένα αναλυτικό πρόγραμμα. Προκύπτει επομένως ένα θεμελιώδες πρόβλημα: Πόση αλλά και τι είδους γεωμετρία πρέπει να περιλαμβάνει ένα αναλυτικό πρόγραμμα; Τη δεκαετία του '60⁵⁸, η ανάπτυξη των «νέων μαθηματικών» πρόσθεσε και άλλη πολυπλοκότητα στις αποφάσεις για τη γεωμετρία, μια και τα Αναλυτικά Προγράμματα των περισσότερων χωρών αναθεωρήθηκαν με σκοπό να βασίσουν τα περισσότερα σχολικά μαθηματικά πάνω στις συναρτήσεις και να τα κατευθύνουν σε υπολογισμούς και στη γραμμική άλγεβρα. Αυτό είχε σαν αντίκτυπο να περιοριστεί η ύλη της ευκλείδειας γεωμετρίας (Royaumont 1959) και να δοθεί έμφαση στην αναλυτική γεωμετρία, στους μετασχηματισμούς (συμπεριλαμβανομένων των πινάκων) και στην τοπολογία. Επιπλέον η εισαγωγή της στατιστικής και η εστίαση σε πολλές χώρες στον αριθμητισμό συρρίκνωσε ακόμα περισσότερο το χρόνο διδασκαλίας της γεωμετρίας. Γενικά υπήρξε μια έντονη στροφή στις γενικότητες των συνόλων και της λογικής, πρόωρος φορμαλισμός και αποθάρρυνση της διαίσθησης με αποτέλεσμα να ωφεληθούν μόνο οι καλοί μαθητές (Usiskin Z, 1985).⁵⁹

Σύμφωνα με μια τελευταία αναφορά της *Royal Society και του Joint Mathematical Council(2001)*⁶⁰, η μέγιστη βελτίωση στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών και ειδικά και της Γεωμετρίας θα έλθει μόνο μέσω της ανάπτυξης μιας τελείως νέας παιδαγωγικής. Βέβαια αυτή η ανάπτυξη αποτελεσματικών διδακτικών μεθόδων έχει αποτελέσει θέμα διαμάχης για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα, όπως εξάλλου αποκαλύπτουν οι αναρίθμητες πληροφορίες που υπάρχουν για τη διδασκαλία και μάθηση της γεωμετρίας. Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι οι αναφορές του Mathematical

⁵⁸ Jones,K. (2000). Critical Issues in the Design of the School Geometry Curriculum. In Bill Barton (ED), *Reading in Mathematics Education*. Auckland, New Zealand : University of Auckland, 75-91

⁵⁹ Τουμάσης, Μ. (1987).Μια ανασκόπηση του παγκόσμιου σκηνικού της Β/θμιας εκπαίδευσης, τα τελευταία 200 χρόνια, *Ευκλείδης γ 16*. Αθήνα: ΕΜΕ, σ. 38

⁶⁰ Keith Jones and Taro Fujita. (2001). Developing a new pedagogy for Geometry. British Society for Research into Learning Mathematics. *From Informal Proceedings 21-1 (BSRLM) (bsrlm.org.uk)*

Association UK (για παράδειγμα το 1923 και 1938) στην Αγγλία αλλά και διεθνείς μελέτες όπως η τελευταία μελέτη του ICMI (The International Commission on Mathematical Instruction)⁶¹ με επιβλέποντες τους Mammana και Villani (1998). Όλες οι υπάρχουσες αναφορές περιστρέφονται γύρω από την έλλειψη επιτυχίας στη διδασκαλία της γεωμετρίας και της δυσκολίας σχεδιασμού ενός κατάλληλου προγράμματος για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Έρευνες όπως αυτές του Williams (1980)⁶², και του Senk (1985)⁶³, που διεξήχθησαν σε πολλά σχολεία όταν στη σχολική γεωμετρία κυριαρχούσε ο τύπος της Ευκλείδειας παράδοσης, αποκαλύπτουν πόσο λίγα πράγματα μπορούσαν να κάνουν οι μαθητές που ακολούθησαν αυτό το πρόγραμμα της γεωμετρίας. Οι λόγοι γι' αυτήν την έλλειψη επιτυχίας στη διδασκαλία της γεωμετρίας, ειδικά όταν αυτή κυριαρχείται από αποδείξεις που ακολουθούν την Ευκλείδεια παράδοση της τυπικής αξιωματικής δομής, είναι ποικίλοι. Για παράδειγμα, οι έρευνες που έχουν γίνει μέχρι τώρα δείχνουν ότι οι μαθητές αποτυγχάνουν να δουν την αναγκαιότητα των αποδείξεων γιατί πολύ συχνά τους ζητούνται να αποδείξουν πράγματα που είναι τελείως φανερά (Jones και Rodd⁶⁴, 2001, και Dreyfus⁶⁵, 1999). Ένα άλλο μεγάλο πρόβλημα, όπως προσδιορίστηκε από μελέτη του ICMI(1998), είναι ότι αντίθετα με την Άλγεβρα, «ένα απλό, καθαρό, "ιεραρχικό" μονοπάτι που οδηγεί από απλές αρχικές έννοιες στα πιο προχωρημένα κατορθώματα της γεωμετρίας.... δεν έχει βρεθεί ακόμα – και μάλλον δεν υπάρχει καθόλου....ακόμα και βασικές έννοιες της γεωμετρίας, όπως αυτές της γωνίας και της απόστασης πρέπει να αναθεωρηθούν σε διαφορετικά στάδια και από διαφορετικές σκοπιές.»⁶⁶. Αυτό σημαίνει ότι, εκ των πραγμάτων, η γνώση που

⁶¹ Mammana, C. and Villani, V. (Eds.). (1998). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. an ICMI study. Dordrecht: Kluwer.

⁶² Williams, E. (1980) An investigation of senior high school students' understanding of the nature of mathematical proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 11, 165-166.

⁶³ Senk S. L. (1985) How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher*, 78(6), 448-456.

⁶⁴ Jones, K. and Rodd, M. M.. (2001). Geometry and Proof, *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 21(1), 95-100.

⁶⁵ Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics* 38(1-3), 85-109.

⁶⁶ Mammana & Villani, ό.π., σ.337

αποκτάται με το μάθημα της γεωμετρίας δεν μπορεί να είναι “διαδικαστική” (Procedural Knowledge) αφού δεν μπορεί να κατασκευαστεί καθαρά ιεραρχικά ακολουθώντας συγκεκριμένα επιτυχή βήματα, αλλά θεμελιώδης, εννοιολογική (Conceptual Knowledge). Οι Hilbert και Lefevre (1986)⁶⁷ δηλώνουν ότι το χαρακτηριστικό αιχμής της εννοιολογικής γνώσης βρίσκεται στις πλούσιες συσχετίσεις που παρέχει ανάμεσα σε διάφορα κομμάτια “πληροφορίας”. Αυτού του είδους η γνώση μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας καλά δομημένος ιστός που μπορεί ευέλικτα να προσπελάσει και να αποσπάσει οποιαδήποτε πληροφορία εντάσσοντάς την σε ένα ευρύτερο πλαίσιο.

Οι βασικές τάσεις που επικρατούν στη σχολική γεωμετρία είναι δύο: Η πρακτική «ρεαλιστική» τάση με κλασσικό παράδειγμα την Ολλανδία και μια πιο αυστηρή θεωρητική προσέγγιση, που είναι φανερή στην Γαλλία και Ιαπωνία. Μάλιστα η Ιαπωνία, όπως και η Ελλάδα είναι μία από τις λίγες χώρες στην οποία διδάσκεται η συμπερασματική αιτιολόγηση (απόδειξη) σε όλους τους μαθητές από την αρχή της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (13-15 χρονών) σε τάξεις μικτών επιδόσεων. Στην Αγγλία, μετά την διαπίστωση της χαμηλής επίδοσης των μαθητών στα μαθηματικά (GCSE, 1986)⁶⁸, οι αναθεωρητές του τότε ισχύοντος Α.Π. υπήρξαν πολύ προσεκτικοί στην απαίτηση των αποδείξεων αξιωματικού συμπερασματικού στυλ από την πλειοψηφία των μαθητών και η έμφαση δόθηκε περισσότερο στην επικοινωνία της μαθηματικής αιτιολόγησης, απ’ ότι στην παραγωγή αποδείξεων κατά την ευκλείδεια παράδοση. Στο Εθνικό τους Αναλυτικό Πρόγραμμα του 1989 το θέμα της μαθηματικής αιτιολόγησης κατευθύνθηκε στον επιδιωκόμενο στόχο «Χρησιμοποιώντας και εφαρμόζοντας μαθηματικά». Σαφείς απαιτήσεις για απόδειξη σύμφωνα με την παραδοσιακή μαθηματική έννοια, καθορίστηκαν για τους μαθητές πολύ υψηλών επιδόσεων, στο στάδιο πριν το πανεπιστήμιο (A-level). Η έλλειψη αυτή της έμφασης στην «απόδειξη» προκάλεσε αντιδράσεις από πολλούς μαθηματικούς που διδάσκουν στην δευτεροβάθμια (London Mathematical Society (LMS), 1995) αλλά και διεθνώς το θέμα των σχολικών

⁶⁷ Chae, S.D. & Tall, T. Aspects of the construction of conceptual knowledge: the case of computer-aided exploration of period doubling. *From Informal Proceedings 19-2 (BSRLM)* (<http://bsrlm.org.uk>)

⁶⁸ Jones, K. (2001). Geometry and Proof. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 21(1), 95-100. (<http://bsrlm.org.uk>)

μαθηματικών πυροδοτεί πολλές καταστάσεις, οξείς κατά καιρούς, με αποτέλεσμα να έχει γίνει γνωστό ως «πόλεμος των μαθηματικών» (math wars).

Η σύγχρονη τάση στη διδασκαλία της Γεωμετρίας είναι ο συγκερασμός των δύο προαναφερθέντων τάσεων, που επιτυγχάνεται με προσεκτικό σχεδιασμό των μαθημάτων έτσι να αναπτύσσεται σταδιακά η συμπερασματική αιτιολόγηση μέσα από κατάλληλες πρακτικές δραστηριότητες. Αυτή η τάση είναι φανερή στα ΑΠ της Αγγλίας και των ΗΠΑ και μάλιστα στις ΗΠΑ υπάρχει επιπλέον και μια διαμορφωμένη ισχυρή τάση για «ενοποιημένα» μαθηματικά:

Στο σημερινό ισχύον Αναλυτικό Πρόγραμμα της Αγγλίας (National Curriculum for England (DfEE) 1999), περιλαμβάνονται τόσο οι τυπικές αποδείξεις όσο και η πρακτική αιτιολόγηση του τύπου «χρησιμοποιώ και εφαρμόζω». Ακόμα και στο "θεμέλιο" επίπεδο των παιδιών χαμηλής επίδοσης 14-16 χρονών (Key Stage 4) οι μαθητές διδάσκονται να ξεχωρίζουν τις πρακτικές αποδείξεις από τις τυπικές και να δείχνουν τα σταδιακά βήματα ενός συμπεράσματος (step-by-step deduction) στην επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος⁶⁹.

Στις ΗΠΑ, ήδη από τη δεκαετία το '80, οι πιο πολλοί εκπαιδευτικοί συμφωνούσαν με την προσέγγιση της Βελτιωμένης Μελέτης του Αναλυτικού Προγράμματος της Β/θμιας εκπαίδευσης (Secondary School Mathematics Curriculum Improvement Study (SSMCIS) (Sitomer 1973)). Αυτή η προσέγγιση είναι μια σύνθετη διδασκαλία των μαθηματικών, κατά την οποία η Γεωμετρία, η Άλγεβρα και η Ανάλυση διδάσκονται σαν ένα όλο, σαν συμπληρωματικές μέθοδοι ή μια της άλλης, σ' όλη τη διάρκεια της Β/θμιας εκπαίδευσης. Αυτό το ενοποιημένο πρόγραμμα των μαθηματικών αρχικά εφαρμόστηκε μόνο στα σχολεία της Νέας Υόρκης και στις γειτονικές της πολιτείες⁷⁰ αλλά αργότερα επικράτησε, αφού αυτή η αντιμετώπιση των

⁶⁹ Jones, K. and Rodd, M. (2001). Geometry and Proof, *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 21(1), 95-100.

⁷⁰ Craine, T. (1985). Integrating Geometry into the Secondary Mathematics Curriculum. In *The Secondary School Mathematics Curriculum* (Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), edited by Christian R. Hirsch), 119

μαθηματικών σαν ένα όλο, φάνηκε καθαρά αργότερα, στα Standards 2000. Τα Standards αυτά (“Principles and Standards for School Mathematics”) είναι ένα πλαίσιο αρχών και στόχων για τη διδασκαλία των σχολικών μαθηματικών στις ΗΠΑ και είναι μέρος ενός διευρυμένου αναλυτικού προγράμματος σπουδών για τα μαθηματικά που εκπονήθηκε το 2000 από το Εθνικό συμβούλιο Δασκάλων Μαθηματικών των ΗΠΑ, του NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). Η σημασία των Standards είναι πολύ μεγάλη γιατί σ’ αυτό εξετάζονται θέματα εκπαιδευτικών στόχων και πολιτικών που βασίζονται σε πρόσφατες έρευνες για τη διδασκαλία των μαθηματικών, λαμβάνονται υπόψη οι θέσεις των σημαντικών επιστημονικών ενώσεων και κοινοτήτων και η διαδικασία παραγωγής τους ήταν ανοικτή σε όλους όσους ασχολούνται επαγγελματικά με τα μαθηματικά. Στα Standards⁷¹ τονίζεται ότι η Γεωμετρία προσφέρει τρόπους περιγραφής, ανάλυσης και κατανόησης του κόσμου και της ομορφιάς της δομής του και ότι οι γεωμετρικές ιδέες μπορούν να είναι χρήσιμες και σε άλλες περιοχές των μαθηματικών καθώς και σε διάφορες εφαρμογές. Αλλά ακόμα περισσότερο⁷², *“οι μαθητές της Β/θμιας εκπαίδευσης, πρέπει να αποκτήσουν την ικανότητα παράστασης γεωμετρικών ιδεών με μια μεγάλη ποικιλία τρόπων –συμπεριλαμβανομένων συντεταγμένων, δικτύων, μετασχηματισμών, διανυσμάτων και πινάκων – που επιτρέπουν πολλαπλές προσεγγίσεις σε γεωμετρικά προβλήματα και συνδέουν γεωμετρικές ερμηνείες με άλλα περιβάλλοντα”*. Τονίζεται λοιπόν η δύναμη των οπτικών αναπαραστάσεων που παρέχει η Γεωμετρία στην εμπέδωση και έκφραση μαθηματικών εννοιών αλλά και επιπρόσθετα τονίζεται ότι στόχος των Principles and Standards για όλους τους μαθητές από 15 έως 18 χρονών (grades 9-12) είναι να: *«χρησιμοποιούν γεωμετρικά μοντέλα για να αποκτήσουν σε βάθος γνώση και να μπορούν να απαντήσουν σε ερωτήσεις – ζητήματα σε άλλες περιοχές των μαθηματικών»*⁷³.

Επίσης, είναι σημαντικό να τονιστεί και το ότι με την μεγάλη ανάπτυξη της τεχνολογίας, το μάθημα της γεωμετρίας εμπλουτίζεται και με ένα πολύτιμο εργαλείο, αυτό των Η/Υ, που μεγεθύνει αυτή τη δύναμη των οπτικών

⁷¹ www.Standards.nctm.org

⁷² Roger, D. & o. (2003). About this Book. *Navigating through Geometry in Grades 9-12*. USA: NCTM,

⁷³ Roger, D. & o. ό.π., σ. 61

αναπαραστάσεων που παρέχει η γεωμετρία, αφού τις αναπτύσσει σε ένα δυναμικό περιβάλλον ευέλικτο αλλά και φιλικό με τη νέα γενιά των μαθητών. Η Heid (1988) έδειξε ότι οι μαθητές μιας πειραματικής τάξης που χρησιμοποιούσαν υπολογιστές σαν εργαλείο οπτικοποίησης γραφικών παραστάσεων και χειρισμού συμβολικών διαδικασιών (τυπικής μαθηματικής γλώσσας) ανέπτυξαν ευρύτερη εννοιολογική κατανόηση απ' ότι οι μαθητές μιας παραδοσιακής τάξης εστιασμένης κυρίως σε συμβολικές διαδικασίες. Μάλιστα βρήκε ότι οι μαθητές που αποκτούσαν εννοιολογική γνώση με αυτόν τον τρόπο ήταν ικανοί να αναπτύξουν περαιτέρω τις έννοιες σε σύγκριση με αυτούς που ακολουθούσαν διαδικαστική (Procedural) γνώση.

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να τονιστεί η μεγάλη συμβολή της γεωμετρίας στην κατανόηση αφηρημένων εννοιών αφού ακόμα και στην ελληνική εκπαίδευση, όπου οι κλάδοι των μαθηματικών διδάσκονται ξεχωριστά χωρίς την παραμικρή ενοποίηση, επικαλούμαστε τη βοηθητική παρέμβαση της γεωμετρίας και σε άλλα πεδία των μαθηματικών, όπως π.χ. στην Ανάλυση, στην διαισθητική προσέγγιση των πραγματικών ακολουθιών. Οι ακολουθίες επιπέδων σχημάτων θεωρούνται από τους ερευνητές σημαντικό μέσο για να εισάγουν τις πραγματικές ακολουθίες⁷⁴, τις οποίες οι μαθητές (αλλά και οι φοιτητές) αντιμετωπίζουν σαν κάτι το τεχνητό, μια χωρίς "νόημα" άπειρη διαδοχή αριθμών. Οι μαθητές θέλουν να ξέρουν από που "ήρθαν" οι όροι της ακολουθίας γι' αυτό αισθάνονται πιο άνετα με αριθμούς που αποτελούν μέτρα συγκεκριμένων μεγεθών παρά όταν οι αριθμοί αποτελούν οι ίδιοι ανεξάρτητα αντικείμενα. Στην υπάρχουσα ύλη των μαθηματικών του Λυκείου δεν μελετάμε θεωρητικά τα όρια επιπέδων σχημάτων (ίσως σε μερικές ασκήσεις)⁷⁵, όμως συχνά τα επικαλούμαστε για να αντιμετωπίσουμε μαθηματικές καταστάσεις που απαιτούν τη διαισθητική προσέγγιση τέτοιων ορίων. Για παράδειγμα όταν, θέλουμε να βρούμε τον τύπο της περιμέτρου του κύκλου στηρίζομαστε στην διαισθητική «απόδειξη» ότι τα κανονικά εγγεγραμμένα πολύγωνα (n -πλευρών)

⁷⁴ Μαμωνά-Downs. (1998). Οριακές διαδικασίες επιπέδων σχημάτων και η παιδαγωγική τους σημασία. *Πρακτικά 15ου πανελληνίου συνέδριου της ΕΜΕ*, ΧΙΟΣ 1998

⁷⁵ Χαρακτηριστικά αναφέρω το 2^ο παράδειγμα και τις ασκήσεις 3 και 4 της Β' ομάδας της παραγράφου 3.5 (σελ. 115-117) του σχολικού βιβλίου της Άλγεβρας για την Β' Λυκείου των Ανδρεαδάκη & ά. (ΕΚΔΟΣΗ Θ, 1999), Αθήνα: ΟΕΔΒ

συγκλίνουν στον κύκλο⁷⁶ (Γεωμετρία Β΄ Λυκείου). Επίσης στην Γ΄ Λυκείου όταν θέλουμε να εισάγουμε την έννοια της παραγώγου πραγματικής συνάρτησης σε ένα σημείο θεωρούμε ευθείες γραμμές (χορδές) που "συγκλίνουν" στην εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης σε εκείνο το σημείο⁷⁷. Στην ίδια τάξη η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης (ολοκλήρωμα Riemann) εισάγεται σαν όριο ακολουθίας αθροισμάτων εμβαδών ορθογωνίων⁷⁸. Είναι λοιπόν σπουδαίο το όχημα της γεωμετρίας στην ανάπτυξη σπουδαίων μαθηματικών εννοιών αφού προσφέρει το απαραίτητο υπόβαθρο ανάπτυξής τους.

Δ1.2. Ανάπτυξη νέων διδακτικών μεθόδων

Η απόδειξη καθώς και η διαδικασία απόδειξης είναι το κέντρο των μαθηματικών. Στο περιβάλλον μιας τάξης που παράγει μαθηματικά, φυσικά και περιμένουμε από τους μαθητές μας να εξηγήσουν και να στηρίξουν τις αποδείξεις τους. Για τους δασκάλους που διδάσκουν σύμφωνα με τις νέες τάσεις των Α.Π. η πρόκληση είναι να αναπτύξουν διδακτικές μεθόδους που θα κινητοποιήσουν τους μαθητές και θα τους απομακρύνουν από την (τόσο γνωστή στο παρελθόν) αποκλειστική μέθοδο της αποστήθισης. Αυτό σίγουρα απαιτεί νέες διδακτικές προσεγγίσεις. Η τελευταία αναφορά για τη διδασκαλία και μάθηση της γεωμετρίας από την Royal Society και το Joint Mathematical Council (2001)⁷⁹ επισημαίνει την αποτυχία των σημερινών παιδαγωγικών μοντέλων που χρησιμοποιούν ελάχιστα διδακτικά εργαλεία (όπως πρακτικά καθήκοντα, εξερευνήσεις, κατασκευές, δυναμική γεωμετρία) και τα οποία στηρίζονται σε διδακτικές μεθόδους που προωθούν κατά κύριο λόγο την απομνημόνευση. Η ίδια αναφορά υποστηρίζει την διεύρυνση του αναλυτικού προγράμματος ώστε να περιληφθούν στην ύλη και σύγχρονα θέματα, την περαιτέρω ανάπτυξη των διδακτικών μεθόδων καθώς και τη χρήση της νέας τεχνολογίας των Η/Υ. Στο παράρτημα της αναφοράς δίνονται χρήσιμα παραδείγματα ολοκληρωμένων προσεγγίσεων διδασκαλίας της γεωμετρίας σε συγκεκριμένα θέματα. Και σε αυτά τα παραδείγματα συνδέεται η γεωμετρία και

⁷⁶ Αργυρόπουλος, Η. & ά. (2003). *Ευκλείδεια Γεωμετρία*. Αθήνα: ΟΕΔΒ, σ. 243

⁷⁷ Ανδρεαδάκης, Σ. & ά. (2001). *Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης*. Αθήνα: ΟΕΔΒ, 211

⁷⁸ Ανδρεαδάκης, Σ. & ά. ό.π., σ. 331

⁷⁹ Keith Jones and Taro Fujita. (2001) ο.π.

με άλλες περιοχές των μαθηματικών όπως η Άλγεβρα, καλλιεργείται η δεξιότητα χειρισμού δεδομένων (handling data) και ολοκληρώνεται με τη συσχέτισή της και με άλλα αντικείμενα όπως η επιστήμη, η ιστορία και η τέχνη. Αυτή η διεύρυνση του αναλυτικού προγράμματος προτείνεται και στην προαναφερθείσα μελέτη του ICMI, όπου αναφέρεται το εξής⁸⁰: *«Σε τελικό συμπέρασμα, το παραδοσιακό περιεχόμενο της γεωμετρίας στις τελευταίες βαθμίδες του λυκείου δεν είναι λιγότερο σημαντικό για τα μαθηματικά και την επιστήμη απ' ό,τι ήταν προηγουμένως, αλλά η επιμονή στην κυριαρχία του παραδοσιακού αναλυτικού προγράμματος (της ευκλείδειας γεωμετρίας) όχι μόνο είναι η αιτία ετήσιου ρυθμού μείωσης κατά 50% των μαθητών (μετά την ηλικία των 15 χρονών-9th grade) που ασχολούνται με τα μαθηματικά αλλά συνεισφέρει και στη δημιουργία αρνητικών στερεοτύπων για αυτά»*.

Το σημαντικό πάντως είναι ότι διεθνώς το ενδιαφέρον εστιάζεται στην τάξη, με πρώτο πρόβλημα την κατάλληλη επιλογή των θεμάτων που θα διδαχθούν (αυτή η επιλογή προφανώς έχει μια δυναμική και αλλάζει από εποχή σε εποχή σύμφωνα με τις νέες ανάγκες) και δεύτερο το ποιος είναι ο καταλληλότερος τρόπος να διδαχθούν αυτά τα θέματα, ποιες είναι οι κατάλληλες μαθηματικές δραστηριότητες έτσι ώστε να εμπλακούν η διαισθητική, επαγωγική και συμπερασματική προσέγγισή τους και να κινητοποιηθούν οι μαθητές στην κατάκτηση αλλά και ευχαρίστηση της γνώσης. Γενικά τονίζεται πόσο σημαντική είναι η ατμόσφαιρα της τάξης όπου συνεργατικά ανταλλάσσονται πληροφορίες και σκέψεις και πόσο σημαντικό είναι να αναδύονται συνεχώς ερωτήσεις του τύπου: «Τι ακριβώς κάνεις τώρα;» ή «Γιατί αυτό έχει νόημα;» Οι απαντήσεις πρέπει να ενθαρρύνεται να είναι πολλαπλών μαθηματικών προσεγγίσεων και όχι να ακολουθούν μονόπλευρη λογική του στυλ: «Κάνουμε τώρα Γεωμετρία, άρα πρέπει να κοιτάτε το πρόβλημα μόνο γεωμετρικά.» Κατ' αυτόν τον τρόπο οι μαθητές μαθαίνουν νέους τρόπους να αντιμετωπίζουν και να σκέφτονται γύρω από καταστάσεις-προβλήματα, να ταξινομούν τη σκέψη τους και να αναπτύσσουν υψηλής ποιότητας αιτιολόγηση εμπλέκοντας τόσο μαθηματικές τεχνικές και αποτελέσματα όσο και θεωρητικές αποδείξεις.

⁸⁰ Mammama & Villani, ό.π., σ. 24

Τα τελευταία χρόνια μέσα στις τάξεις αναπτύσσονται διδακτικές μέθοδοι που στόχος τους είναι να αποσπάσουν τους μαθητές από την κατάσταση της άρνησης των μαθηματικών με την συχνή αιτιολόγηση «δεν τα πάω καλά» ή «δεν τα καταλαβαίνω καθόλου» και έχουν γίνει πολλές αλλαγές στις «μαθηματικές δραστηριότητες». Οι αλλαγές αυτές έχουν συντελεστεί κάτω από το πνεύμα της κονστρουκτιβιστικής θεωρίας και έχουν προέλθει από τη διαπίστωση ότι η ήδη διαμορφωμένη κουλτούρα του μαθητή δημιουργεί μια στάση που επηρεάζει την ικανότητά του στην επίλυση διαφόρων μαθηματικών προβλημάτων⁸¹. Ακριβώς εδώ εντοπίζεται και το πρόβλημα της δυσκολίας της μάθησης των μαθηματικών. Η σημερινή σχολική μαθηματική γνώση είναι αφηρημένη και απομονωμένη από τον ίδιο το μαθητή σαν άτομο καθώς και από άλλα πεδία της σύγχρονης πραγματικότητας γι' αυτό και είναι δύσκολο να μεταφερθεί σ' αυτά. Για παράδειγμα, ο Maier⁸² ισχυρίζεται ότι οι μαθητές αποτυγχάνουν να χρησιμοποιήσουν τις διαδικασίες που έμαθαν στο σχολείο γιατί δεν έχουν ενθαρρυνθεί στη συσχέτιση των σχολικών τους εμπειριών με τη ζωή εκτός του σχολείου. Αυτές οι διαπιστώσεις έδωσαν την ώθηση για τη δημιουργία διδακτικών προτάσεων και δραστηριοτήτων που ακολουθούν εκείνο το ρεύμα της κονστρουκτιβιστικής θεωρίας (sociocultural constructivism) η οποία παίρνει υπόψη της το μαθητή σαν μονάδα που βρίσκεται σε ένα συγκεκριμένο περιβάλλον και επομένως αναγνωρίζει ότι η μάθηση εμπλέκει μια διαδικασία εκπολιτισμού⁸³ μέσα σε μία κοινωνική και πολιτιστική πραγματικότητα (Ernest 1991, Bishop 1988, Lerman 1996).

Αυτή η κοινωνικοπολιτισμική όψη του κονστρουκτιβισμού στηρίζεται στη θεωρία του Vygotsky που εξετάζει την κοινωνική αλληλεπίδραση σαν

⁸¹ Bishop, A.(1998). Mathematics education in its cultural context. *Educational Studies in Mathematics*. Vol.19., 179-191

⁸² Meier, E. (1991). Folk Mathematics. M. Harris (ed.). *School, Mathematics and Basingstoke*: The Falmer Press.

⁸³ Σε αντίθεση με τον θεμελιώδη κονστρουκτιβισμό (radical constructivism), ο οποίος δίνει μικρή έμφαση στην κοινωνική αλληλεπίδραση σαν μέσο μάθησης. Για παράδειγμα, η θεωρία του Piaget δεν εξηγεί την ανάπτυξη σύνθετων γνωστικών δομών που αναπτύσσονται στη σφαίρα επιρροής των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων μέσα στο περιβάλλον μιας πραγματικής τάξης. Στη μεθοδολογία του η κοινωνική αλληλεπίδραση περιορίζεται ανάμεσα στο δάσκαλο που παίρνει συνέντευξη και το μαθητή που δίνει συνέντευξη χωρίς να εξετάζει ζητήματα επικοινωνίας τους.

κινητήρια δύναμη που ήδη έχει δώσει στην μάθηση μια κεκτημένη ταχύτητα. Άλλοι Σοβιετικοί ερευνητές, όπως οι Luria, Davydov και Leontiev συνεισέφεραν στην ανάπτυξη αυτής της θεωρίας, που είναι γνωστή και σαν θεωρία δραστηριότητας (activity theory)⁸⁴. Ο Vygotsky βλέπει τη μάθηση σαν μια διαλεκτική διαδικασία που εμπλέκει τους διδασκόμενους με μια κουλτούρα εργαλείων και συμβόλων. Η έννοια της «ζώνης της επικείμενης ανάπτυξης» (zone of proximal development) έχει εισαχθεί από τον Vygotsky για να εξηγήσει πώς ο μαθητής βοηθούμενος από πιο εκπαιδευμένα μέλη μπορεί να οικειοποιηθεί τα πολιτισμικά και συμβολικά χαρακτηριστικά μιας δραστηριότητας και να τα μετατρέψει σε εργαλεία για συνειδητό έλεγχο. Χαρακτηριστικά αναφέρει το «κενό» που υπάρχει σε ένα άτομο, παιδί ή ενήλικα ανάμεσα σε αυτό που είναι ικανό να κάνει από μόνο του και σε αυτό που μπορεί να κατορθώσει με τη βοήθεια ενός που ξέρει περισσότερα από αυτόν. Πρέπει λοιπόν να κτιστούν γέφυρες επικοινωνίας ανάμεσα στον εκπαιδευόμενο και τον εκπαιδευτή ώστε να δοθεί η κατάλληλη καθοδήγηση. Οι Wood, Bruner και Ross (1976) επινόησαν την κατασκευή της «σκαλωσιάς» (scaffolding metaphor) που κτίζουν τα πιο έμπειρα μέλη (εκπαιδευτές) για να βοηθήσουν τους μαθητές να κατακτήσουν τη μάθηση παρέχοντάς τους μερική προσωρινή υποστήριξη για όσο καιρό χρειάζεται μέχρι να οικοδομηθεί η καινούρια γνώση. Σαν «σκαλωσιά» μπορούν να θεωρηθούν στρατηγικές όπως οι προτροπές, οι ερωτήσεις κ.λ.π. ή ακόμα και προσχεδιασμένες διδακτικές τεχνικές που παίζουν το ρόλο κατευθυντηρίων γραμμών και είναι μελετημένες ώστε να προκαλούν ή να ενισχύουν την ανταποδοτική οικειοποίηση εννοιών και ιδεών του δυναμικού διδύμου μαθητή και δάσκαλου.

Δ1.2.1. Διεθνές ενδιαφέρον

«Στο διεθνές επίπεδο, σαν αποτέλεσμα των διαφόρων προγραμμάτων, συνεδρίων, συζητήσεων και συσκέψεων, έχει δημιουργηθεί ένα δραστήριο δίκτυο μαθηματικών παιδαγωγών οι οποίοι διακατέχονται από ένα κοινό ενδιαφέρον για τα προγράμματα των σχολικών μαθηματικών και τις διδακτικές τους μεθόδους.. Η εγκάρσια γονιμοποίηση των ιδεών μέσα σ' αυτήν την

⁸⁴ Cabay, T. (1991). The Activity Theory of Learning and Mathematics Education in the USSR, *Proceedings of the 15th PME Conference*, Vol. I. Assisi (Italy): Furinghetti (ed.), p. 49-56

κοινότητα των μαθηματικών και μαθηματικών παιδαγωγών, θα συνεχίσει οπωσδήποτε να αποβαίνει εξαιρετικά ωφέλιμη για όλα τα παιδιά του κόσμου»⁸⁵.

Είναι φανερό ότι παγκοσμίως έχει αναπτυχθεί ένας έντονος προβληματισμός γύρω από την υλοποίηση των στόχων των αναθεωρημένων ΑΠ με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί στις περισσότερες χώρες ένας πυρήνας μαθηματικών παιδαγωγών που έφερε κοντά τους πανεπιστημιακούς θεωρητικούς ερευνητές και παιδαγωγούς με τους “μαχόμενους” εκπαιδευτικούς δασκάλους των μαθηματικών (classroom teachers). Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι : στις ΗΠΑ το *Εθνικό Συμβούλιο Δασκάλων των Μαθηματικών* (NCTM: National Council of Teachers of Mathematics). Στην Αγγλία η *Βρετανική Κοινότητα για Έρευνα στην Μάθηση των Μαθηματικών* (BSRLM: British Society for Research into Learning Mathematics), η Εταιρεία Δασκάλων των Μαθηματικών⁸⁶ (ATM: The Association of Teachers of Mathematics) και η Μαθηματική Εταιρεία⁸⁷ (MA: The Mathematical Association) και παγκοσμίως η Διεθνής Επιτροπή για τη Μαθηματική Εκπαίδευση (ICME: The International Commission on Mathematical Education) καθώς και η Διεθνής Επιτροπή για τη Μαθηματική Διδασκαλία (ICMI: The International Commission on Mathematical Instruction).

Εδώ βέβαια, πρέπει να αναφερθεί ότι συνήθως στο εξωτερικό η διδασκαλία των μαθηματικών δεν γίνεται από ένα συγκεκριμένο βιβλίο που διανέμεται στους μαθητές, αλλά ο εκπαιδευτικός ακολουθώντας τις γενικές αρχές και τους συγκεκριμένους στόχους του ΑΠ της βαθμίδας στην οποία διδάσκει, ετοιμάζει τη διδασκαλία του συμβουλευόμενος μία πληθώρα διδακτικών προτάσεων για κάθε θέμα που θέλει να διδάξει τις οποίες βρίσκει σε βιβλία ή στο διαδίκτυο. Πολλές έρευνες και άρθρα εκδίδονται από το ICMI (New ICMI Study Series) και ειδικά στις ΗΠΑ υπάρχουν πολλά βιβλία που εκδίδονται από τις Εκδόσεις του NCTM και τα οποία παρουσιάζουν μια μεγάλη ποικιλία διδακτικών

⁸⁵ Τουμάσης, Μ. (1987). Μια ανασκόπηση του παγκόσμιου σκηνικού της Β/θμιας εκπαίδευσης, τα τελευταία 200 χρόνια. *Ευκλείδης γ 16*. Αθήνα: ΕΜΕ, σ. 48

⁸⁶ www.atm.org.uk/

⁸⁷ www.m-a.org.uk/

προτάσεων με απόψεις που ακολουθούν τις τρέχουσες μελέτες και διαπιστώσεις στο πεδίο της διδακτικής. Επίσης η μεγάλη ανάπτυξη του διαδικτύου έχει κάνει πολύ εύκολη την επικοινωνία ανάμεσα στους εκπαιδευτικούς πυρήνες αλλά και σε άτομα που δραστηριοποιούνται⁸⁸ και κάνουν συγκεκριμένες διδακτικές προτάσεις για κάθε μαθητικό επίπεδο και σύμφωνα με τους στόχους των ΑΠ. Αυτές οι διδακτικές προτάσεις αναρτώνται στις ιστοσελίδες των διαφόρων σχολείων, πανεπιστημίων αλλά και μεμονωμένων εκπαιδευτικών και είναι ανοικτές σε παρατηρήσεις και βελτιώσεις αφού οποιοσδήποτε δάσκαλος μπορεί να τις χρησιμοποιήσει στη διδασκαλία του, να διαπιστώσει τη λειτουργικότητά τους και κατόπιν να ανατροφοδοτήσει την πηγή με τις παρατηρήσεις του.

Δ2. Τα φράκταλς στην τάξη

Δ2.1. Η διδασκαλία των φράκταλς στο εξωτερικό

Τα δυναμικά συστήματα και τα φράκταλς μπήκαν δειλά πριν μια δεκαετία στις ΗΠΑ σε διδακτικές προτάσεις που απευθύνονταν σε καθηγητές που δίδασκαν στην τελευταία τάξη της Β/θμιας εκπαίδευσης ή για μια σειρά κολεγιακών μαθημάτων σε φοιτητές Καλών Τεχνών⁸⁹. Τα τελευταία όμως χρόνια εμφανίζονται σε διδακτικές προτάσεις όλων των βαθμίδων, στοιχειώδη, μέση και λυκειακή (Fractals Unit for Elementary, Middle and High School Students) γιατί έχουν το μεγάλο πλεονέκτημα να μπορούν ομαλά να συνδεθούν με τα κλασικά θέματα των Αναλυτικών Προγραμμάτων των μαθηματικών. Ήδη σε προηγούμενη παράγραφο αναφέρθηκε ότι η νιφάδα του Koch περιέχεται στο βιβλίο *Navigating through Geometry in Grades 9-12* του NCTM. Ειδικά όμως το πανεπιστήμιο της Βοστώνης, στο οποίο διδάσκει και ο καθηγητής R. L. Devaney⁹⁰ που ασχολείται με τη θεωρία του Χάους και τα Φράκταλς, έχει δραστηριοποιηθεί με σκοπό την είσοδο των σύγχρονων μαθηματικών και της τεχνολογίας στην Β/θμια εκπαίδευση. Κατά τη διάρκεια της δεκαετίας 1990-2000, σε συνεργασία με διάφορα σχολεία στην περιοχή

⁸⁸ Cynthia Lanis, <http://math.rice.edu/%7elanius/frac/>

⁸⁹ Devaney, R. (1990). *Chaos, Fractals and Dynamics*. Addison-Wesley, Preface v

⁹⁰ Robert L. Devaney, Dept. of Mathematics, Boston University, 111 Cummington St., Boston, MA 02215 USA

της Βοστώνης, έχει οργανώσει πολλά καλοκαιρινά σεμινάρια με σκοπό να διδάξει σε καθηγητές τα νέα πεδία των δυναμικών συστημάτων και των Φράκταλς⁹¹. Κατά τη διάρκεια αυτών των σεμιναρίων οι εκπαιδευθέντες καθηγητές, εκτός του ότι μυήθηκαν στη νέα γνώση, χρησιμοποίησαν και υπολογιστές, λογισμικό καθώς και άλλο σχετικό υλικό ώστε να αποκτήσουν και πρακτική εμπειρία, η οποία είναι απαραίτητη για την εξερεύνηση των νέων μαθηματικών εννοιών στις σχολικές αίθουσες. Σαν συνέχεια αυτής της προσπάθειας και για να βοηθηθούν οι καθηγητές αφ' ενός μεν να εντάξουν τη νέα γνώση στο πρόγραμμά τους, αλλά και αφ' ετέρου να δείξουν στους μαθητές τη ζωντάνια των σύγχρονων μαθηματικών, αναπτύχθηκε και διδακτικό υλικό, όπως βιντεοταινίες, έτοιμο λογισμικό, ιστοσελίδες με οδηγίες, φύλλα εργασίας κ.λ.π.

Όπως προαναφέρθηκε, λοιπόν, ναι μεν τα Φράκταλς δεν έχουν μπει επίσημα στα Αναλυτικά Προγράμματα των ΗΠΑ, αλλά όλο και περισσότερο εμφανίζονται σε διδακτικές προτάσεις όλων των βαθμίδων, ακολουθώντας μια σπειροειδή ανάπτυξη:

Οι διδακτικές προτάσεις που απευθύνονται στις βαθμίδες 4 - 8 (ηλικίες από 10 - 14 χρονών), έχουν σκοπό να γνωρίσουν οι μαθητές τα Φράκταλς και τα μαθηματικά που σχετίζονται με αυτά. Το ενδιαφέρον κυρίως εστιάζεται στα Φράκταλς που δημιουργούνται με επαναληπτικές «σχεδιαστικές» διαδικασίες, δηλαδή σ' αυτά που προέρχονται από την επαναληπτική διαδικασία που εφαρμόζεται σε Ευκλείδεια σχήματα, όπως το τρίγωνο του Sierpinski, την νιφάδα του Koch και το αποκαλούμενο "Jurassic Park" φράκταλ. Τα μαθήματα περιλαμβάνουν και χρήση Η/Υ, με Java κυρίως εφαρμογές, με τη βοήθεια των οποίων οι μαθητές γνωρίζουν την επαναληπτική διαδικασία, αλλά προτείνονται και εναλλακτικές μέθοδοι. Η έννοια της ομοιότητας και της αυτοομοιότητας εισάγεται στους μαθητές κυρίως με τη βοήθεια εικόνων και σχεδιαστικών δραστηριοτήτων. Οι παρακάτω εικόνες είναι ενδεικτικές:

⁹¹ Contemporary Mathematics and Technology as a Driving Force for School Reform.
(<http://www.bu.edu/smec/project.htm>)



Εικόνα 1



Εικόνα 2



Εικόνα 3



Εικόνα 4



Εικόνα 5



Εικόνα 6

Οι εικόνες 1 και 2 είναι παραδείγματα ομοιότητας (που εισάγεται με μεγέθυνση-σμίκρυνση), η εικόνα 3 είναι παράδειγμα αυτοομοιότητας (τα παιδιά εξασκούνται στο να αναγνωρίζουν τα αυτοόμοια σχήματα) και η εικόνα 4 είναι παράδειγμα εφαρμογής μιας επαναληπτικής διαδικασίας την οποία οι μαθητές μαθαίνουν να εφαρμόζουν και να βρίσκουν σε κάθε βήμα πόσα «αντίγραφα» σε σμίκρυνση υπάρχουν του προηγούμενου βήματος. Οι εικόνες 5 και 6 είναι καλλιτεχνικές δημιουργίες που απεικονίζουν το τρίγωνο του Sierpinski και το "Jurassic Park" φράκταλ που τις έχουν δημιουργήσει αντίστοιχα, μια τάξη ενός γυμνασίου της Καλιφόρνιας⁹² και ενός του Αϊντάχο⁹³

⁹² Τάξη του Vladimir Litt's, 7ης βαθμίδας (13 χρονών), του Γυμνασίου Pacoima της California.

⁹³ Τάξη του Lynch του Γυμνασίου Sandpoint, Idaho. Η δημιουργία είναι η 12η επανάληψη του Jurassic Park Fractal και χρειάστηκε να κατασκευαστούν 256 αντίγραφα του αρχικού.

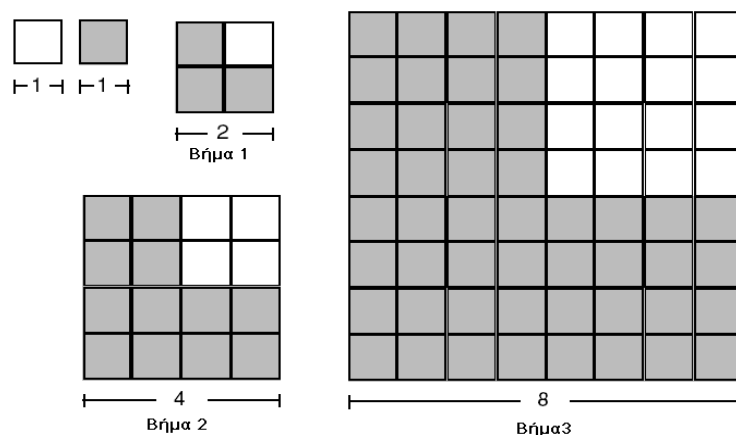
και οι οποίες έχουν κρεμαστεί με επαινετικά σχόλια στην ιστοσελίδα της Cynthia Lanus.

Επίσης, σε πολλές διδακτικές προτάσεις που αφορούν την τελευταία γυμνασιακή βαθμίδα (7 – 8), τίθεται και το θέμα της ύπαρξης και κλασματικών διαστάσεων, πέρα από τις γνωστές ευκλείδειες. Με στόχο την βελτίωση του Αναλυτικού Προγράμματος και των βιβλίων, έχει γίνει μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση του θέματος με τη συνεργασία του πανεπιστημίου Florida Atlantic και σχολείων της περιοχής (Florida Atlantic University, Boca Raton, Florida, and The School Board of Broward County, Florida), με τον τίτλο: *«Εξερεύνηση Σχημάτων: Αναβαθμίζοντας τα Μαθηματικά και την Επιστήμη στη Μέση Εκπαίδευση»*. Μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες και φύλλα εργασίας οι μαθητές παρατηρούν τις μεταβολές που υφίστανται το μήκος, το εμβαδόν και ο όγκος ενός ευθ. τμήματος, ενός τετραγώνου και ενός κύβου αντίστοιχα όταν π.χ. διπλασιαστούν ή τετραπλασιαστούν τα αρχικά σχήματα. Κάνουν πίνακες με τις τιμές που βρίσκουν και κατόπιν τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις (με οριζόντιο άξονα την κλίμακα και κατακόρυφο το μήκος ή το εμβαδόν ή τον όγκο), βρίσκοντας έτσι συσχετίσεις των ανωτέρω μεγεθών. Διαπιστώνοντας την «αδυναμία» πρόβλεψης στην περίπτωση της «κλίμακας και του εμβαδού» ή της «κλίμακας και του όγκου» (μια και οι γραφικές παραστάσεις σε αυτές τις περιπτώσεις είναι καμπύλες), σε αντίθεση με τη γραφική παράσταση «κλίμακας και μήκους» (που είναι ευθεία γραμμή), οδηγούνται στην αναγκαιότητα κατασκευής «αξόνων δυνάμεων» (Power Axes), στους οποίους οι παραπάνω καμπύλες μετασχηματίζονται σε ευθείες. Έτσι αποκτούν τη βάση ώστε στις επόμενες βαθμίδες να μπορούν να κατανοήσουν τις κλασματικές διαστάσεις (Box Dimension) οι οποίες αναπαριστώνται γραφικά σε τέτοιους άξονες που είναι γνωστοί και σαν άξονες log-log. Στη συνέχεια εξερευνούνται (και μάλιστα σε σύγκριση η μια με την άλλη) και δύο διαφορετικές μέθοδοι μεγέθυνσης ενός απλού σχήματος, έτσι ώστε να οικειοποιηθούν οι μαθητές την έννοια της επαναληπτικής διαδικασίας. Η πρώτη μέθοδος αφορά την συνηθισμένη μεγέθυνση που ονομάζεται “Blowing Up” και κατά την οποία το σχήμα, σε κάθε στάδιο μεγέθυνσης διατηρεί την αρχική μορφή του. Η δεύτερη μέθοδος είναι μια επαναληπτική διαδικασία που αρχίζει με το ίδιο αρχικό σχήμα της προηγούμενης μεθόδου, με τη βασική όμως διαφορά ότι

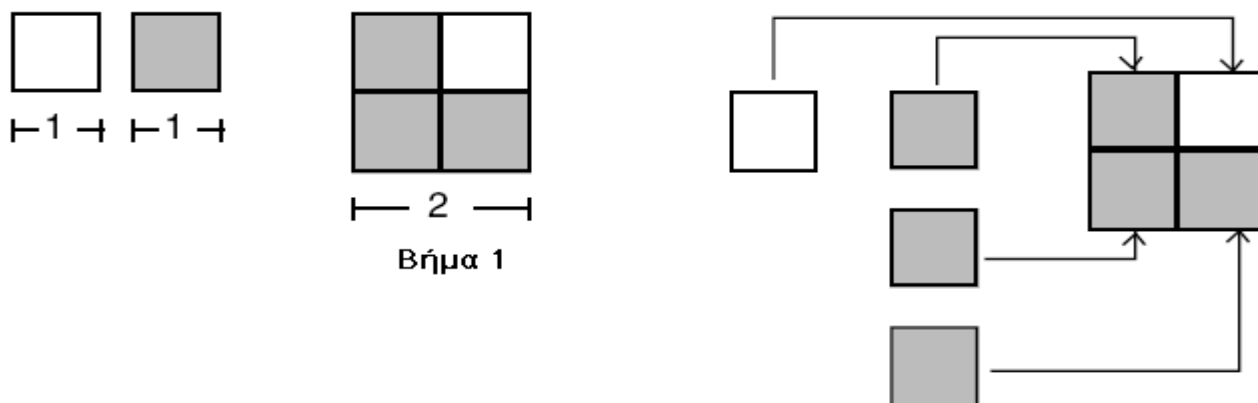
χρησιμοποιούμε σε κάθε βήμα το σχήμα του προηγούμενου βήματος ακολουθώντας πάντα τον ίδιο κανόνα που έχει οριστεί από την αρχή (Iterative Process). Χαρακτηριστικό είναι το παρακάτω παράδειγμα. Στους μαθητές δίνεται ένα σχήμα που αποτελείται από μαύρα και άσπρα πλακάκια και στο οποίο εφαρμόζουν τις δύο μεθόδους. Κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων οι μαθητές συμπληρώνουν πίνακες και κάνουν τις αντίστοιχες γραφ. παραστάσεις σε «άξονες δυνάμεων».

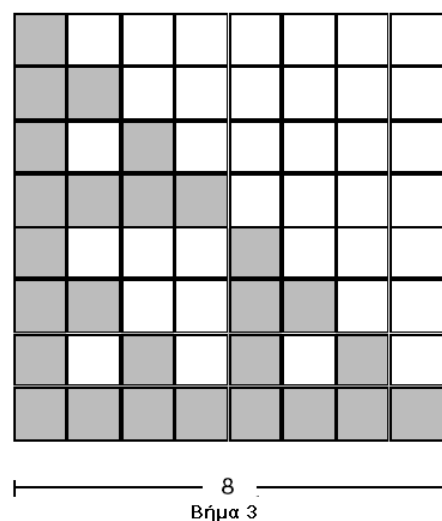
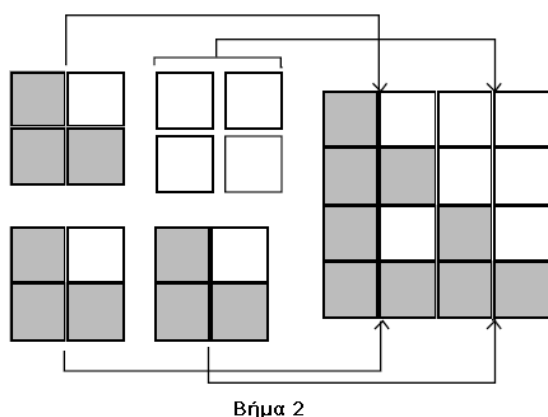
Βήμα	Μήκος του σχήματος κατά μήκος της βάσης	Μαύρα πλακάκια	Άσπρα πλακάκια

1η μέθοδος ("Blowing Up")



2η μέθοδος (Iterative Process)





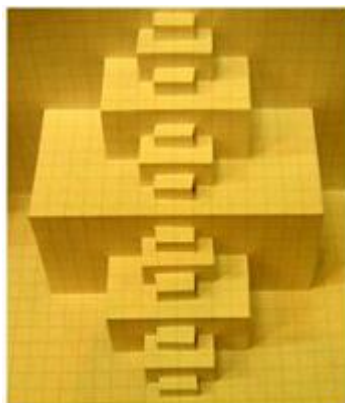
Στην παραπάνω εικόνα παρατηρούμε ότι το τρίτο βήμα της διαδικασίας εξελίσσεται χρησιμοποιώντας σαν δομικά στοιχεία αυτά του προηγούμενου βήματος (2^ο βήμα) και τα οποία πρέπει να τοποθετηθούν σύμφωνα με τον κανόνα τοποθέτησης που παραμένει σταθερός σε όλα τα βήματα. Τα άσπρα πλακάκια χρησιμοποιούνται για να γεμίσουν το κενό στην γωνία που μένει.

Στις διδακτικές προτάσεις που απευθύνονται στις ανώτερες βαθμίδες 9 - 12 (ηλικίες από 15 – 18 χρονών) προτείνεται και η διδασκαλία των δυναμικών συστημάτων με προβλήματα εξέλιξης πληθυσμών σε κλειστούς χώρους (π.χ. αριθμός κουνελιών από γενιά σε γενιά σε ένα νησί), όπου με τη μελέτη της συνάρτησης πληθυσμού (λογιστικής απεικόνισης) εισάγεται και η θεωρία του Χάους. Επίσης η εξερεύνηση των γεωμετρικών σχημάτων συνεχίζεται και το ενδιαφέρον και πάλι εστιάζεται στα γνωστά Φράκταλς (τρίγωνο του Sierpinski, την νιφάδα του Koch κ.λ.π.). Δίνεται μεγάλη σημασία στην ομοιότητα, την αυτοομοιότητα, την επαναληπτική διαδικασία καθώς και στον υπολογισμό των κλασματικών διαστάσεων (Box ή Capacity Dimension : Διάσταση Χωρητικότητας). Επιπλέον οι μαθητές κινητοποιούνται να σκεφτούν και πάνω στις έννοιες του απείρου και των ορίων. Οι προσεγγίσεις είναι πιο θεωρητικές και με τη βοήθεια των Φράκταλς εισάγονται οι έννοιες των ακολουθιών, των σειρών και των αθροισμάτων απείρων όρων. Είναι αξιοπρόσεκτο ότι, ακόμα και στις τελευταίες βαθμίδες της Β/θμιας εκπαίδευσης, αυτές οι θεωρητικές

έννοιες δεν δίνονται απ' ευθείας, αλλά μέσα από συγκεκριμένες δραστηριότητες και εξερευνήσεις των γεωμετρικών σχημάτων και συμπληρώσεις πινάκων. Τα αθροίσματα των απείρων όρων που προκύπτουν υπολογίζονται και γεωμετρικά αλλά και αλγεβρικά.

Είναι ενδιαφέρον ότι τα διάφορα πανεπιστήμια συνεργάζονται με τη Β/θμια εκπαίδευση για την επιμόρφωση των καθηγητών της Β/θμιας στα σύγχρονα μαθηματικά και τη δημιουργία κατάλληλων διδακτικών προτάσεων για τους μαθητές Γυμνασίου – Λυκείου. Χαρακτηριστικά αναφέρω τρεις περιπτώσεις:

Η πρώτη είναι αποτέλεσμα της δουλειάς που έγινε από το πανεπιστήμιο της Βοστώνης. Είναι ένα project εξερεύνησης των Φράκταλς με τίτλο: *Σχέδια στη Φύση* που αναπτύχθηκε από τον Kenric Nelson στην τάξη φυσικής του Chelsea High School με τη συνεργασία του Πανεπιστημίου της Βοστώνης⁹⁴



(των τμημάτων “Science and Mathematics Education Center” και “The Center for Polymer Studies”). Το project χωριζόταν σε δύο εξερευνήσεις: *Ακτογραμμές* (Coastlines) και *Αντίσταση Κυκλωμάτων Διάταξης Sierpinski* (Sierpinski Resistor Networks) και στόχος του ήταν να εμπεδώσουν οι μαθητές ότι φυσικά αντικείμενα έχουν συχνά φράκταλ χαρακτηριστικά, όπως αυτά

της αυτοομοιότητας και της κλασματικής διάστασης. Η δεύτερη περίπτωση είναι πολύ ενδιαφέρουσα. Όπως τονίστηκε και στην αρχή, ένα δίκτυο μαθηματικών παιδαγωγών δραστηριοποιείται διεθνώς με κοινό ενδιαφέρον τα προγράμματα των σχολικών μαθηματικών και τις διδακτικές τους μεθόδους. Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιας δραστηριοποίησης αποτελεί και το Ινστιτούτο των Μαθηματικών του Park City (PCMI :Park City Math Institute)⁹⁵, στο Park City της πολιτείας της Utah στις ΗΠΑ. Το καλοκαίρι του 2003, συναντήθηκαν εκεί έξι καθηγητές της Β/θμιας εκπαίδευσης από διάφορα σχολεία των ΗΠΑ (σε 12 δίωρες συνεδριάσεις) για να μελετήσουν τη

⁹⁴ <http://web.bu.edu/>

⁹⁵ <http://mathforum.org/pcmi/> || IAS/PCMI Home

διαδικασία του Γιαπωνέζικου μαθήματος (Japanese Lesson Study)⁹⁶. Είχαν ήδη συμφωνήσει να δημιουργήσουν ένα μάθημα γεωμετρίας για το λύκειο (grade 9-10, 15-16 ετών) και τελικά από 10 σημαντικά θέματα, που συνδέονταν και με άλλες περιοχές των μαθηματικών, επέλεξαν τα Φράκταλς. Κατασκευάσανε το παραπάνω μοντέλο (stair-step fractal) για να επιδείξουν εποπτικά στους μαθητές πώς η αλλαγή των διαστάσεων ενός ορθογωνίου επηρεάζει το εμβαδόν και τον όγκο του και κυριολεκτικά οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί έμειναν έκπληκτοι από την ομορφιά του μοντέλου και από το πόσο εύκολα επιδείκνυε τη μαθηματική έννοια της κλίμακας και της διάστασης. Η τρίτη περίπτωση είναι αυτή μιας μαθήτριας, της 17χρονης αμερικανίδας Gabrielle Gianelli⁹⁷ από το Lake Highland Preparatory School του Orlando στη Florida, που κέρδισε μια υποτροφία 50.000 US\$ στον διαγωνισμό της Intel (Intel Foundation Young Scientist Award), στις 13/5/2005. Η μαθήτρια αυτή στο project της με τίτλο "Fractal Dimension Analysis of Putative Martian Coastlines" (Ανάλυση κλασματικής διάστασης σε θεωρούμενες ακτές του Άρη) απέδειξε ότι υπήρχαν κάποτε ωκεανοί σ' αυτόν τον πλανήτη. Είναι ενδιαφέρον ότι η μαθήτρια αυτή μεγάλωσε κοντά στο κέντρο Kennedy Space, λατρεύει την αστρονομία και χρησιμοποιώντας δεδομένα ενός τοπογραφικού χάρτη του Άρη διδάχτηκε μόνη της στατιστική για να μπορέσει να αναλύσει τα φράκταλς. Όπως λέει η ίδια: *« Τα φράκταλς περιγράφουν πράγματα του φυσικού κόσμου που είναι χαοτικά. Οι γεωλογικές μορφές έχουν σίγουρα φράκταλ διαστάσεις. Αν ξέρεις τη φράκταλ διάσταση ενός αντικειμένου, μπορείς να ταξινομήσεις τι είδους είναι αυτό γεωλογικά. Ακριβώς αυτό έκανα.»*

Μια περιήγηση στο διαδίκτυο πείθει για το μεγάλο διδακτικό ενδιαφέρον των φράκταλς. Οι ιστοσελίδες που αναφέρονται στα Φράκταλς μπορούν να χωριστούν σε 3 μεγάλες κατηγορίες: 1) Σε αυτές που ουσιαστικά είναι μια Γκαλερί με εικόνες Φράκταλ για σύνδεση των μαθηματικών με την Τέχνη-

⁹⁶ Η Μελέτη Μαθήματος(Lesson study) είναι μια "διαδικασία συνεργατικής επαγγελματικής ανάπτυξης που περιλαμβάνει έναν σχεδιασμό μαθήματος από κοινού κάτω από έναν κοινό στόχο όπου καθηγητές εμπλέκονται στο σχεδιασμό, εφαρμογή, παρατήρηση και ανατροφοδότηση ενός μαθήματος. Η εστίαση του είναι στα μαθηματικά και τους μαθητές." Στην Ιαπωνία, υπάρχει μια τυπική δομή στη διαδικασία ανάπτυξης του μαθήματος καθώς και στο ίδιο το μάθημα. Η διαδικασία είναι συνεργατική και ανατροφοδοτική, εστιάζόμενη περισσότερο στο μάθημα και όχι στο δάσκαλο. (<http://mathforum.org>)

⁹⁷ <http://www.photonics.com/todayshadlines/XQ/ASP/url.lookup/id.5553/QX/today.htm>

Ζωγραφική 2) Σε αυτές που δίνουν διάφορες πληροφορίες για τα φράκταλς καθώς και λογισμικό για Η/Υ με το οποίο μπορεί κάποιος να κατασκευάσει το δικό του φράκταλ, αλλάζοντας τις παραμέτρους στις επαναληπτικές συναρτήσεις και τα χρώματα. 3) Σε αυτές που ασχολούνται με τα Φράκταλς από διδακτική σκοπιά. Σε πολλές βέβαια ιστοσελίδες υπάρχουν δεσμοί με τους οποίους γενικά επισκέπτεσαι άλλες, διαφόρων κατηγοριών.

Στην πρώτη κατηγορία αναφέρω σαν χαρακτηριστικό παράδειγμα τα:

- "Carlson's Fractal Gallery" (<http://sprott.physics.wisc.edu/carlson/>),
- "A Fractal Art Gallery": εξερευνώντας τα όρια ανάμεσα στη δημιουργία και την ανακάλυψη, του Ken Keller
(<http://home.inreach.com/mapper/>),
- "Gallery of Fractal": Η ομορφιά των Fractals
(<http://fractals.hauner.cz/> -)

Στη δεύτερη κατηγορία χαρακτηριστικές είναι οι:

- "The Spanky fractal database"
(<http://spanky.triumf.ca>)⁹⁸, (spanky.fractint.org) με υπεύθυνο της σελίδας τον Noel Giffin, του εθνικού εργαστηρίου φυσικής του Καναδά. Αυτή η σελίδα παρέχει μια συλλογή από φράκταλς αλλά και software που έχει συγκεντρωθεί από διάφορες ftp σελίδες και παρέχεται ελεύθερα. Παρέχει τεράστια ποσότητα πληροφορίας και συνδέεται και με άλλες σελίδες που παρέχουν εικόνες φράκταλ, προγράμματα, γενικές πληροφορίες για τα φράκταλς καθώς και για το Χάος και τα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα.
- "Fractint": Το πρόγραμμα fractint για δημιουργία φράκταλς μπορεί κάποιος να το κατεβάσει ελεύθερα από τη διεύθυνση:
(www.fractint.org/)
- "The Fractal Microscope."
(http://archive.ncsa.uiuc.edu/Edu/Fractal/Fractal_Home.html)

Το Fractal Microscope είναι ένα αλληλεπιδραστικό εργαλείο που σχεδιάστηκε από την ομάδα Education Group του Εθνικού Κέντρου Εφαρμογών Υπερυπολογιστών (NCSA: National Center for Super

⁹⁸ <http://www.triumf.info/> (Canada's National Laboratory for Particle and Nuclear Physics)

computing Applications) του πανεπιστημίου του Illinois⁹⁹ για εξερεύνηση του συνόλου Mandelbrot καθώς και άλλων εικόνων φράκταλς. Με τη βοήθεια του προγράμματος και ενός supercomputer¹⁰⁰, μπορεί κάποιος να ζουμάρει μέσα και έξω στο σύνολο Mandelbrot σε λίγα δευτερόλεπτα βλέποντας και την τροχιά του αρχικού σημείου σε κάθε επανάληψη. Η εφαρμογή αναπτύσσεται σε περιβάλλον Macintosh ή X-Windows και στόχος της είναι να εμπλακούν μαθητές και δάσκαλοι όλων των βαθμίδων σε εξερεύνηση που βασίζεται στην ανακάλυψη. Με αυτό το πρόγραμμα οι μεν μαθητές μπορούν να απολαύσουν την Τέχνη των Μαθηματικών με τη βοήθεια της επιστήμης των μαθηματικών αντιλαμβανόμενοι ότι οι εξισώσεις είναι κάτι παραπάνω από μια συλλογή αριθμών, οι δε δάσκαλοι να βρουν εφόδια για τη διδασκαλία τους σε ένα σωρό θέματα του ΑΠ της τελευταίας βαθμίδας της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (K-12), όπως συστήματα συντεταγμένων και γραφικές παραστάσεις, σύγκλιση, απόκλιση, αυτοομοιότητα, εξερεύνηση της έννοιας του απείρου κ.λ.π. Οι δημιουργοί του προγράμματος ισχυρίζονται ότι πολλοί μαθητές ανυπομονούν να δουλέψουν με τα φράκταλς και να μάθουν περισσότερα για τα μαθηματικά μια και οι δάσκαλοι με τις σχέσεις που εμπλέκονται στο σύνολο Mandelbrot και με προγράμματα όμοια με το "fractalscope," έχουν άλλον ένα τρόπο να ενθαρρύνουν τους μαθητές τους να ανακαλύψουν την ομορφιά των μαθηματικών και να μην αποθαρρυνθούν από την πολυπλοκότητά τους.

- "Study Mandelbrot Fractals."

(<http://mathforum.org/alejandre/applet.mandlebrot.html>)

Παρόμοιο πρόγραμμα με το προηγούμενο. Στην αρχή παροτρύνει τους μαθητές να παίξουν αλλάζοντας χρώματα ώστε να έχουν το φράκταλ της αρεσκείας τους, και κατόπιν τους προκαλεί να εξερευνήσουν το ίδιο το

⁹⁹ University of Illinois Board of Trustees, National Center for Supercomputing Applications, Education Group, Copyright 1993

¹⁰⁰ Τα προγράμματα για φράκταλς, ειδικά αυτά που ζουμάρουν με μεγάλη κλίμακα, χρειάζονται πολύ χρόνο για να τρέξουν στους συνηθισμένους υπολογιστές, πράγμα απαγορευτικό για τη χρήση τους μέσα στην τάξη. Χρησιμοποιώντας supercomputers και το Internet η ταχύτητα αυξάνεται 500-1000 φορές.

σχήμα, ανακαλύπτοντας την αυτοομοιότητά του και διερευνώντας αν αληθεύει η πρόταση ότι αυτά έχουν πεπερασμένο εμβαδόν αλλά άπειρη περίμετρο.

- "Introduction to the Mandelbrot Set."

(<http://www.ddewey.net/mandelbrot/>)

Αυτή η ιστοσελίδα είναι ένας οδηγός για όσους ενδιαφέρονται για το σύνολο Mandelbrot και τα φράκταλς και έχουν λίγες μαθηματικές γνώσεις. Κάνει αναφορά στους μιγαδικούς, στο μιγαδικό επίπεδο και την εξίσωση που δημιουργεί το σύνολο Mandelbrot. Την αυτοομοιότητα αυτού του συνόλου και την άπειρη πολυπλοκότητά του τη δείχνει με εικόνες που έχουν δημιουργηθεί με το πρόγραμμα *Fractint* που επιτρέπει το ζουμάρισμα σε όποια περιοχή επιλεγεί.

Η τρίτη κατηγορία, αυτή των συγκεκριμένων διδακτικών προτάσεων, έχει και τη μεγαλύτερη σημασία στη μελέτη μας. Χαρακτηριστική και σημαντικότητα είναι η ιστοσελίδα της Cynthia Lanus, για την Α/θμια και Β/θμια Εκπαίδευση :

- "Cynthia Lanus' Fractals Unit." For elementary and middle school grades.

(<http://math.rice.edu/~lanus/frac/pages.html>)

Η αρχική σελίδα παροτρύνει τους μαθητές να ασχοληθούν με τα φράκταλς «γιατί μπορούν να τα καταλάβουν», τονίζοντας ότι παρ' όλο που αυτά είναι αντικείμενο έρευνας των σύγχρονων μαθηματικών, είναι κατανοητά στο μεγαλύτερο μέρος τους και τους θέτει το ερώτημα αν έχουν σκεφτεί την πιθανότητα μιας καριέρας ως μαθηματικού. Τονίζεται επίσης ότι είναι αντικείμενα της καθημερινής πραγματικότητας και ότι πολλές "cool" έννοιες συνδέονται με τα φράκταλς, όπως το θέμα της μέτρησης των ακτών (χρησιμοποιείται απλή καθημερινή γλώσσα και με παραδείγματα εστιάζει την προσοχή στο γνωστό πρόβλημα που προκύπτει αν αλλάζουμε κάθε τόσο τη μονάδα μέτρησης με μια ολοένα και μικρότερη). Υπάρχουν ερωτήσεις, δεσμοί με διάφορες πληροφορίες (βιογραφίες, δημιουργίες μαθητών, κ.λ.π.) καθώς και διδακτικές προτάσεις (τρίγωνο Sierpinski, σχέση τριγ. Sierpinski με Pascal, νιφάδα του Koch, αυτοομοιότητα, το θέμα της διάστασης κ.λ.π.). Οι προτάσεις αυτές, επηρεασμένες από τις τελευταίες διαπιστώσεις της διδακτικής, ακολουθούν το κονστрукτιβιστικό πλαίσιο. Επίσης σε αυτήν την κατηγορία

είναι χαρακτηριστική και η ιστοσελίδα του πανεπιστημίου της Βοστώνης με τον τίτλο: *Σύγχρονα Μαθηματικά και το Ίντερνετ*

- <http://math.bu.edu/DYSYS/index.html>

(The Dynamical Systems and Technology Project at Boston University)

Στην αρχική του σελίδα αναπτύσσονται έξι ενότητες για το λύκειο με θέμα το Χάος και τα Φράκταλς, που είναι εφαρμογές Java, και διατίθενται ελεύθερα από τον σέρβερ του πανεπιστημίου.

Δ2.2. Γιατί να διδαχθούν τα Φράκταλς ;

Στην ελληνική Β/θμια εκπαίδευση δεν διδάσκονται τα Φράκταλς. Μόνο στην Άλγεβρα της Β' Λυκείου, στο κεφ. των προόδων υπάρχει μια άσκηση σχετική με τη νιφάδα του Koch. Στην παρούσα εργασία, προτείνεται η διδασκαλία των Φράκταλς γιατί:

A) Δίνουν μια νέα πνοή στη γεωμετρία προωθώντας τα ενοποιημένα μαθηματικά αφού είναι ένα εξαιρετικό μέσο για εξερεύνηση σχέσεων μέσα στην περιοχή των μαθηματικών.

B) Αποτελούν σπουδαίο κίνητρο για έρευνα στα σύγχρονα μαθηματικά αφού τα συνδέουν με το χάος, τα δυναμικά συστήματα και τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές.

Γ) Συνδέουν τα μαθηματικά με το περιβάλλον, φύση και τέχνη.

Δ) Βοηθούν στην αλλαγή της κυρίαρχης ντετερμινιστικής αντίληψης της πραγματικότητας.

A) Νέα πνοή στη γεωμετρία

Όπως τονίστηκε προηγουμένως, η σύγχρονη προσέγγιση των μαθηματικών προωθεί τη σύνθετη διδασκαλία τους κατά την οποία η Γεωμετρία, η Άλγεβρα και η Ανάλυση διδάσκονται σαν ένα όλο, σαν συμπληρωματικές μέθοδοι ή μια της άλλης, σ' όλη τη διάρκεια της Β/θμιας εκπαίδευσης με το βοηθητικό όχημα της γεωμετρίας να παίζει πρωτεύοντα ρόλο. Στη μελέτη των Φράκταλς εκμεταλλευόμαστε στο έπακρο αυτό το όχημα. Ακριβώς όπως και στις πραγματικές ακολουθίες, στη διαδικασία σχηματισμού ενός φράκταλ, κάθε σχήμα παράγεται από το προηγούμενό του, προσφέροντας κατά θαυμάσιο τρόπο τη σύνδεση των αφηρημένων αριθμών με την χειροπιαστή

πραγματικότητα και ενθαρρύνοντας τους μαθητές στη διαισθητική εύρεση ορίων και την καλλιέργεια της ενόρασής τους. Πολλές διδακτικές προτάσεις¹⁰¹ προτείνουν την εξερεύνηση των σχημάτων ήδη από την Α/θμια εκπαίδευση. Σχεδιάζονται διάφορες διδακτικές προτάσεις με δραστηριότητες που αρχίζουν φυσικά από τα απλά ευκλείδεια σχήματα που σταδιακά και με τη βοήθεια διαφόρων “εξερευνήσεων” καταλήγουν οριακά σε πολύπλοκα σχήματα, με “ρευστά” όρια, τα Φράκταλς, παρακινώντας τους μαθητές να σκεφτούν πάνω σε σπουδαίες μαθηματικές έννοιες όπως του ορίου, του απείρου και της διάστασης καθώς και του απρόβλεπτου ενός δυναμικού συστήματος (παιχνίδι του Χάους-τρίγωνο του Sierpinski). Φυσικά η συμβολή των Η/Υ στη μελέτη των Φράκταλς είναι καθοριστική αφού για να τα εννοήσουμε στην ολότητά τους πρέπει να τα «δούμε» στη δυναμική ανάπτυξή τους στην οθόνη ενός υπολογιστή¹⁰². Επιπλέον η διδασκαλία τους εντάσσεται εύκολα στα Αναλυτικά Προγράμματα, πετυχαίνοντας επιπλέον οριζόντια σύνδεση και συνάφεια των διαφόρων μαθηματικών κλάδων (παρέχοντας ενοποιημένη, σύνθετη διδασκαλία των μαθηματικών), αφού στη μελέτη τους αλληλοσυμπληρώνεται η Γεωμετρία (επίπεδα σχήματα, μέτρηση περιμέτρου και εμβαδού) με την Ανάλυση (συναρτήσεις, γραφικές παραστάσεις, όρια ακολουθιών), και την Άλγεβρα (μιγαδικοί, τριγωνομετρία) .

Β) Σπουδαίο κίνητρο για έρευνα

Τα Φράκταλς αποτελούν ένα ισχυρότατο κίνητρο εμπλοκής των μαθητών με τη μαθηματική γνώση. Τους δίνουν την ευκαιρία να διαπιστώσουν τη ζωντάνια και την ομορφιά των σύγχρονων μαθηματικών και να αντιληφτούν ότι τα μαθηματικά δεν τελείωσαν με τον Ευκλείδη ή τον Newton και τον Leibniz αλλά είναι μια επιστήμη που συνεχώς εξελίσσεται και από την οποία έχουν πολλά να μάθουν ή ακόμα και να συνεισφέρουν. Ειδικά το πεδίο των δυναμικών συστημάτων που εμπλέκεται σε όλους τους κλάδους των

¹⁰¹ Παράδειγμα τέτοιων προτάσεων βρίσκουμε στο βιβλίο Navigating through Geometry in Grades 9-12 (15-18 χρονών) εκδ. NCTM στο 4^ο κεφάλαιο (σελ. 61-68). Ειδικά στη σελίδες 65 - 68 βρίσκουμε τη νιφάδα του Koch (κατασκευή της και εξερεύνηση της περιμέτρου της και με τη βοήθεια Η/Υ).

¹⁰² Όπως ήδη αναπτύχθηκε, αυτήν την ιδιότυπη ρευστότητα αυτών των συνόρων τη συλλαμβάνει η φράκταλ-διάσταση των αντίστοιχων σχημάτων (ο λόγος του λογαρίθμου του πλήθους των τμημάτων στη διαμέριση του μεγέθους προς το λογάριθμο της κλίμακας της ομοιότητας).

επιστημών δίνει μια σπουδαία ευκαιρία για σύγχρονη έρευνα στα μαθηματικά προωθώντας αλλά και εμπεδώνοντας κλασικές γνώσεις. Ο Devaney¹⁰³, γράφει: *«Ένα από τα ζητήματα των δυναμικών συστημάτων περιλαμβάνει την επανάληψη μιας συνάρτησης ξανά και ξανά και μετά το ερώτημα του τι συμβαίνει. Κατά θαυμαστό τρόπο, ακόμη και για τις πιο απλές των εξισώσεων όπως τις δευτεροβάθμιες και τριτοβάθμιες, κανένας δεν ξέρει την πλήρη απάντηση. Πράγματι, υπάρχουν πολλοί μαθηματικοί σε όλον τον κόσμο που εργάζονται ακριβώς πάνω σε αυτό. Σημειώστε πόσο απλό είναι να εξηγήσουμε αυτό το άλυτο πρόβλημα σε μαθητές Γυμνασίου-Λυκείου. Με τη δευτεροβάθμια εξίσωση και απλές γραφικές τεχνικές, αυτοί οι μαθητές νομίζουν ότι ξέρουν τα πάντα γι' αυτές τις συναρτήσεις 2^{ου} βαθμού. Από την πείρα που έχω ξέρω πόσο εκπλήσσονται όταν ανακαλύπτουν ότι δεν είναι όλα γνωστά και κατόπιν πολλοί από αυτούς είναι φοβερά ανυπόμονοι να πάνε στον υπολογιστή τους και να εξερευνήσουν το θέμα».*

Επίσης, με τη μελέτη των φράκταλς, μαθαίνουν οι μαθητές να πειραματίζονται, να ερευνούν και να διαπιστώνουν πώς από ένα απλό γεωμετρικό σχήμα και εφαρμόζοντας επαναληπτική διαδικασία προκύπτει ένα αυτοόμοιο αντικείμενο με καταπληκτικές ιδιότητες, τελείως διαφορετικό φαινομενικά από το αρχικό που τους κάνει να εξετάσουν εκ νέου και να εμπεδώσουν τις έννοιες της ομοιότητας, του απείρου, του φραγμένου. Αλλά και αντίστροφα, αντιλαμβάνονται ότι ένα αρχικά πολύπλοκο σχήμα μπορεί να προκύπτει από ένα απλό με την επανάληψη επ' άπειρο μιας απλής διαδικασίας και είναι μια πραγματική πρόκληση να βρεθεί αυτό το αρχικό σχήμα και αυτή η επαναληπτική διαδικασία. Αυτή η παρατήρηση ανοίγει νέους δρόμους αφού αντί να αποθηκεύουμε στον υπολογιστή μας όλες τις λεπτομέρειες μιας εικόνας, μπορούμε να συμπίεσουμε την όλη πληροφορία δημιουργίας της στον πολύ μικρότερο χώρο κάποιων προτύπων (αρχικών σχημάτων) και κάποιων επαναληπτικών διαδικασιών που μπορούν ανά πάσα στιγμή να την αναπαράγουν με μεγάλη ακρίβεια. Δημιουργείται λοιπόν μια νέα σύνδεση ανάμεσα στα θεωρητικά μαθηματικά και τον υπολογιστή που αποτελεί σπουδαίο κίνητρο για την εκμάθηση διαφόρων γλωσσών

¹⁰³ Devaney, R. (1990). *Chaos, Fractals, and Dynamics*. Addison – Wesley, preface

προγραμματισμού ενός υπολογιστή και παραγωγή στην αρχή απλών προγραμμάτων που δίνουν τη χαρά της ανακάλυψης και της δημιουργίας συναρπαστικών γραφημάτων-αντικειμένων.

Γ) Μαθηματικά και περιβάλλον: Φύση και Τέχνη

Σε προηγούμενες παραγράφους αναπτύχθηκε με λεπτομέρεια ότι στη μελέτη των δυναμικών συστημάτων και των Φράκταλς φανερώνεται το εναρμονισμένο και αξεδιάλυτο σύνολο της Επιστήμης, της Τέχνης και της πραγματικής Ζωής. Ενώ η Ευκλείδεια γεωμετρία είναι ένα θεωρητικό δημιούργημα που οργανώνει τη σκέψη μας, τα Φράκταλς είναι μια γλώσσα, ένας τρόπος να περιγράψουμε τη γεωμετρία της Φύσης.

Οι μαθητές μας, παρατηρώντας τον κόσμο γύρω τους, από τη φύση έως τις ανθρώπινες κατασκευές και με το θεωρητικό υπόβαθρο των δυναμικών συστημάτων και των φράκταλς, αντιλαμβάνονται ότι τα απλά ευκλείδεια σχήματα δεν ανταποκρίνονται στον τρόπο με τον οποίο η ίδια η Φύση οργανώνεται στο μεγαλύτερο μέρος της αφού οι μορφές όλων των φυσικών αντικειμένων είναι αποκρυσταλλωμένες δυναμικές διαδικασίες που συνεχίζουν να μεταβάλλονται συνεχώς στο χρόνο και στις οποίες συνυπάρχουν με τρόπο αξεχώριστο, συνδυασμοί τάξης και αταξίας. Μελετώντας τη γεωμετρία των φράκταλς, αυτή τη δυναμική γεωμετρία των επαναληπτικών διαδικασιών και της συνεχούς ανατροφοδότησης μπορούν να τοποθετήσουν και τον εαυτό τους μέσα σε ένα ιστορικό γίνεσθαι και να αποκτήσουν κοινωνική, οικολογική και γενικά πολιτική συνείδηση. Μετά την γνωριμία με την στατική κλασική γεωμετρία και την Αισθητική και την Τέχνη των τελευταίων χρόνων που συχνά οδηγεί σε έναν αφύσικο αυτοματοποιημένο φορμαλισμό στερημένο από Ψυχή και Ζωή, και στερημένο από διαισθητική φαντασία και ζωτική σύγκρουση μπορούν να καλλιεργήσουν την Αισθητική της Φύσης, αφήνοντας περιθώρια για το "ανέλπιστο", το άγνωστο και το εκπληκτικό.

Δ) Αλλαγή της κυρίαρχης ντετερμινιστικής αντίληψης της πραγματικότητας

Ο τελευταίος από τους λόγους για τους οποίους πιστεύω ότι πρέπει να μπει η διδασκαλία των δυναμικών συστημάτων και των φράκταλς στην Β/θμια εκπαίδευση δεν είναι και ο λιγότερο σημαντικός, το αντίθετο μάλιστα. Είναι γνωστό ότι το πλαίσιο σκέψης που επικρατεί εδώ και τρεις αιώνες, από την εποχή του Γαλιλαίου, είναι το ντετερμινιστικό. Λειτουργήσε με επιτυχία στην

ερμηνεία του κόσμου που μας περιέβαλε, του κόσμου των κλειστών κοινωνιών και συνόρων και της περιορισμένης διακίνησης της πληροφορίας παίζοντας καθοριστικό ρόλο στην ιστορία του ευρωπαϊκού και παγκόσμιου πολιτισμού. Απελευθέρωσε το νου από τις δεισιδαιμονίες και τις κάθε μορφής προλήψεις, το θρησκευτικό σκοταδισμό και την εξουσία των ευγενών που παρεμπόδιζαν τη γνώση και την ελευθερία κατά την εποχή του μεσαίωνα. Όμως αυτό το πλαίσιο σήμερα δεν μπορεί να λειτουργήσει αποτελεσματικά. Η παγκοσμιοποίηση και η ανάπτυξη της τεχνολογίας είναι πλέον γεγονός, μία πραγματικότητα μη αναστρέψιμη, η οποία μεταβάλλει δραματικά τις παραμέτρους της εξέλιξης των εθνικών οικονομιών, των πολιτικών συστημάτων, αλλά και αυτών των κοινωνιών. Το περιβάλλον μας είναι τώρα ένα δυναμικό υποσύστημα με εξέλιξη που δεν είναι πάντα γραμμική και άρα προβλέψιμη αφού συνδέεται και επικοινωνεί με πολλά άλλα υποσυστήματα, τα οποία μεταβάλλονται συνεχώς με τον χρόνο και το ένα επηρεάζει το άλλο αμφίδρομα. Εκατοντάδες μεταβλητές επηρεάζουν την πορεία του στην εξέλιξη του χρόνου δημιουργώντας μια σειρά από απρόβλεπτους ή μη παράγοντες οι οποίοι τινάζουν πολλές φορές στον αέρα τις καθιερωμένες μελέτες και προβλέψεις που βασίζονται στο ντετερμινιστικό τρόπο σκέψης. Είναι λοιπόν αυτό το πλαίσιο σκέψης όχι μόνο ανίκανο να διαχειριστεί τα καινούρια δεδομένα αλλά καταντά και επικίνδυνο. Ο λόγος είναι ότι ο μηχανιστικός του χαρακτήρας αποκλείει τη συνεχή ανατροφοδότηση δεδομένων η οποία χαρακτηρίζει ένα δυναμικό σύστημα, δεν συμπεριλαμβάνει την εξέταση των παραγόντων αβεβαιότητας που επιδρούν σ' αυτό και επομένως αποκλείει τη σχεδίαση εργαλείων και μεθόδων που θα μας βοηθήσουν να «τιθασεύσουμε» την αβεβαιότητα ή να την κατανοήσουμε.

Η αναθεώρηση του ντετερμινιστικού προτύπου, το οποίο, όπως είπαμε, λειτουργούσε με επιτυχία στην ερμηνεία του κόσμου που μας περιβάλλει, προέκυψε από την καινούρια θεωρία του χάους. Η θεωρία αυτή άρχισε να διαμορφώνεται κατά τη μελέτη του μικρόκοσμου και του μακρόκοσμου δηλ. από την αλλαγή της κλίμακας των παρατηρουμένων φαινομένων, στους δύο κόσμους που προκύπτουν από τον περιβάλλοντα χώρο μας με σμίκρυνση και μεγέθυνση, και την έκανε δυνατή η τεράστια ανάπτυξη της τεχνολογίας.

Είναι γνωστό ότι η επιστήμη με τις μεθόδους και τα αποτελέσματά της μετασχηματίζει σταδιακά την κοινωνία αλλά και αντιστρόφως, τα μετασχηματισμένα κοινωνικά πρότυπα μεταφέρονται μέσα στις επιστημονικές θεωρίες, στα εργαλεία της επιστημονικής πρακτικής και στα πειραματικά σχέδια αντανακλώντας στο επίπεδο της επιστήμης την αντίληψη που έχει σχηματίσει η κοινωνία για τον εαυτό της και τον κόσμο¹⁰⁴. Το σημερινό παγιωμένο πρότυπο σκέψης είναι το ντετερμινιστικό. Κατακερματίζει όλα τα πεδία αγνοώντας την οργανική τους ολότητα και εισβάλλει κατά τρόπο ανεξέλεγκτο σε όλα τα πεδία δράσης και έρευνας αφού έχει διαποτίσει το δυτικό τρόπο σκέψης. Η αναγκαιότητα αλλαγής του στον μακρόκοσμο της παγκοσμιοποιημένης κοινωνίας είναι επιτακτική και ο ρόλος επομένως της εκπαίδευσης πρωταγωνιστικός και κρίσιμος.

Η γνώση και τρόπος με τον οποίο σκεφτόμαστε είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα συνεχούς δράσης και αλληλεπίδρασης και αρχίζει από την παιδική μας ηλικία. Αποτελεί μια αδιάκοπα μεταβαλλόμενη ανοικτή ολότητα όπου το «εσωτερικό» στοιχείο ενεργοποιείται, πραγματοποιείται και μετασχηματίζεται μέσα από τις πολύμορφες και πολλαπλές αλληλεπιδράσεις του με το «εξωτερικό». Είναι πολύ σημαντικό αυτές οι αλληλεπιδράσεις να αρχίσουν όσο νωρίτερα γίνεται γιατί η οποιαδήποτε εννοιολογική αλλαγή συντελείται πολύ αργά αποτελώντας και αυτή με τη σειρά της ένα δυναμικό σύστημα¹⁰⁵. Ήδη από την αρχή της Β/θμιας εκπαίδευσης θα πρέπει ο μαθητής να εκτεθεί σε αυτού του είδους τις αλληλεπιδράσεις με προσεκτικά σχεδιασμένες διδακτικές ενότητες και δραστηριότητες. Σκοπός τους θα είναι να τον φέρουν σε επαφή με τη θεωρία του χάους, τα δυναμικά συστήματα και τα φράκταλς και να τον εφοδιάσουν με μια άλλη οπτική των πραγμάτων, με έναν άλλο τρόπο σκέψης ικανό να διαχειριστεί την καινούρια πραγματικότητα. Είναι σημαντικό να τονίσω ότι τέτοιες κατάλληλες δραστηριότητες εντάσσονται

¹⁰⁴ Ο Vygotsky (1896-1934), έδωσε μεγάλη έκταση και σημασία στην επίδραση του κοινωνικο-πολιτισμικού πλαισίου στην διαμόρφωση της νοητικής εξέλιξης. Οι νοητικές εργασίες δε θεωρούνται πλέον αυτόνομες οντότητες αλλά συστατικά ενός οργανωμένου όλου, του νου, ο οποίος λειτουργεί και αναπτύσσεται μέσα σε ορισμένο κοινωνικο-πολιτισμικό περιβάλλον που διαμεσολαβεί και προσδιορίζει τον τρόπο αντίληψης και σκέψης του ατόμου.

¹⁰⁵ Αραχωβίτης, Ι. ό. π. , σ. 133-142.

εύκολα στο αναλυτικό πρόγραμμα από το Γυμνάσιο έως και την Β΄ Λυκείου (οι πανελλήνιες εξετάσεις της Β΄ Λυκείου καταργήθηκαν τη σχολική χρονιά 2004-2005).

Δ2.3. Επιλογή της διδακτικής προσέγγισης της προτεινόμενης διδασκαλίας.

Είναι πραγματικότητα, ότι ο τρόπος που διδάσκεται το μάθημα της Γεωμετρίας στην σημερινή δευτεροβάθμια εκπαίδευση, από την συντριπτική πλειονότητα των καθηγητών, χαρακτηρίζεται σαν καθαρά φορμαλιστικός (τυπικός). Στηρίζεται αποκλειστικά στην τυπική Μαθηματική Λογική και την παραγωγική διαδικασία. Τα τελευταία όμως χρόνια, όλο και πληθαίνουν οι υποστηρικτές της «άτυπης» γεωμετρίας που τη θεωρούν αναγκαίο προκαταρκτικό στάδιο της τυπικής. Χαρακτηριστικά ο Lesh¹⁰⁶ (1976) δηλώνει: *“Οι δάσκαλοι τείνουν να έχουν την εντύπωση ότι, οι μόνες ιδέες που καταλαβαίνουν οι μαθητές, είναι εκείνες που έχουν συνειδητά απομονωθεί και ονομαστεί. Όμως, χρειάζεται να δοθεί περισσότερη έμφαση σε εξερευνήσεις επεκτείνοντας τη διαίσθηση, δηλαδή τη μη τυποποιημένη διδασκαλία. Υπάρχει μια συχνή διαστρέβλωση, ότι τα ορθολογιστικά Μαθηματικά σε σχέση με τα διαισθητικά (μη ορθολογιστικά), είναι ανώτερα και, ότι η σπουδαιότητα ενός μαθηματικού θέματος μετράται αποκλειστικά με τους τυποποιημένους όρους και τις αφηρημένες έννοιες που περιέχει.”* Στο ίδιο πνεύμα κινούμενη η Suydam¹⁰⁷ (1983), τονίζει τη σπουδαιότητα των "κατευθυνόμενων δραστηριοτήτων" στη διδασκαλία της Γεωμετρίας και τη χρησιμοποίηση εποπτικών υλικών γράφοντας ότι: *«Η χρησιμοποίηση κατευθυνόμενων δραστηριοτήτων στο εργαστήριο με εποπτικά υλικά, έχει σαν αποτέλεσμα να βελτιώνονται οι ομάδες που συμμετέχουν στις δραστηριότητες.»*

Αυτήν η άποψη για τη διδακτικο-μαθησιακή διαδικασία, που δίνει έμφαση στις εξερευνήσεις, τον πειραματισμό και τις κατευθυνόμενες δραστηριότητες,

¹⁰⁶ Ζαράνης, Ν. Δραστηριότητες με εκπαιδευτικό λογισμικό... *Πρακτικά 1ου Συνεδρίου της ΤΠΕ στην εκπαίδευση*. Σύρος

Ζαράνης, Ν. ό.π. Αρχική πηγή: Lesh R. (1976). Transformation Geometry in Elementary School: Some research Issues, in J. L. Martin , *Space and Geometry: Papers from a Research Workshop*. ERIC, p. 203

¹⁰⁷ Ζαράνης, Ν. ό.π. Αρχική πηγή: Suydam M.(1983). Geometry, in D. Dessart and M. Suydam *Classroom Ideas From Research on Secondary School Mathematics*, V.A. NCTM, p. 83.

οι οποίες πρέπει να προηγούνται των αφηρημένων εννοιών ή να βρίσκονται σε διαλεκτική ανατροφοδότηση με αυτές, είναι και ο θεμέλιος λίθος των «Ρεαλιστικών Μαθηματικών», του Ινστιτούτου του Freudenthal¹⁰⁸. Παρόμοια με τη ρεαλιστική προσέγγιση στα μαθηματικά¹⁰⁹, είναι και αυτή του κονστρουκτιβισμού, η οποία κυρίως στηρίζεται στη θεωρία δραστηριότητας (activity theory) των σοβιετικών Vygotsky, Luria, Davydov και Leontiev¹¹⁰, που βλέπουν τη μάθηση σαν μια διαλεκτική διαδικασία, που εμπλέκει τους διδασκόμενους με μια κουλτούρα εργαλείων και συμβόλων και συντελεί στην κατασκευή της γνώσης. Αυτή η διαλεκτική διαδικασία μάθησης, κατά την οποία η γνώση σχηματίζεται μέσα από το μετασχηματισμό της εμπειρίας και της δραστηριότητας, είναι φανερό και στον μαθησιακό κύκλο του K. Lewin¹¹¹. Κατά τον Lewin, η μαθησιακή διαδικασία συντελείται με την εναλλαγή τεσσάρων βασικών φάσεων, που σχηματίζουν έναν κύκλο, τροφοδοτώντας συνεχώς η μια την άλλη. Οι φάσεις αυτές είναι: η συγκεκριμένη εμπειρία, η αναστοχαστική παρατήρηση, η γενίκευση και ο σχηματισμός αφηρημένων εννοιών και ο έλεγχος εφαρμοσιμότητας αυτών των εννοιών σε νέες καταστάσεις, που οδηγούν σε άλλες εμπειρίες, κ.λ.π.

Αυτή η «προοδευτική μαθηματοποίηση», η οποία γίνεται με την κατάλληλη καθοδήγηση¹¹², είναι και η κεντρική ιδέα των «ρεαλιστικών μαθηματικών». Η σχολή αυτή αντιμετωπίζει τις μαθηματικές έννοιες και δομές ως “εργαλεία” οργάνωσης των φαινομένων. Η κατάλληλη επιλογή αυτών των φαινομένων (η ποικιλία και ο πλούτος τους δηλ. καθώς και η σύνδεσή τους με το περιβάλλον που βιώνει ο μαθητής, πραγματικό ή τεχνητό) παίζει πρωταρχικό ρόλο στη δόμηση μιας μαθηματικής έννοιας αλλά και στην πλήρη

¹⁰⁸ Καψάλης Α. & Λεμονίδης, Χ. (1999). Σύγχρονες τάσεις της Διδακτικής των Μαθηματικών. Μακεδόν, τ. 6, σ. 95-115

¹⁰⁹ Για τις διαφορές ανάμεσα σε αυτά τα δύο ρεύματα, βλέπε: Streefland, Leen (2000). *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση*. Έκδοση στα Ελληνικά με εισαγωγή της Ευγενίας Κολέζα, Αθήνα: Leader Books, πρόλογος

¹¹⁰ Βλέπε σελίδα 109-110 της παρούσας εργασίας

¹¹¹ Streefland, L. ό.π., εισαγωγή

¹¹² τα “ρεαλιστικά μαθηματικά”, πράγματι αποτελούν μια πιο ρεαλιστική προσέγγιση μέσα στην πραγματικότητα της τάξης σε σχέση με την κονστρουκτιβιστική προσέγγιση, αφού εστιάζουν την προσοχή στην κατάλληλη επιλογή των διδακτικών μέσων, οδηγιών ή “προβλημάτων πλαισίου” με στόχο την πρόκληση επιθυμητών διεργασιών και διορθώσεων των διαφόρων γνωστικών παρερμηνειών.

ανάπτυξή της, αφού αντιμετωπίζεται από διαφορετικές οπτικές γωνίες. Αυτήν την "διδασκική μεθοδολογία" (Κολέζα 2000), που έρχεται αντιμέτωπη με τη στρουκτουραλιστική προσέγγιση¹¹³ των "νέων" μαθηματικών της δεκαετίας του '60¹¹⁴, ο Freudenthal την περιγράφει ως εξής¹¹⁵: «...(η διδασκική φαινομενολογία): *αντί να παρουσιάσει στο μαθητή οργανωμένα φαινόμενα, με στόχο την ανακάλυψη των κοινών δομών, να ξεκινήσει από εκείνα τα φαινόμενα που ζητούν οργάνωση και έχοντας αυτά ως αφετηρία, να διδάξει το μαθητή πώς να χειρίζεται τα εργαλεία οργάνωσης..»*.

Επίσης, αξίζει να αναφερθεί ότι ένα άλλο συστατικό του μοντέλου van Hiele, εκτός από τα πέντε γνωστά επίπεδα, είναι και η «διορατικότητα»¹¹⁶. Η διορατικότητα μιας ιδέας ορίζεται ως το αποτέλεσμα της αντίληψης της δομής της. Μάλιστα, ο van Hiele, αντιπαραβάλλει τις δομές της μάθησης, με τα γεγονότα μάθησης, υποστηρίζοντας ότι ο σκοπός της διδασκαλίας των Μαθηματικών δεν μπορεί να επιτευχθεί με απλή μάθηση γεγονότων, αλλά με την ανάπτυξη της διορατικότητας.

Συγκεκριμένα, ο van Hiele (1986) θεωρεί ως συνθήκη ύπαρξης της διορατικότητας, την ικανότητα επαρκούς δράσης του ατόμου, όταν αντιμετωπίζει μια νέα κατάσταση και ότι αυτή η δράση υποδηλώνει βαθιά γνώση, μόνο αν είναι αποτέλεσμα της προσπάθειας του ίδιου του μαθητή.

Σύμφωνα λοιπόν, με τα παραπάνω, στην προτεινόμενη πρόταση διδασκαλίας των Φράκταλς (και συγκεκριμένα στην Α' Λυκείου, του τριγ. του Sierpinski) αντί να ξεκινήσω με την παρουσίαση της έννοιας κάνοντας μια στατική παρουσίαση, προτίμησα να αναζητήσω ένα φαινόμενο που θα ανάγκαζε τον μαθητή να συγκροτήσει και μαθηματικοποιήσει μόνος του το συγκεκριμένο νοητό αντικείμενο. Επιπλέον, ήθελα να αναπτύξει και την διορατικότητά του, μια και την απλή γνώση της ιδιότητας που έχει το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των πλευρών τριγώνου, ήδη την είχε

¹¹³ Καψάλης & Λεμονίδης. ό.π. , σ.103

¹¹⁴ παρούσα εργασία, σ. 100

¹¹⁵ Streefland, L. ό.π. , σ.14

¹¹⁶ Ντζιαχρήστος, Β. & Ζαράνης, Ν. (2002).). Κριτική Ανάλυση του μοντέλου van Hiele. *Θέματα στην Εκπαίδευση*, τόμος 3, τεύχος 2-3. Αθήνα: Leader Books, σ.140-141

διδασκεί.¹¹⁷ Οι διδακτικές προτάσεις, που ήδη υπήρχαν (βλέπε παρούσα εργασία), πρότειναν ή την κατασκευή του τριγ. με την εφαρμογή του επαναληπτικού κανόνα σε ένα τρίγωνο (εξερεύνηση του ευκλείδειου σχήματος) ή το γνωστό Παιχνίδι του Χάους, που έπρεπε να παιχθεί σε Η/Υ. Τη δεύτερη λύση, τουλάχιστον σαν πρώτη επαφή, δεν την έκρινα ικανοποιητική για την ελληνική πραγματικότητα, αφ' ενός μεν γιατί πολλά λύκεια δεν έχουν κατάλληλες αίθουσες αλλά και, το σπουδαιότερο, γιατί υπήρχε ο ενδοιασμός μήπως τη συγκεκριμένη δραστηριότητα την δουν σαν ηλεκτρονικό παιχνίδι, με κίνδυνο να καταλήξει ανεπαρκής για την επίτευξη των διδακτικών μου στόχων μέσα στα περιορισμένα χρονικά όρια της διδασκαλίας. Τελικά κατέληξα στην προτεινόμενη μορφή, αυτή του παιχνιδιού, για δύο λόγους: Πρώτα για να αντιμετωπίσουν μια νέα κατάσταση και να αναγκαστούν να αναπτύξουν στρατηγικές επίλυσης, συζητώντας και μεταξύ τους γι' αυτές, ώστε να ανασυρθεί η μαθηματική έννοια από μια πραγματική κατάσταση, στα πλαίσια μιας προοδευτικής μαθηματικοποίησης και δεύτερο, να δραστηριοποιηθούν και οι αμέτοχοι μαθητές και να πάρουν μέρος στην εκπαιδευτική διαδικασία, αφού το κίνητρο της "νίκης", σε συνδυασμό με την διαισθητική "άτυπη" προσέγγιση, ερχόταν σε πλήρη αντίθεση με τη συνηθισμένη διδασκαλία.

Η διδακτική πρόταση που αναπτύχθηκε¹¹⁸, αναπτύσσεται σπειροειδώς και προτείνεται για διδασκαλία κυρίως στη Γ' Γυμνασίου και στη Α' και Β' Λυκείου.

¹¹⁷ εκτός από την αντίστοιχη θεωρία, υπάρχει και η άσκηση 1. από τις ασκήσεις εμπέδωσης του σχολ. βιβλίου, που τονίζει ότι το ευθ. τμήμα που ενώνει τα μέσα AB και AG των πλευρών ενός τριγώνου ABΓ, διχοτομεί κάθε ευθ. τμήμα που ενώνει την κορυφή Α με την πλευρά ΒΓ. (Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Ενιαίου Λυκείου. Αθήνα:ΟΕΔΒ, έκδοση Γ', 2003)

¹¹⁸ Βλέπε παράρτημα

Εμπειρικό μέρος



Escher : Waterfall 1961 Lithograph

Η έρευνα δράσης δεν είναι μια γραμμική μεθοδολογία. Είναι περισσότερο μια ανοικτή κυκλική διαδικασία συνεχούς ανατροφοδότησης, όπως ο κύκλος του νερού στον παραπάνω πίνακα.

Την πειραματική πρόταση, που στηρίξαμε θεωρητικά προηγουμένως, και η οποία περιέχεται στο Παράρτημα, θελήσαμε να την εφαρμόσουμε στην πράξη για να παρατηρήσουμε τις συμπεριφορές τόσο των εκπαιδευτικών, όσο και των μαθητών. Η ερευνητική μέθοδος που επιλέξαμε, όπως θα αναλύσουμε λεπτομερώς και στη συνέχεια, ήταν η έρευνα δράσης. Επιλέξαμε αυτή τη μέθοδο γιατί πραγματοποιήσαμε μια επιμορφωτική παρέμβαση στους εκπαιδευτικούς και αναμέναμε από αυτούς μια αλλαγή συμπεριφοράς.

E2. Μεθοδολογία της έρευνας

E2.1. Ερευνητικά ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα που μας απασχόλησαν ήταν τα εξής:

- Ποια θα είναι η διδακτική συμπεριφορά καθηγητών των μαθηματικών της ομάδας κατά τη διδασκαλία αυτού του νέου περιεχομένου, το οποίο αφορά τη θεωρία του Χάους και τα Φράκταλς, με τη χρήση των νέων τεχνολογιών και γενικά με την δημιουργία κατάλληλου μαθησιακού περιβάλλοντος;
- Τι θα αποκομίσουν από την εμπλοκή τους στην έρευνα δράσης;
- Ποια θα είναι η συμπεριφορά των μαθητών απέναντι σε μια τέτοια διδασκαλία;

E2.2. Τα στάδια της έρευνας

Επειδή η διδακτική πρόταση είχε αφ' ενός μεν άγνωστο περιεχόμενο για τους περισσότερους μαθηματικούς και αφ' ετέρου έπρεπε να αναπτυχθεί σε ένα διαφορετικό εκπαιδευτικό περιβάλλον, ήταν απαραίτητο να γίνει μια αρχική επιμόρφωση των καθηγητών. Επιπρόσθετα, επειδή ο σχεδιασμός της πρότασης είχε γίνει «επί χάρτου», ήταν επίσης απαραίτητο, πριν προταθεί, να δοκιμαστεί στην πράξη, μέσα σε μια κανονική τάξη έτσι ώστε να γίνουν οι τυχόν απαραίτητες βελτιώσεις (απαιτούμενος χρόνος για κάθε δραστηριότητα, κατάλληλες ερωτήσεις, κ.λ.π.). Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να εξελιχθεί η έρευνα σε τρία βασικά στάδια:

1^ο στάδιο. Το στάδιο αυτό περιλάμβανε την εκτίμηση και καταγραφή της κατάστασης καθώς και τον σχεδιασμό της δράσης και χωρίστηκε σε τρεις φάσεις:

1^η φάση: Αρχικές επαφές, δοκιμή της πειραματικής διδασκαλίας, γενικός σχεδιασμός.

2^η φάση: Επιμόρφωση των εκπαιδευτικών, σχηματισμός της ερευνητικής ομάδας.

3^η φάση: Αρχική εξέταση των στάσεων των εκπαιδευτικών της ομάδας.

2^ο στάδιο. Δράση: Εφαρμογή και παρατήρηση της πειραματικής διδασκαλίας στην τάξη.

3^ο στάδιο. Το στάδιο αυτό περιλάμβανε την αξιολόγηση της δράσης και χωρίστηκε σε δύο φάσεις:

1^η φάση: Εξέταση της επίδρασής της στους εκπαιδευτικούς και μαθητές.

2^η φάση: Συμπεράσματα- αξιολόγηση της δράσης

1^ο στάδιο

1^η φάση: Αρχικές επαφές, δοκιμή της πειραματικής διδασκαλίας, γενικός σχεδιασμός.

Από τον Νοέμβριο έως και το πρώτο δεκαήμερο του Δεκεμβρίου του 2005 έγιναν οι αρχικές επαφές καθώς και ο έλεγχος της διδακτικής πρότασης, με τη διενέργεια πιλοτικής διδασκαλίας. Αποτέλεσμα της πιλοτικής διδασκαλίας ήταν η βελτίωση της πρότασης με την προσθήκη μιας ερώτησης στο φύλλο των ερωτήσεων.

2^η φάση: Επιμόρφωση των εκπαιδευτικών, σχηματισμός της ερευνητικής ομάδας.

Από τον Δεκέμβριο του 2005 έως και τον Ιανουάριο του 2006 έγινε η διενέργεια της επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών σε τρεις συναντήσεις, διάρκειας δύο ωρών, η κάθε μία.

Στην 1^η συνάντηση (Πέμπτη 15-12-2005, Βιβλιοθήκη 5ου Λυκείου Βέροιας), έγινε εισήγηση με θέμα « *Εμφάνιση των Φράκταλς σαν κατάσταση “ισορροπίας” Δυναμικών Συστημάτων και σαν Μαθηματικά κατασκευάσματα.*

Γνωριμία με τα πιο γνωστά Φράκταλς » και ήρθαν περίπου 40 μαθηματικοί, κυρίως από σχολεία της Βέροιας και της ευρύτερης περιοχής της καθώς και από την Νάουσα και την Αλεξάνδρεια.

Στην 2^η συνάντηση (Παρασκευή 13-1-2006, αίθουσα υπολογιστών του 3ου Λυκείου Βέροιας), έγινε εισήγηση με θέμα « *Το λογισμικό Sketchpad και η χρήση του για την κατασκευή γνωστών Φράκταλς* » και ήρθαν 23 μαθηματικοί. Όλοι τους είχαν μπει στη διαδικασία της πιστοποίησης του ΥΠΕΠΘ στους Η/Υ. Αρκετοί από αυτούς (10 άτομα) ήξεραν τα βασικά του Sketchpad, και με τη βοήθειά τους περάσαμε αρκετά εύκολα το αρχικό στάδιο της γνωριμίας με το λογισμικό.

Στην 3^η συνάντηση (Πέμπτη 19-1-2006, Βιβλιοθήκη 5ου Λυκείου Βέροιας), έγινε εισήγηση με θέμα « *Παρουσίαση συγκεκριμένης διδακτικής πρότασης με στόχο την εφαρμογή της στη διδασκαλία* » και ήρθαν 15 μαθηματικοί (είχαν όλοι πάνω από 12 χρόνια υπηρεσίας). Αρκετοί από αυτούς ενδιαφέρθηκαν για την εφαρμογή της προτεινόμενης διδασκαλίας στις τάξεις τους και πήραν το αντίστοιχο υλικό. Από αυτούς τους συναδέλφους, που φανερά προβληματίζονταν και προς διερευνητικές μορφές διδασκαλιών, δημιουργήθηκε η ερευνητική ομάδα, που θα προχωρούσε στην εφαρμογή της πρότασης. Οι δύο ήταν άνδρες και ενδιαφέρονταν να εφαρμόσουν την προτεινόμενη διδασκαλία σε τμήμα Γ΄ Γυμνασίου και Β΄ Λυκείου και οι τρεις γυναίκες, που θα την δίδασκαν οι δύο σε Α΄ και η μία σε Β΄ Λυκείου.

3^η φάση: Αρχική εξέταση των στάσεων των εκπαιδευτικών της ομάδας.

Κάθε καθηγητής έδωσε προσωπική ημιδομημένη συνέντευξη, διάρκειας περίπου μιας ώρας¹¹⁹. Οι βασικές ερωτήσεις της συνέντευξης συγκροτούσαν τις εξής ομάδες θεμάτων: α) Επιλογή του περιεχομένου των Μαθηματικών β) Επιλογή του τρόπου διδασκαλίας και γ) Επιλογή των διδακτικών μέσων.

Οι ερωτήσεις της συνέντευξης βασίστηκαν σε δύο πανελλήνιες έρευνες με αντικείμενο τις πεποιθήσεις των καθηγητών μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η πρώτη είναι των Κασιμάτη - Γιαλαμά με φορέα το Τμήμα

¹¹⁹ Για τις ερωτήσεις βλ. στο παράρτημα, σελ. 37.

Ερευνών του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου¹²⁰ και η δεύτερη του Ν. Μπαρκάτσα¹²¹, η οποία διεξήχθη τη σχολική χρονιά 1999-2000 στο πλαίσιο του ΕΠΕΤ II με κύρια χρηματοδότηση από την Ευρωπαϊκή Ένωση.

2^ο στάδιο

Δράση: Εφαρμογή και παρατήρηση της πειραματικής διδασκαλίας στην τάξη.

A. Τα τμήματα στα οποία εφαρμόστηκε η διδασκαλία

Από τον Μάρτιο του 2006 έως και τα μέσα Μαΐου 2006 έγινε η εφαρμογή της πρότασης, με τη διενέργεια των διδασκαλιών από τα μέλη της ερευνητικής ομάδας στα τμήματά τους, που ήταν των τάξεων Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ και Β΄ Λυκείου (συνολικά 5 τμήματα, ένα του γυμνασίου και από δύο των τάξεων Α΄ και Β΄ του λυκείου). Πριν από κάθε διδασκαλία γινόταν ειδική συνάντηση με τον διδάσκοντα, για παροχή διδακτικής στήριξης και επίλυση διαφόρων προβλημάτων πρακτικής φύσης.

B. Διδακτική στήριξη, λέξεις κλειδιά

Συμφωνήσαμε ότι ο « αντικειμενικός» στόχος της διδασκαλίας ήταν διπλός και αφορούσε όχι μόνο το *περιεχόμενο της διδασκαλίας* αλλά και τον *τρόπο της διδασκαλίας*¹²². Οι λέξεις - κλειδιά που ορίσαμε ήταν:

1) Ως προς το περιεχόμενο της διδασκαλίας, τις: *δυναμικό σύστημα* (χρονική πολυπλοκότητα: επαναληπτική διαδικασία ανατροφοδότησης των δεδομένων

¹²⁰ Κασιμάτη, Α., Γιαλαμάς Β. (1998). Τα «πιστεύω» (beliefs) των καθηγητών για τη μάθηση και διδασκαλία των Μαθηματικών: Μια πρώτη ερευνητική προσέγγιση. Π.Ι. Τμήμα Ερευνών. *Πρακτικά 15^{ου} Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΜΕ*, Χίος, σ. 319.

¹²¹ Μπαρκάτσας, Ν. (2003). Πεποιοθήσεις Ελλήνων καθηγητών και συμβούλων των μαθηματικών σχετικά με τα μαθηματικά, τη διδακτικομαθησιακή διαδικασία και την αξιολόγηση: Βιοδεδομένα που τις επηρεάζουν. *Θέματα στην Εκπαίδευση*, τόμος 4, τεύχος 2-3. Αθήνα: Leader Books, σ. 227-252.

¹²² Ο στόχος δεν ήταν μόνο γνωστικός αλλά και συναισθηματικός, αφού επιδιώκαμε την πρόσληψη, την ανταπόκριση και την εκτίμηση αξιών, αποδεσμεύοντας το μάθημα από τον φορμαλισμό και την αυστηρή του προσήλωση στο γνωστικό τομέα, σύμφωνα με την ταξινόμηση των Bloom-Krathwohl : Bloom, B.S. & Krathwohl, D.R. (1991). Ταξινόμια Διδακτικών Στόχων, Τόμος Β΄ -Συναισθηματικός Τομέας. Μετ. Λαμπράκη-Παγανού, Α. Θεσ/νίκη: Κώδικας, σσ. 148 – 220

στην πάροδο του χρόνου), *θεωρία του Χάους, Η/Υ, φράκταλ* (χωρική πολυπλοκότητα), *φύση και τέχνη*.

2) Ως προς τον τρόπο της διδασκαλίας, τις: συλλογική δράση, ερευνητικό πνεύμα, αλλαγή της οπτικής γωνίας προσέγγισης.

Γ. Τι διδάχθηκε

Μέσα στην τάξη έγινε η εμπειρική προσέγγιση της θεωρίας του Χάους, η κατάληξη στο τρίγωνο του Sierpinski και η συμπλήρωση των αντίστοιχων φύλλων εργασίας, που αφορούσαν την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου. Στην Β' Λυκείου διδάχθηκαν επιπλέον και οι κλασματικές διαστάσεις (σύμφωνα με το σχεδιασμό της διδακτικής πρότασης). Στην αίθουσα των Η/Υ κατασκευάστηκε το τρίγωνο του Sierpinski, με τη βοήθεια του λογισμικού Sketchpad, και έγινε διδακτική χρήση του διαδικτύου (επίσκεψη σε ιστοσελίδες με Φράκταλς, με φωτογραφίες φυσικών Φράκταλς και σε γκαλερί διάσημων ζωγράφων με αντίστοιχα έργα.)

Δ. Εργαλεία παρατήρησης

Κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας έγινε παρατήρηση της τάξης με τη βοήθεια κλειδών παρατήρησης του καθηγητή και των μαθητών. Στόχος της κλείδας παρατήρησης του καθηγητή (βλέπε παράρτημα) ήταν η συλλογή στοιχείων, που χωρίζονταν σε δύο γενικές κατηγορίες: α) την οργάνωση της μαθησιακής διαδικασίας (το κατά πόσο ο διδάσκων υποκινούσε και διατηρούσε τους μαθητές σε μια στάση που διευκόλυνε τη μάθηση) και β) την επεξεργασία των πληροφοριών (το κατά πόσο ο διδάσκων βοηθούσε τους μαθητές να κατακτήσουν τη γνώση και αν δίδαξε με πληρότητα). Στόχος της κλείδας παρατήρησης των μαθητών (βλέπε παράρτημα, σελ. 41) ήταν η συλλογή στοιχείων που χωρίζονταν σε δύο γενικές κατηγορίες: α) την κατάκτηση των στόχων μαθηματικού περιεχομένου και β) την ανταπόκριση στους παιδαγωγικούς στόχους που επιδίωκε η αλλαγή του τρόπου διδασκαλίας.

Οι δύο αυτές κλείδες παρατήρησης, δημιουργήθηκαν για τη συγκεκριμένη έρευνα και στηρίζονται στην προσαρμοσμένη από τον Μ. Βάμβουκα κλείδα παρατήρησης της λεκτικής διδακτικής συμπεριφοράς των εκπαιδευτικών των

M. D. Waimon H.J. Hermanowicz¹²³. Με την βοήθειά τους ταξινομήθηκαν και καταγράφηκαν τα τεκταινόμενα στην τάξη αλλά και τα κρίσιμα περιστατικά (Παπαδοπούλου, 1999, σ. 50-58).

Ο τύπος παρατήρησης η οποία έγινε, εντάσσεται στη συμμετοχική παρατήρηση (Βάμβουκας 2000, σ. 201), αφού βρισκόμουν μέσα στην τάξη καθ' όλη τη διάρκεια της δώρης διδασκαλίας, καταγράφοντας φανερά τα όσα συνέβαιναν. Ήταν όμως φανερή παρατήρηση με πολύ χαμηλό βαθμό συμμετοχής, με την ιδιότητά μου γνωστή τόσο στον καθηγητή όσο και στους μαθητές, με όλα τα μειονεκτήματα και πλεονεκτήματα που αυτό συνεπάγεται (Παπαδοπούλου, 1999, σελ. 40-42).

3ο στάδιο

1η φάση: Εξέταση της επίδρασης της διδασκαλίας στους εκπαιδευτικούς και στους μαθητές.

Κάθε καθηγητής της ερευνητικής ομάδας έδωσε, μετά τη διενέργεια της διδασκαλίας, προσωπική ημιδομημένη συνέντευξη (βλέπε παράρτημα), διάρκειας περίπου μιας ώρας με στόχο την καταγραφή των προσωπικών του εμπειριών και στάσεων.

Οι μαθητές απάντησαν γραπτά σε ερωτήσεις, μέσα στην τάξη, την επόμενη διδακτική ώρα του μαθήματος (μετά από 2 – 5 ημέρες), με σκοπό να αποτυπωθούν οι εντυπώσεις τους και να δουν οι καθηγητές τι αποκόμισαν οι μαθητές από τη διδασκαλία τους.

2η φάση: Συμπεράσματα- αξιολόγηση της δράσης

Ομαδική συζήτηση με τα μέλη της ομάδας μετά το τέλος όλων των διδασκαλιών, όπου συζητήσαμε τις εμπειρίες του καθένα και σχολιάσαμε τις γραπτές απαντήσεις των μαθητών. Έτσι οι εκπαιδευτικοί συνέκριναν και αντιπαραέβαλαν τις αναφορές του παρατηρητή και των μαθητών με την δική τους εμπειρία. Στην ανταλλαγή απόψεων που ακολούθησε επιχειρήθηκε μια γενική αξιολόγηση, η οποία μας έδωσε στοιχεία για ανατροφοδότηση.

¹²³ Βάμβουκας, Μ. (2000). *Εισαγωγή στην Ψυχοπαιδαγωγική έρευνα και μεθοδολογία*. Αθήνα: Γρηγόρης, σ. 206.

ΣΤ. Ανάλυση των δεδομένων της έρευνας

ΣΤ.1. Οι αρχικές απόψεις των καθηγητών των μαθηματικών

Οι βασικές ερωτήσεις¹²⁴ που τέθηκαν στους καθηγητές συγκροτούσαν τις εξής ομάδες θεμάτων¹²⁵:

α) Η πρώτη ομάδα των ερωτήσεων (ερωτήσεις 2,3,4,5) διερευνούσε τις πεποιθήσεις τους σχετικά με τη Φύση των Μαθηματικών, οι οποίες επηρεάζουν και την Επιλογή του Περιεχομένου των Μαθηματικών. Στόχος τους ήταν να εξετάσουν αν είναι «ανοικτοί» στο να διδάξουν και σύγχρονα θέματα, όπως αυτό των Φράκταλς.

β) Η δεύτερη ομάδα των ερωτήσεων (ερωτήσεις 6,9,10,11,13) διερευνούσε τις πεποιθήσεις τους σχετικά με τη μαθησιακή διαδικασία, οι οποίες επηρεάζουν και την Επιλογή του Τρόπου Διδασκαλίας. Στόχος τους ήταν να εξετάσουν αν είναι «ανοικτοί» και σε σύγχρονους, μαθητοκεντρικούς τρόπους διδασκαλίας ή αν είναι αυστηρά προσηλωμένοι στην μετωπική, δασκαλοκεντρική διδασκαλία.

γ) Η τρίτη ομάδα (ερωτήσεις 7,8,12,14) διερευνούσε τις πεποιθήσεις τους σχετικά με τη Διδακτική των Μαθηματικών, οι οποίες επηρεάζουν και την Επιλογή των Διδακτικών Μέσων. Στόχος τους ήταν να εξετάσουν αν θεωρούν σημαντική την εύρεση του «κατάλληλου» μαθησιακού περιβάλλοντος (εύρεση κατάλληλου προβλήματος, αλλαγή γωνίας προσέγγισης ενός θέματος, χρήση Η/Υ, διδακτικά παιχνίδια, κ.λ.π.).

Οι απαντήσεις των καθηγητών έδειξαν ότι έτειναν προς το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας χωρίς γενικά να στρέφονται προς διερευνητικές τάσεις. Κυρίαρχη ήταν η άποψη ότι τα σχολικά μαθηματικά αποτελούν ένα γνωστικό πεδίο, το οποίο εστιάζεται στο περιεχόμενο (διδασκτέα ύλη) και χαρακτηρίζεται από ακριβή αποτελέσματα και συγκεκριμένες, αλάνθαστες διαδικασίες¹²⁶. Το

¹²⁴ Βλέπε παράρτημα

¹²⁵ Φυσικά ο διαχωρισμός δεν μπορεί να είναι στεγανός αφού οι ομάδες αλληλοεπηρεάζονται. Η ερώτηση (1) είναι πολύ γενική και δεν ομαδοποιήθηκε.

¹²⁶ Εξ άλλου: «*Η εικόνα των μαθηματικών του σχολείου αντιστοιχεί σ' ένα στάδιο της μαθηματικής δραστηριότητας όπου η ερευνητική διαδικασία έχει πλέον τελειώσει και τα αποτελέσματά της είναι αποδεκτά τουλάχιστον από το ίδιο το υποκείμενο της*

σύνολο των αντιλήψεών τους προερχόταν από μακροχρόνιες βιωματικές εμπειρίες, που είχαν τις ρίζες τους στο παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας το οποίο δέχτηκαν όταν ήταν οι ίδιοι μαθητές και το οποίο παγιώθηκε με την μετέπειτα επαγγελματική τους εμπειρία, κυρίως φροντιστηριακής φύσης. Συγκεκριμένα:

Για τη φύση των μαθηματικών:

Όλοι πιστεύουν στην χρησιμότητα του μαθήματος εκφράζοντας την άποψη ότι τα μαθηματικά αποτελούνται από διάφορους κανόνες (θεωρία) και δεξιότητες (υπολογιστικές), οι οποίες πρέπει να κατακτηθούν για να «*διευκολύνουν τη ζωή μας*» αλλά και να μας κάνουν να «*αναπτύξουμε κριτική σκέψη*». Δύο από αυτούς είχαν αντιδιαμετρικές απόψεις για την φιλοσοφία των μαθηματικών: Ο ένας υποστήριζε ότι τα μαθηματικά είναι ένα σύνολο από μονολιθικές και αμετάβλητες δομές και αλήθειες, τις οποίες ανακαλύπτουμε και επηρεάζουν τις άλλες επιστήμες, χωρίς να επηρεάζονται πολύ από αυτές, ενώ ο άλλος είχε σαφή δυναμική θεώρηση, υποστηρίζοντας ότι αποτελούν πολιτισμική «κατασκευή»: «*Τα Μαθηματικά τα οικοδομούμε στην προσπάθειά μας να οργανώσουμε τις πληροφορίες, που μας δίνει κάθε τόσο η τρέχουσα πραγματικότητα, μέσω των διαφόρων εμπειριών και παρατηρήσεων.... γι' αυτό και οι διάφοροι πολιτισμοί στην αρχαιότητα, είχαν αναπτύξει διαφορετικά μαθηματικά.*»

Για τη διδακτική τους στάση:

A) Η διδασκαλία τους είναι αυστηρά δασκαλοκεντρική, η οποία μάλιστα, κατά τη διάρκεια της παράδοσης, καταλήγει να είναι μονόλογος, αφού οι μαθητές αδιαφορούν ή αγνοούν βασικά πράγματα. Αν γίνουν ερωτήσεις, αυτές είναι αυστηρά κλειστές και κατευθυνόμενες με στόχο να οδηγήσουν τους μαθητές στην αναζήτηση μιας συγκεκριμένης απάντησης. Μάλιστα, αυτές τις ερωτήσεις τις απευθύνουν συνήθως στους καλούς μαθητές, αποφεύγοντας να εμπλέξουν στην διαδικασία αυτούς που δεν έχουν καλή επίδοση γιατί: «*η κατά πάσα πιθανότητα λανθασμένη απάντηση ή θα προκαλέσει γέλιο ή χάσιμο του χρόνου*».

δραστηριότητας». (Καλαβάσης, Φ. (1998). Η αξιολόγηση από τη σκοπιά της Διδακτικής των Μαθηματικών. *Πρακτικά 15^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου της ΕΜΕ*, Χίος 1998, σελ. 353)

Β) Έχουν αυστηρά διαχωριστικά πλαίσια ανάμεσα στην Άλγεβρα και την Γεωμετρία και τις ασκήσεις και τα προβλήματα τα αντιμετωπίζουν σαν εφαρμογές της θεωρίας.

Γ) Από τους πέντε καθηγητές οι τέσσερις δεν έχουν διαβάσει ποτέ τα ιστορικά σημειώματα του σχολικού βιβλίου. Κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των μαθηματικών σπάνια γίνεται ιστορική αναφορά και σύνδεση μιας γνώσης με την εποχή της, με αποτέλεσμα να ενισχύεται η άποψη από μέρους των μαθητών για το «εγκάθετο», το σταθερό και αμετάβλητο της επιστήμης των μαθηματικών.

Δ) Συνηθίζουν να μην παρεκκλίνουν από το σχολικό βιβλίο και η μόνη, εκτός σχολικού βιβλίου παρέμβασή τους, είναι να δίνουν στους μαθητές φυλλάδια με ασκήσεις «για να ασχοληθούν όσοι έχουν όρεξη».

Ο ρόλος που παίζουν οι πεπαιθώσεις για τη φύση των μαθηματικών, στην διαμόρφωση αντίστοιχης διδακτικής στάσης, φάνηκε στον καθηγητή που υποστήριξε ότι τα μαθηματικά αποτελούν πολιτισμική δημιουργία. Ο καθηγητής αυτός τόνισε την ανάγκη αλλαγής του τρόπου διδασκαλίας, δηλώνοντας ότι : *«...η τεχνολογική άνοδος, πρώτα απ' όλα δημιουργεί και άλλα μαθηματικά.... η εξοικείωση των μαθητών με τους Η/Υ, από πολύ μικρή ηλικία, θα επιβάλλει και αλλαγή του τρόπου διδασκαλίας. Πρώτα στο ότι πρέπει να τους συμπεριλάβουμε στο μάθημά μας και δεύτερο στο ότι μάλλον θα πρέπει να ασχολούμαστε, κατά κάποιο τρόπο, με τον κάθε μαθητή προσωπικά γιατί η προσοχή του τώρα σε επίπεδο τάξης θα αποσπάται πολύ εύκολα. Το σημερινό παιδί έχει συνηθίσει λόγω των παιχνιδιών στους υπολογιστές, σε ένα τρόπο συνεχούς κινητοποίησης και πρόκλησης. Κάτι που δεν μπορεί να του δώσει ο σημερινός τρόπος διδασκαλίας».*

Τι πιστεύουν για τη διαδικασία της μάθησης:

Α) Εστιάζονται στην εκμάθηση του συγκεκριμένου περιεχομένου της διδακτέας ύλης. Στόχος όλων ήταν να καλύψουν την ύλη όσο γίνεται γρηγορότερα ώστε να έχουν αρκετό χρόνο για την αξιολόγηση των μαθητών τους αλλά και για τη διενέργεια πολλών επαναλήψεων αφού *«με τις επαναλήψεις και το διάβασμα εξαλείφονται όλες οι δυσκολίες τους».*

Β) Γενικά δεν ασχολούνται με τις λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών τους, θεωρώντας ότι αυτές είναι αποτέλεσμα μη επαρκούς μελέτης. Στην

υποερώτηση του τι κάνουν όταν το ίδιο λάθος επαναλαμβάνεται από διαφορετικούς μαθητές, απάντησαν ότι αν έχουν χρόνο, επαναλαμβάνουν τη θεωρία.

Γ) Πιστεύουν ότι πολλοί μαθητές φαίνεται να είναι *«χαμένη υπόθεση»* και ότι ένα κατάλληλο περιβάλλον, μάλλον θα τους βοηθούσε όλους, σε μικρότερη όμως ηλικία, γιατί ήδη από το γυμνάσιο πολλοί μαθητές δηλώνουν μια άρνηση για τα μαθηματικά. Έχουν μεν την πεποίθηση ότι όλα είναι θέμα διαβάσματος: *«Όποιος προσέχει, έχει βέβαια λίγο μυαλό και κυρίως διαβάζει, δεν έχει το παραμικρό πρόβλημα. Μια χαρά μπορεί να τα μάθει προσέχοντας στον πίνακα»*, όμως βρίσκονται και στο μεταβατικό στάδιο του να δοκιμάσουν και κάτι διαφορετικό, δεν έχουν όμως το κατάλληλο υπόβαθρο: *«Πολύ θα ήθελα να έχω το χρόνο και τη γνώση για να ασχοληθώ με αυτά. Εγώ, όπως είμαι τώρα, αισθάνομαι άνετα με τον πίνακα και τον συγκεκριμένο τρόπο διδασκαλίας που έχω συνηθίσει....θα ήθελα να δοκιμάσω και κάτι διαφορετικό. Θα προσπαθήσω να δω πώς θα περπατήσε!»*.

Κοινή διαπίστωση ήταν ότι:

- Η παρεχόμενη γνώση έχει μεταφερθεί εκτός σχολείου: *«η μόρφωση έχει εστιαστεί μόνο σε στείρα γνώση που ελέγχεται στις πανελλήνιες και μάλιστα έχει μετατεθεί στα φροντιστήρια. Αν δεν υπήρχαν οι απουσίες δεν θα πατούσε κανένας μαθητής στο σχολείο»*.
- Επιπλέον όμως αυτή η παρεχόμενη γνώση έχει αρχίσει και να αμφισβητείται: *«Είναι αναγκαίο το σχολείο να καλλιεργήσει και άλλες δεξιότητες, και άλλη παιδεία. Οι μαθητές αναπτύσσουν μια μονόπλευρη γνώση και αυτή τεχνική, που την ξεχνάνε μετά αμέσως. Είδες πόσοι καλοί μαθητές που περνάνε σε υψηλόβαθμες σχολές τα παρατάνε γιατί δεν μπορούν να τα βγάλουν πέρα; Όλοι έχουν μάθει να δουλεύουν σε γνωστό πεδίο, σε κλειστές ερωτήσεις και προβλήματα αντίστοιχα με αυτά των πανελληνίων...»*
- Αισθάνονται έντονα την ανάγκη της επιμόρφωσης: *«Δεν έχουμε τη γνώση να δοκιμάσουμε κάτι άλλο. Κάνουμε αυτό που ξέρουμε όσο καλύτερα γίνεται. Εμείς πώς μαθαίναμε; Βέβαια, θα μου πεις, οι εποχές άλλαξαν, το βλέπουμε και από τα παιδιά μας. Κάτι πρέπει να γίνει....»* ή

«μας έχουν αφήσει αβοήθητους να διαχειριστούμε μια καταδικασμένη πραγματικότητα».

Η προθυμία των καθηγητών της ερευνητικής ομάδας να δοκιμάσουν στην πράξη την πρόταση διδασκαλίας των Φράκταλς, απέδειξε ότι δεν μπορούν να χαρακτηριστούν τελείως «παραδοσιακοί» αφού προσανατολίζονται και προς διερευνητικές μορφές διδασκαλιών, με σύγχρονο περιεχόμενο και νέο περιβάλλον μάθησης. Πιστεύουν στην αναγκαιότητα αλλαγών στην εκπαιδευτική πρακτική αλλά βρίσκονται μάλλον σε ένα μεταβατικό στάδιο αφού δεν έχουν αποκτήσει τη σχετική εμπειρία εφαρμογής και εναλλακτικών μορφών διδασκαλίας, που ίσως τους βοηθήσει καταρχήν να τροποποιήσουν κάποιες από τις παγιωμένες αντιλήψεις τους.

ΣΤ.2. Παρουσίαση και ανάλυση των διδασκαλιών

Πριν την ανάλυση των διδασκαλιών δίνεται συνοπτικά το γενικό προφίλ των πέντε καθηγητών, που πήραν μέρος στην πειραματική διδασκαλία και οι αντιλήψεις τους για τα μαθηματικά, ως γνωστικό αντικείμενο, που διαφάνηκαν κατά την αρχική συνέντευξη. Σε διεθνείς έρευνες (Richardson et al. 1991)¹²⁷ έχει διαπιστωθεί ότι οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετίζονται άμεσα με οποιαδήποτε αλλαγή στη διδακτική πρακτική αφού αυτές επηρεάζουν την επιλογή των διδακτικών μέσων και στρατηγικών, την επιλογή του περιεχομένου των Μαθηματικών, ακόμα και τον τρόπο που προσεγγίζει ο εκπαιδευτικός τους μαθητές σε ατομικό ή ομαδικό επίπεδο. Οι αντιλήψεις αυτές μπορούν να ενταχθούν στις εξής κατηγορίες¹²⁸:

Α.Δυναμική Θεώρηση: Τα μαθηματικά είναι μια διαρκώς αναπτυσσόμενη δημιουργία, μια διαδικασία διερεύνησης και ανακάλυψης νέας γνώσης, που

¹²⁷ Μπαρκάτσας, Ν. (2003). Πεποιθήσεις Ελλήνων καθηγητών και συμβούλων των μαθηματικών σχετικά με τα μαθηματικά, τη διδακτικομαθησιακή διαδικασία και την αξιολόγηση: Βιοδεδομένα που τις επηρεάζουν. *Θέματα στην Εκπαίδευση, τόμος 4, τεύχος 2-3*, σελ. 227-252, Αθήνα: Leader Books. Αρχική πηγή:

Richardson, V., Anders P., Tidwell, D., Lloyd, C. (1991). The relationship between teachers' beliefs and practices in reading comprehension instruction, *American Educational Research Journal*, 28 (3), 559-586

¹²⁸ Φιλίππου, Γ-Χρήστου, Κ. (2001) Βασικές έννοιες και η σημασία τους : Αντιλήψεις για τα Μαθηματικά, Ατραπός (<http://www.ucy.ac.cy/edumath/Gagatsis/sinesthimata3.ppt>)

συμπληρώνει, επεκτείνει ή διαφοροποιεί την προηγούμενη. Τα μαθηματικά δεν είναι απόλυτη γνώση αλλά βρίσκονται σε διαρκή εξέλιξη.

Β.Στατική (Πλατωνική) Θεώρηση: Τα μαθηματικά είναι ένα ενιαίο σώμα γνώσεων, μια κρυστάλλινη ενότητα γεγονότων και δομών συνδεδεμένων με τους ιστούς της λογικής. Με αυτή την έννοια τα μαθηματικά είναι απόλυτες αλήθειες που υπήρχαν πάντοτε και απλώς ο άνθρωπος τις ανακαλύπτει.

Γ.Εργαλειακή άποψη: Τα μαθηματικά είναι ένα συγκροτημένο σύνολο συσσωρευμένων γεγονότων, κανόνων και δεξιοτήτων, που χρησιμοποιούνται επιδέξια από τον καταρτισμένο ειδικό για την επίτευξη πρακτικών στόχων.

ΣΤ.2.α. Περίπτωση Α

Ο Α είχε 12 χρόνια προϋπηρεσία στο δημόσιο σχολείο και περίπου για μια δεκαετία δίδαξε σε φροντιστήρια. Δεν παρακολούθησε καμία επιμόρφωση στην διδακτική των μαθηματικών. Έχει αρκετά καλή σχέση με τους Η/Υ και πρόσφατα πήρε τη σχετική πιστοποίηση.

Στην αρχική συνέντευξη δήλωσε ότι το σημαντικό στην επιστήμη των μαθηματικών, είναι τόσο η εργαλειακή χρησιμότητά τους, όσο και η ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης (Δυναμική θεώρηση): *«Τα μαθηματικά αλλάζουν...Κάτι που περπατάει μια εποχή, μπορεί να αποδειχτεί λανθασμένο ή ελλιπές σε μια άλλη. Αν μελετήσεις την ιστορία τους, τότε το καταλαβαίνεις, όπως τότε με τους Πυθαγόρειους.. και τώρα με τους Η/Υ.. Πρέπει οι μαθητές να μάθουν να σκέφτονται, να διερευνούν δομές και σχέσεις και όχι μόνο να χρησιμοποιούν συγκεκριμένες υπολογιστικές μεθόδους ή να ακολουθούν πιστά διάφορες τεχνικές...»*. Ήταν πολύ δεκτικός στο να διδάξει την πρόταση ακολουθώντας ομαδοσυνεργατική διδασκαλία, με την οποία ήταν σε θεωρητικό επίπεδο εξοικειωμένος αφού είχε γυναίκα δασκάλα, που δίδασκε ακολουθώντας, κυρίως, αυτόν τον τρόπο διδασκαλίας.

Διδάσκει σε όλες τις τάξεις του Γυμνασίου. Το τμήμα στο οποίο θα εφαρμόζε την πειραματική διδασκαλία ήταν της Γ' Γυμνασίου και είχε 24 μαθητές. Οι δέκα από αυτούς ήταν άριστοι (18-20), οι 4 ήταν πολύ αδιάφοροι και οι υπόλοιποι ήταν μέτριοι μαθητές (η βαθμολογία τους κυμαινόταν γύρω στο 15). Οι μαθητές μόλις είχαν διδαχθεί τις παραγράφους από 6.3 έως και 6.8 που διαπραγματεύονταν τα ίσα τμήματα μεταξύ παραλλήλων, το Θεώρημα του Θαλή, τα όμοια πολύγωνα, τα όμοια τρίγωνα και τα εμβαδά όμοιων σχημάτων.

ΣΤ.2.β. Περίπτωση Β

Η Β είχε 16 χρόνια προϋπηρεσία στο δημόσιο σχολείο και πριν διοριστεί παρέδιδε ιδιαίτερα μαθήματα, κυρίως σε μαθητές Λυκείου. Δεν παρακολούθησε καμία επιμόρφωση στην διδακτική των μαθηματικών. Κατά τη διάρκεια των τριών τελευταίων χρόνων απέκτησε μια πολύ καλή σχέση με τους Η/Υ και το Internet δηλώνοντας ότι με τη βοήθειά του άρχισε να «ξεστραβώνεται», αφού μπορεί και επισκέπτεται τις διάφορες εκπαιδευτικές πύλες.

Η φιλοσοφία της για τα Μαθηματικά ακολουθούσε κυρίως την Εργαλειακή¹²⁹ άποψη αλλά κατά τη διάρκεια της συνέντευξης φάνηκε και μια μετατόπισή της προς την δυναμική άποψη της επίλυσης προβλημάτων : *«..στη σημερινή εποχή όλα αλλάζουν και χρειάζεται και κάτι περισσότερο από την απ' ευθείας γνώση για την επίλυση νέων προβληματικών καταστάσεων.»*

Το τμήμα στο οποίο θα εφαρμόζε τη διδασκαλία ήταν τμήμα της Α' Λυκείου και είχε 17 μαθητές. Οι δέκα από αυτούς ήταν άριστοι (18-20, οι περισσότεροι παιδιά συναδέλφων), οι 5 αρκετά καλοί (16-18) και οι δύο μάλλον αντιμετώπιζαν δυσκολίες στα μαθηματικά αλλά στα θεωρητικά μαθήματα ήταν πολύ καλοί. Οι μαθητές είχαν διδαχθεί μέχρι και την & 5.9 (παραλληλόγραμμο και τις εφαρμογές τους στα τρίγωνα).

ΣΤ.2.γ. Περίπτωση Γ

Η Γ είχε 14 χρόνια προϋπηρεσία στο δημόσιο σχολείο και πριν διοριστεί δούλευε σε φροντιστήριο. Δεν είχε καμία επιμόρφωση και τον τελευταίο χρόνο άρχισε να αποκτά γνώσεις Η/Υ, και αυτή λόγω της πιστοποίησης. Η φιλοσοφία της για τα Μαθηματικά ακολουθούσε την Εργαλειακή άποψη με σαφή Πλατωνική Θεώρηση: *« Τα μαθηματικά είναι μια παγκόσμια γλώσσα, αντικειμενική και αλάνθαστη που μας βοηθά να λύνουμε όλα τα πρακτικά μας προβλήματα»*. Στις συζητήσεις μας φάνηκε ότι την ενθουσίασε μεν το περιεχόμενο της διδασκαλίας, αλλά ήταν αντίθετη με την προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση: *« ..Από τη στιγμή που το σύστημα αξιολόγησης*

¹²⁹ Στην ερώτηση του τι είναι γι' αυτήν τα μαθηματικά απάντησε ότι είναι ένα σύνολο χρήσιμων κανόνων οι οποίοι βοηθούν το άτομο, από το να χειρίζεται προβλήματα οικονομικής φύσης και να κάνει υπολογισμούς, μέχρι να οργανώνει δεδομένα κάθε φύσης, όπως και τη σκέψη του.

παραμένει το ίδιο, για ποιο σκοπό να ζοριστώ και να αλλάξω τον τρόπο δουλειάς μου; Δεν λέω, χρειάζονται βέβαια, και είναι ενδιαφέροντα αυτά που προτείνεις...θα τους τα μάθει όμως η ζωή..»

Παρ' όλη την αρνητική στάση της καθηγήτριας στον προτεινόμενο τρόπο διδασκαλίας, θεώρησα ενδιαφέρουσα την συμμετοχή της στην ομάδα, στοχεύοντας σε μια πιθανή αναδιοργάνωση των απόψεών της, αφού στο πλαίσιο των νεότερων προσεγγίσεων, η γνώση κατασκευάζεται ως αποτέλεσμα δυναμικής αλληλεπίδρασης και διαλεκτικής ανάμεσα στο υποκείμενο και το περιβάλλον δράσης του. (Greene,1992: 39-45)¹³⁰.

Το τμήμα της ήταν της Α' Λυκείου, μέσου επιπέδου, και αποτελείτο από 23 μαθητές. Οι 4 από αυτούς ήταν άριστοι(με βαθμολογία από 18-20), οι 5 αρκετά καλοί(15-17), οι 10 πολύ μέτριοι(10-14) και οι 4 τελείως αδιάφοροι. Οι μαθητές είχαν διδαχθεί μέχρι και την & 5.9 (παραλληλόγραμμα και τις εφαρμογές τους στα τρίγωνα).

ΣΤ.2.δ. Περίπτωση Δ

Ο Δ είχε 14 χρόνια προϋπηρεσία στο δημόσιο σχολείο και για 10 χρόνια περίπου διατηρούσε φροντιστήριο. Παρ' όλο που η δουλειά του ήταν κυρίως να ετοιμάζει μαθητές της Β' και Γ' Λυκείου για τις πανελλήνιες, αισθανόταν έντονα απογοητευμένος από την εκπαιδευτική πραγματικότητα του σχολείου. *«Όλο και περισσότεροι μαθητές αποκτούν μια τελείως αρνητική θέση για τα μαθηματικά, να φανταστείς ούτε ποσοστά δεν ξέρουν! Και αν μου πεις για τους καλούς, ξέρεις πόσοι τα τελευταία χρόνια, που έχουν περάσει στις υψηλόβαθμες σχολές των πολυτεχνείων δυσκολεύονται και τα παρατάνε γιατί δεν μπορούν να δράσουν σε ένα πιο ελεύθερο πεδίο σκέψης; Τι έχουν μάθει; Θεωρία, εφαρμογή και κατηγοριοποίηση ασκήσεων! Τίποτε περισσότερο.»* Ήταν ο μόνος από τους καθηγητές της ερευνητικής ομάδας που είχε διαμορφωμένη την άποψη ότι τα μαθηματικά αποτελούν ένα συνεχώς επεκτεινόμενο πεδίο διερεύνησης, μια δυναμική αναζήτηση για προβλήματα και μοντέλα, που τα αποτελέσματά τους παραμένουν ανοιχτά για αναθεωρήσεις και ότι σήμερα, περισσότερο από ποτέ, πρέπει το σχολείο να καλλιεργήσει αλλά και να αξιολογήσει και άλλες δεξιότητες, που θα

¹³⁰ Creene, G.(1992) The practioner's perspective ,*Curriculum Inquiry*, 22, 39-45

διευκολύνουν την ανάπτυξη βασικών κοινωνικών λειτουργιών και ερευνητικού κλίματος. Δεν είχε παρακολουθήσει καμία επιμόρφωση, αλλά ενημερωνόταν από μόνος του για τις σύγχρονες τάσεις της διδακτικής και τα αποτελέσματα ερευνών, κυρίως από το διαδίκτυο.

Το τμήμα του ήταν της Β΄ Λυκείου, είχε 25 μαθητές και ήταν γενικής παιδείας. Από τους 25 οι 10 ήταν θεωρητικής κατεύθυνσης και οι υπόλοιποι 15 ήταν θετικής και τεχνολογικής (οι 7 θετικής και οι 8 τεχνολογικής), έχοντας επιλέξει τους ΗΥ ως μάθημα επιλογής. Οι μαθητές είχαν διδαχθεί στη γεωμετρία μέχρι και το κεφ. 10, που διαπραγματεύεται τα εμβαδά και στην Άλγεβρα μέχρι και τις γεωμετρικές προόδους.

ΣΤ.2.ε. Περίπτωση Ε

Η Ε είχε 15 χρόνια προϋπηρεσία στο δημόσιο σχολείο και πριν διοριστεί έκανε ιδιαίτερα. Είχε παρακολουθήσει πριν μια περίπτωση πενταετία επιμόρφωση στο ΑΠΘ για τη διδακτική χρήση των Η/Υ. Και αυτή ακολουθούσε μάλλον την εργαλειακή άποψη για τα μαθηματικά. Βρήκε πολύ ενδιαφέρον το υλικό της διδασκαλίας αλλά είχε αμφιβολίες για την προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση. Οι λόγοι που επικαλέστηκε ήταν η απώλεια χρόνου και το ότι δεν ήξερε αν θα μπορούσε να κρατήσει τον έλεγχο της τάξης. Δήλωσε όμως ότι θα προσπαθούσε να εφαρμόσει την προτεινόμενη πορεία.

Το τμήμα της είχε 24 μαθητές και ήταν της Β΄ Λυκείου, γενικής παιδείας. Από αυτούς οι 14 ήταν θεωρητικής κατεύθυνσης και οι υπόλοιποι 10 ήταν θετικής και τεχνολογικής (οι 3 θετικής και οι 7 τεχνολογικής). Εκτός από τα 3 παιδιά της θετικής κατεύθυνσης και τα 4 από τα παιδιά της τεχνολογικής όλοι οι υπόλοιποι είχαν πολύ κακή σχέση με τα μαθηματικά. Και εδώ οι μαθητές είχαν διδαχθεί στη γεωμετρία μέχρι και το κεφ. 10, που διαπραγματεύεται τα εμβαδά και στην Άλγεβρα μέχρι και τις γεωμετρικές προόδους.

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι:

Α) Παρ' όλο που η πορεία της διδακτικής πρότασης ήταν συγκεκριμένη, η διδακτική συμπεριφορά των καθηγητών διαφοροποιήθηκε. Μεγάλο ρόλο στην διαφοροποίηση της διδασκαλίας τους έπαιξαν οι πεπαιθώσεις τους για τη φύση και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Οι καθηγητές δίδαξαν σύμφωνα με την εσωτερική τους άποψη για το τι είναι σημαντικό να μαθαίνουν οι μαθητές στο

μάθημα των μαθηματικών, τη διδακτική προσέγγιση που θεωρούν καλύτερη γι' αυτό (ή αυτή που έμαθαν να εφαρμόζουν) και το αν θεωρούν ότι είναι απαραίτητο ο μαθητής να αποκτά επιπλέον και άλλες δεξιότητες, κοινωνικής φύσης.

Β) Ενώ το περιεχόμενο των διδασκαλιών ήταν το ίδιο, ο διαφορετικός τρόπος προσέγγισής του είχε άμεσο αντίκτυπο, όχι μόνο στο πόσοι μαθητές πήραν μέρος στην διαδικασία της μάθησης αλλά και στο τι έμαθαν οι μαθητές.

Γ) Υπήρξε αλληλεπίδραση ανάμεσα στις πεπαιθώσεις των καθηγητών και τη γενική γνώση παιδαγωγικού περιεχομένου που προέκυψε από την αξιολόγηση της δράσης των διδασκαλιών κατά τη διάρκεια της ομαδικής συζήτησης.

ΣΤ.2.1. Α) Ανάλυση της διδακτικής συμπεριφοράς των καθηγητών

Από τους πέντε καθηγητές, μόνον ο ένας (περίπτωση Γ) ακολούθησε τελείως παραδοσιακή διδασκαλία, αρνούμενος από την αρχή, όχι μόνο τη συνεργατική διδασκαλία αλλά και την κατάσταση προβλήματος του παιχνιδιού του Χάους. Οι υπόλοιποι τέσσερις κινητοποίησαν τους μαθητές τους με την κατάσταση προβλήματος αλλά μόνον οι δύο από αυτούς μπόρεσαν να αναπτύξουν ερευνητικό κλίμα και να εφαρμόσουν με σχετική επιτυχία συνεργατική διδασκαλία.

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται συνοπτικά η φιλοσοφία του καθηγητή για τη φύση των μαθηματικών και το είδος της διδασκαλίας που πραγματοποίησε.

Καθηγητής	Η φιλοσοφία του καθηγητή για τη φύση των Μαθηματικών	Η διδασκαλία του	
		Εμπλοκή των μαθητών στην κατάσταση προβλήματος	Συνεργατική διδασκαλία
A	Κυρίως Δυναμική Θεώρηση (Συνεχώς	Ναι, με επιτυχία	Ναι, με σχετική επιτυχία

	επεκτεινόμενο πεδίο διερεύνησης)		
Β	Κυρίως Εργαλειακή άποψη (με μια μικρή μετατόπιση προς τη Δυναμική Θεώρηση)	Ναι, χωρίς επιτυχία	Ναι, χωρίς επιτυχία
Γ	Εργαλειακή άποψη (με σαφή Πλατωνική θεώρηση)	Όχι	Όχι
Δ	Σαφής Δυναμική Θεώρηση (Δυναμική αναζήτηση για προβλήματα και μοντέλα)	Ναι, με επιτυχία	Ναι, με σχετική επιτυχία
Ε	Κυρίως Εργαλειακή άποψη	Ναι, με σχετική επιτυχία	Όχι

Η διδακτική συμπεριφορά των καθηγητών αναλύθηκε σύμφωνα με τους παρακάτω παράγοντες:

A1) Την οργάνωση της μαθησιακής διαδικασίας, με επιμέρους παράγοντες:

A1.1) Την κινητοποίηση των μαθητών
με την εμπλοκή τους στην κατάσταση
προβλήματος του παιχνιδιού του
Χάους

A1.2) Την εφαρμογή συνεργατικής
διδασκαλίας

A2) Την επεξεργασία των πληροφοριών, με επιμέρους παράγοντες:

A2.1) Την κατάκτηση της γνώσης με
την καλλιέργεια ερευνητικού κλίματος

A2.2) Την πληρότητα του
μαθηματικού περιεχομένου

A1) Οργάνωση της μαθησιακής διαδικασίας

A1.1) Κινητοποίηση των μαθητών

Η εμπλοκή στην κατάσταση προβλήματος αποτελούσε βασικό κομμάτι της διδασκαλίας. Ο ένας από τους πέντε καθηγητές, ο καθ. Γ, δεν ενέπλεξε καθόλου τους μαθητές του στην κατάσταση προβλήματος. Η εσωτερική φιλοσοφία αυτού του καθηγητή, που ακολουθούσε την εργαλειακή άποψη για τα μαθηματικά, και η οποία είχε φανεί και κατά τη διάρκεια της αρχικής συνέντευξης, ήταν τόσο έντονη, που επηρέασε αποφασιστικά από την αρχή την επιλογή της διδακτικής προσέγγισης. Ο καθηγητής αυτός αντιμετώπισε το πρόβλημα κατ' ευθείαν ως άμεση εφαρμογή γνωστής άσκησης του σχολικού βιβλίου¹³¹.

Σε πρώτη φάση, οι τέσσερις καθηγητές που το χρησιμοποίησαν στη διδασκαλία τους με τον τρόπο που προτεινόταν, ως πρόβλημα –παιχνίδι, προκάλεσαν την περιέργεια και το ενδιαφέρον των μαθητών δημιουργώντας ένα ευχάριστο μαθησιακό κλίμα που δραστηριοποίησε όλους σχεδόν τους μαθητές. Αυτό φάνηκε και από την παρατήρηση της τάξης και τα ερωτηματολόγια. Χαρακτηριστική είναι και η απάντηση του καθηγητή Δ: *«Διαπίστωσα στην πράξη ότι το να αρχίσεις το μάθημα ξαφνιάζοντάς τους με ένα πρόβλημα –πρόκληση, είναι σαν να πατάς ένα κουμπί για τον καθένα. Τελικά αρέσει πολύ στους μαθητές να προσπαθούν να βρουν λύση σε κάτι που τους φαίνεται περίεργο. Μην ξεχνάς ότι αυτή είναι η γενιά των video-games. Και όχι μόνο τους κινητοποιείς, αλλά τους ωθείς και να συνεργαστούν για να συνδυάσουν τη διαφορετική τους οπτική...»*. Εξ άλλου, είναι χαρακτηριστικό ότι ο καθηγητής Γ, που το αντιμετώπισε ως εφαρμογή της άσκησης, δεν μπόρεσε να κινητοποιήσει το σύνολο της τάξης, παρά μόνο τους μαθητές που ανταποκρίνονταν συνήθως, πράγμα που φάνηκε και στις απαντήσεις στο ερωτηματολόγιο.

¹³¹ Η άσκηση 1., από τις ασκήσεις εμπέδωσης του σχολ. βιβλίου, τονίζει ότι το ευθ. τμήμα που ενώνει τα μέσα AB και AG των πλευρών ενός τριγώνου ABΓ, διχοτομεί κάθε ευθ. τμήμα που ενώνει την κορυφή Α με την πλευρά ΒΓ. (Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Ενιαίου Λυκείου. Αθήνα:ΟΕΔΒ, έκδοση Γ', 2003)

Η δεύτερη φάση, η κατάλληλη εκμετάλλευση των δυνατοτήτων του παιχνιδιού, αποδείχθηκε η δυσκολότερη. Δεν μπόρεσαν να εκμεταλλευτούν πλήρως όλοι οι καθηγητές που το χρησιμοποίησαν τις διδακτικές του δυνατότητες. Το στήσιμο του παιχνιδιού, τα βοηθητικά φύλλα εργασίας και οι κατάλληλες κλιμακωτές ερωτήσεις, που είχαν δοκιμαστεί και βελτιωθεί στην πιλοτική διδασκαλία, έδιναν την δυνατότητα ανάπτυξης από μέρους των μαθητών ερευνητικού κλίματος και την ομαλή σύνδεση του συγκεκριμένου απλού δυναμικού συστήματος με το τρίγωνο του Sierpinski. Μεγάλο ρόλο, στην αποτελεσματική διδακτική χρήση αυτού του υλικού, έπαιξε η φιλοσοφία των καθηγητών για τα μαθηματικά, η άποψή τους για τη μαθησιακή διαδικασία αλλά και η ικανότητά τους να διαχειριστούν αυτό το νέο περιβάλλον. Κυρίως ο καθηγητής Δ αλλά τελικά και ο Α, που είχαν διαμορφωμένη την άποψη ότι τα σχολικά μαθηματικά πρέπει να είναι μια ευέλικτη γνώση και να περιλαμβάνουν κυρίως την εύρεση σχέσεων, τον σχηματισμό ιδεών και την επέκταση της μαθηματικής σκέψης και σε άλλα περιβάλλοντα, μπόρεσαν να εκμεταλλευτούν πλήρως τις δυνατότητες του προβλήματος για την ανάπτυξη ερευνητικού κλίματος Όπως έδειξε η παρατήρηση της τάξης και η συμπλήρωση του ερωτηματολογίου, σε αυτές τις δύο τάξεις κατακτήθηκαν και οι τρεις ποιοτικοί δείκτες¹³². Οι άλλοι δύο (καθηγητές Β και Ε), παρ' όλο που προσπάθησαν, δεν μπόρεσαν να χειριστούν κατάλληλα το πρόβλημα, πιεζόμενοι κυρίως από την απώλεια χρόνου. Ήθελαν να προλάβουν να τα πουν όλα, πράγμα που σημαίνει ότι, βαθύτερα, έδιναν περισσότερη βαρύτητα στο περιεχόμενο, στην άμεση παροχή της γνώσης ως εργαλείο και κατόπιν στη χρήση της. Αξίζει να τονιστεί εδώ ότι ο καθηγητής Β έκανε και κακή χρήση του προβλήματος. Η παρατήρηση στην τάξη έδειξε ότι υπήρξε μια μεταγνωστική μετατόπιση¹³³ στη διδασκαλία και αντί το παιχνίδι να βοηθήσει στη σύνδεση του συγκεκριμένου

¹³² Βλέπε στο παράρτημα: Κλείδα παρατήρησης των μαθητών κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, σελ. 41

¹³³ φαινόμενο που αναγνωρίστηκε από τον Brosseau (metacognitive shift): Sierpinski, Anna (Instructor) MATH 645: Theory of Situations/ Lecture 5 : More phenomena of teaching: The Metacognitive Shift, the Metamathematical Shift,
(<http://alcor.concordia.ca/~sierp/TDSLecture%205.pdf>)

απλού δυναμικού συστήματος και του τριγώνου του Sierpinski, έγινε το ίδιο αντικείμενο διδασκαλίας. Ο καθηγητής Β, αυτοαξιολογώντας τη διδασκαλία του, εντόπισε το πρόβλημα στο ότι δεν εξήγησε από την αρχή με σαφήνεια τον κανόνα και δεν εξασφάλισε την κατανόησή του από τους μαθητές. Είναι ενδιαφέρον ότι αντιλήφθηκε και τους λόγους της αποτυχίας του. Πρώτα απ' όλα αναφέρθηκε στον παράγοντα της απώλειας του χρόνου, που τον άγχωσε, αλλά επιπλέον συνειδητοποίησε και το τεράστιο χάσμα που υπάρχει ανάμεσα σε αυτό που θέλει να διδάξει ο καθηγητής, υλικό που κατέχει και έχει ενταγμένο στο σύνολο των γνώσεών του, και σε αυτό που αντιλαμβάνεται τελικά ο μαθητής. Παραδέχθηκε ότι στο συνηθισμένο μάθημα αυτό το χάσμα για μεν τους άριστους μαθητές είναι γεφυρωμένο, γιατί ήδη ξέρουν από το φροντιστήριο το περιεχόμενο της διδασκαλίας, για δε τους αδιάφορους θεωρείται ότι είναι αγεφύρωτο και δεν ασχολούνται ιδιαίτερα με αυτούς, ρίχνοντας το αίτιο στην μη επαρκή μελέτη.

A1.2) Εφαρμογή συνεργατικής διδασκαλίας

Στην εφαρμογή της συνεργατικής μεθόδου ανταποκρίθηκαν βασικά οι καθηγητές Α και Δ, οι οποίοι είχαν και κάποιο θεωρητικό υπόβαθρο που στήριζε αυτήν την μέθοδο διδασκαλίας *«..πρέπει το σχολείο να καλλιεργήσει και άλλες δεξιότητες, που θα διευκολύνουν την ανάπτυξη βασικών κοινωνικών λειτουργιών και ερευνητικού κλίματος»* αλλά συγχρόνως απέδειξαν ότι έχουν και κάποια διαισθητική αντίληψη¹³⁴ για την σωστή εφαρμογή αυτής της μεθόδου.

¹³⁴ Χωρίς να έχουν εφαρμόσει άλλη φορά τέτοιου είδους διδασκαλία, έδωσαν μεγάλη προσοχή στον κατάλληλο χωρισμό των μαθητών σε ομάδες (των 4 ατόμων) εμπλέκοντας διαφορετικούς χαρακτήρες και επιδόσεις. Πήγαιναν σε κάθε ομάδα, ενθάρρυναν, έβαζαν σε τάξη τους μαθητές που έβρισκαν ευκαιρία να ατακτήσουν και προέτρεπαν τους αδιάφορους μαθητές να βοηθήσουν την ομάδα τους και να ψάξουν, μετρώντας στο τρίγωνο με το πλέγμα, τα σημεία νίκης. Επειδή οι μαθητές δεν ήταν συνηθισμένοι να δουλεύουν σε ομάδες, χρειάστηκε πολλές φορές να τονίσουν ότι έπρεπε να συνεργάζονται και να ελέγχουν την ιδέα του συνεργάτη τους, να ανακοινώνουν και να υποστηρίζουν, σαν ομάδα πάντα, το συμπέρασμά τους, να προσέχουν και να αξιολογούν τις απαντήσεις των άλλων ομάδων. Χρειάστηκε πολλές φορές να τονίσουν ότι δεν ήταν διαγώνισμα και ότι δεν αξιολογούσαν τις

Η καθηγήτρια Β προσπάθησε να εφαρμόσει αυτήν την μέθοδο αλλά δεν μπόρεσε να τη χειριστεί καθόλου γιατί δεν αισθάνθηκε καθόλου άνετα με την εφαρμογή της, καταλήγοντας σε μια καλή δασκαλοκεντρική διδασκαλία. Στη συνέντευξη με τη Β φάνηκε ότι και αυτή είχε τις ίδιες αμφιβολίες για την αποτελεσματικότητα της συνεργατικής μεθόδου με τους καθηγητές Γ και Ε, που δεν την εφάρμοσαν καθόλου. Πράγματι, είναι ενδιαφέρον ότι πριν την αξιολόγηση της δράσης, οι καθηγητές πίστευαν ότι βασικό πλεονέκτημα της συνεργατικής διδασκαλίας ήταν το ότι υπήρχε πιθανότητα να βελτιωθεί η συμμετοχή και επίδοση των μαθητών, που αντιμετώπιζαν δυσκολίες στα μαθηματικά και ότι δεν θα προσέφερε κάτι παραπάνω στους πολύ καλούς μαθητές. Αυτός ήταν ένας επιπλέον λόγος για τον οποίον η καθηγήτρια Β δεν μπόρεσε να εφαρμόσει συνεργατική διδασκαλία, μια και το τμήμα της ήταν τμήμα αριστούχων. Στο βάθος του μυαλού της την θεωρούσε άχρηστη, τουλάχιστον για το συγκεκριμένο τμήμα. Χαρακτηριστικά είναι τα λόγια της: *«Το μόνο βασικό πλεονέκτημα της συνεργατικής διδασκαλίας είναι η συμμετοχή στο μάθημα των αδύνατων και αδιάφορων μαθητών. Όμως έχει και βασικά μειονεκτήματα. Χάνεις πολύτιμο χρόνο, μπορεί να σου φύγει ο έλεγχος της τάξης... Αλλά και πως θα τους αξιολογήσεις αν δουλεύουν σε ομάδες,»* Την ίδια άποψη είχε και η καθηγήτρια Γ : *«Από τη στιγμή που παίζω τον θηριοδασαστή σε μερικές τάξεις, νομίζεις ότι είναι εύκολο να τους βάλω σε ομάδες..; Α! όχι. Το να αλλάξω το περιεχόμενο ώστε να καταλάβουν οι καλοί μαθητές ότι παίζονται και άλλα πράγματα, διαφορετικά από τα τετριμμένα, ναι, είναι ενδιαφέρον.. Να αλλάξω όμως τρόπο προσέγγισης και διδασκαλία, όχι. Δεν το διακινδυνεύω.»*

A2) Επεξεργασία των πληροφοριών

A2.1) Καλλιέργεια ερευνητικού κλίματος με στόχο την κατάκτηση της γνώσης

Ο ένας από τους πέντε καθηγητές (καθηγητής Γ) δεν ανέπτυξε καθόλου ερευνητικό κλίμα και έκανε απλή μεταφορά του περιεχομένου της διδασκαλίας. Σήκωσε στον πίνακα έναν άριστο μαθητή να αποδείξει την σχετική άσκηση του

επιδόσεις τους, αλλά προσπαθούσαν να τους μάθουν να ερευνούν συνδυάζοντας τα διαφορετικά προτερήματα του καθένα.

βιβλίου¹³⁵ και κατόπιν ανέφερε το πρόβλημα και έδωσε μόνος του τη λύση. Η στάση του ήταν σαφής αντανάκλαση των πεπιοθήσεών του ότι τα μαθηματικά προϋπάρχουν, τα διδασκόμαστε, τα μαθαίνουμε διαβάζοντάς τα και όταν μας χρειαστεί, τα εφαρμόζουμε.

Από τους άλλους τέσσερις καθηγητές που χρησιμοποίησαν το πρόβλημα-παιχνίδι, μόνο οι καθηγητές Α και Δ εκμεταλλεύτηκαν πλήρως τις δυνατότητες του προβλήματος για την ανάπτυξη ερευνητικού κλίματος. Διαχειρίστηκαν με άνεση το νέο διδακτικό περιβάλλον γιατί ήταν συνεχώς σε εγρήγορση και άμεση επικοινωνία με τους μαθητές, αναπτύσσοντας κάθε τόσο διάφορες στρατηγικές που διευκόλυναν τη μάθηση και όχι την μεταφορά της γνώσης. Φρόντιζαν να μη δίνουν ευθείες απαντήσεις και διορθώσεις καθώς και να δίνουν χρόνο στους μαθητές τους να πειραματιστούν τονίζοντας όμως την αξία της οργανωμένης παρατήρησης. Η στρατηγική τους ήταν να προσέχουν να κάνουν κατάλληλες ερωτήσεις με στόχο να παρέχουν στους μαθητές νοητικά εργαλεία σκέψης, όπως π.χ. το να εξετάζουν τη συμπεριφορά οριακών σημείων και γενικά να εφαρμόζουν συστηματική παρατήρηση.

Ο καθηγητής Β, παρ' όλο που προσπάθησε, δεν μπόρεσε να εφαρμόσει ερευνητικό κλίμα αφού τελικά η κατευθυντήρια γραμμή που έδωσε στους μαθητές του ήταν να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα σαν άμεση εφαρμογή κάποιας ήδη γνωστής άσκησης. Το αποτέλεσμα ήταν να δώσει ο ίδιος τη λύση, υποκαθιστώντας την ερευνητική διαδικασία με μια συζήτηση πάνω στη λογική της λύσης και εξήγησης, του γιατί οποιαδήποτε άλλη επιλογή θα ήταν λανθασμένη¹³⁶. Επίσης και ο καθηγητής Ε δεν κατάφερε να διαχειριστεί αυτό το κλίμα. Δεν παρότρυνε τους μαθητές του να διαπιστώσουν την ορθότητα μερικών αυθαίρετων απαντήσεων, που δίνονταν βιαστικά, αλλά βιαζόταν να ενημερώσει ότι ήταν λανθασμένες με απαντήσεις του τύπου: «Δεν το πετύχατε!» Το αποτέλεσμα ήταν να δημιουργηθεί ένα κλίμα «τηλεπαιχνιδιού» του στυλ, ποιος θα μαντέψει πρώτος την απάντηση, πράγμα που απείχε πολύ από τη συστηματική έρευνα και παρατήρηση.

¹³⁵ «Το ευθ. τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου διχοτομεί κάθε ευθ. τμήμα που έχει άκρο την κοινή κορυφή των πλευρών και καταλήγει στην τρίτη πλευρά»

¹³⁶ Αυτού του είδους η γνώση αποκαλείται από τον Brousseau «μετα-μαθηματική» (meta-mathematics). Sierpinski, Α. ό.π.

A2.2) Πληρότητα του μαθηματικού περιεχομένου

Το μαθηματικό περιεχόμενο διδάχθηκε από όλους, σύμφωνα με το υλικό που δόθηκε. Οι μαθητές συμπλήρωσαν τα φύλλα εργασίας και χρησιμοποίησαν το διαδίκτυο για να επισκεφτούν τις προτεινόμενες ιστοσελίδες – γκαλερί και να αναγνωρίσουν Φράκταλ δομή στη φύση καθώς και στην αρχιτεκτονική. Όμως η κυρίαρχη σύνδεση των μαθηματικών με τους Η/Υ δεν αναδείχθηκε από όλους. Και εδώ φάνηκε έντονα ο ρόλος της φιλοσοφίας του καθένα στη διαμόρφωση αντίστοιχης διδασκαλίας, με χαρακτηριστικά αντιδιαμετρικές περιπτώσεις αυτές των καθηγητών Γ και Δ.

Ακόμα και στο εργαστηριακό περιβάλλον των Η/Υ, ο Γ διατήρησε την ίδια διδακτική συμπεριφορά. Δεν άφησε τους μαθητές να ανοίξουν τους δικούς τους υπολογιστές για να μη μιλάνε μεταξύ τους και να προσέχουν αυτά που τους έδειχνε στον κεντρικό υπολογιστή, σαν να βρίσκονταν σε κινηματογράφο. Επίσης έδειξε έτοιμο το τρίγωνο του Sierpinski χωρίς καν να κάνει επίδειξη της κατασκευής του στους μαθητές με αποτέλεσμα να μη γίνει αντιληπτός ο ρόλος του βρόχου και η χρησιμότητα του υπολογιστή στην άπειρη (θεωρητικά) επαναληπτική διαδικασία.

Αντίθετα, ο Δ συνεργάστηκε με τον καθηγητή της πληροφορικής, που δίδαξε στους μαθητές το Sketchpad, με αποτέλεσμα οι μαθητές του να κατασκευάσουν και μόνοι τους το τρίγωνο του Sierpinski. Μάλιστα για να αντιληφθούν οι μαθητές την πολυπλοκότητα του σχήματος και τη στενή σύνδεσή του με τον Η/Υ, τους παρακίνησε να πειραματιστούν βάζοντας διάφορες τιμές στο «βάθος αναδρομής» του Sketchpad ώστε να δουν την επίδραση που έχει στο τελικό σχήμα η αύξηση, έστω και κατά μία φορά της επανάληψης του βρόχου. Δεν έχασε ευκαιρία να σχολιάσει ότι κατ' αυτόν τον τρόπο, δηλ. χρησιμοποιώντας μόνο την απλή αρχική εικόνα και τον επαναληπτικό κανόνα που τις δημιουργεί, μπορούμε να αποθηκεύσουμε σε πολύ μικρό χώρο, πολλά γραφικά ηλεκτρονικών παιχνιδιών καθώς και κινηματογραφικών εικόνων, που είναι εικόνες Φράκταλ.

Οι άλλοι καθηγητές έκαναν κυρίως απλή επίδειξη της κατασκευής του τριγώνου γιατί δεν μπόρεσαν για διάφορους λόγους να συνεργαστούν με τον καθηγητή της πληροφορικής.

ΣΤ.2. 2. Β) Ανάλυση της ανταπόκρισης των διδασκαλιών στους μαθητές

Η ανταπόκριση των διδασκαλιών στους μαθητές αναλύθηκε σύμφωνα με δύο παράγοντες:

B1) Το ενδιαφέρον που έδειξαν για το περιεχόμενο

B2) Την αντίδρασή τους στην διαφορετική διδακτική προσέγγιση

B1) Το ενδιαφέρον που έδειξαν για το περιεχόμενο

Το σύγχρονο περιεχόμενο, αποτέλεσε ένα ελκυστικό θέμα, προκαλώντας το ενδιαφέρον των μαθητών. Η θεωρία του Χάους, το τρίγωνο του Sierpinski και τα Φράκταλς, δημιούργησαν θέμα συζήτησης και στα διαλείμματα, αποδεικνύοντας ότι κάθε εποχή (ίσως και γενιά) χρειάζεται την δική της ανάγνωση στο παραδοσιακό περιεχόμενο της ύλης για να ενδιαφερθεί.

Η εμπάθυνση στο περιεχόμενο ήταν διαφορετική και εξαρτήθηκε από τον τρόπο διδασκαλίας (πράγμα που θα συζητηθεί παρακάτω) και από την ηλικία των μαθητών. Οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου το προσέγγισαν πιο διαισθητικά από τους υπόλοιπους. Αυτούς, κυρίως τους εντυπωσίασε το σχήμα και ο εύκολος τρόπος αναπαραγωγής του στον Η/Υ καθώς και η σύνδεση του παιχνιδιού με τα μαθηματικά, τη φύση και την τέχνη: *«τα μαθηματικά βγαίνουν από κει που δεν το περιμένεις.. δεν πίστευα ότι τα μαθηματικά μπορεί και να μην είναι βαρετά»* ή *«Μου άρεσε ότι τα μαθηματικά συνδέονται και με τους υπολογιστές και την τέχνη. Μπορούμε να διαλέγουμε ό,τι μας ενδιαφέρει.»*

Οι απαντήσεις των μαθητών της Α΄ Λυκείου έδειξαν ότι είχαν κάνει βαθύτερη σύνδεση των εννοιών. Αρκετοί συγκράτησαν και τα δύο χαρακτηριστικά της θεωρίας του Χάους και κυρίως εντυπωσιάστηκαν από το ότι ενώ το εμβαδόν του τριγώνου μηδενίζεται, η περίμετρός του πάει στο άπειρο: *«..Μου έκανε εντύπωση ότι και τα νούμερα έδειχναν αυτό που είχα καταλάβει από τα σχήματα, δηλ. ότι η περίμετρος συνέχεια μεγαλώνει και το εμβαδόν μικραίνει»*. Επίσης συνέδεσαν την θεωρία του Χάους και τα Φράκταλς: *«Όταν ένα φαινόμενο καταλήγει σε ένα τέτοιο σχήμα, τότε είναι απρόβλεπτο και έχουμε τη θεωρία του Χάους»* και αντιλήφθηκαν την επίδραση της σύγχρονης πραγματικότητας στην δημιουργία και διαφορετικών μαθηματικών: *« ..χωρίς τους υπολογιστές δεν θα το καταλαβαίναμε ότι υπάρχουν και τέτοιες περιπτώσεις. Με τους υπολογιστές χρειάζονται και άλλα μαθηματικά»*. Είναι επίσης αξιοσημείωτο ότι το θέμα και η σύνδεσή του με άλλα πεδία, τους

κινητοποίησε και το ενδιαφέρον για τα μαθηματικά: «...Ήταν πολύ ωραίο το μάθημα γιατί δεν ήταν ξερά μαθηματικά. Κατάλαβα γιατί χρειάζονται τα μαθηματικά... Τα μαθηματικά είναι πολύ ωραία! Και η φύση μαθηματική είναι.... Εγώ ζωγραφίζω και σκέφτηκα πολλές ιδέες». Είναι όμως άξιο προσοχής το εξής: Ενώ οι διδασκαλίες των Β και Γ είχαν τελικά μικρή διαφοροποίηση, στις γραπτές ερωτήσεις είχαν καλή επίδοση μόνο οι μαθητές του Β, που ήταν έτσι και αλλιώς καλοί και προσεκτικοί μαθητές. Οι μαθητές του Γ, αφ' ενός δεν δραστηριοποιήθηκαν στο μάθημα αλλά και οι γραπτές απαντήσεις τους ήταν επιφανειακές και πολλές από αυτές στερούνταν σοβαρότητας: «Το Χάος είναι χάος».

Όπως ήδη λέχθηκε, στη Β' Λυκείου, η ωριμότητα των μαθητών και το γνωστικό τους υπόβαθρο επέτρεψε την πλήρη ανάπτυξη του θέματος.

Τους μαθητές τους εντυπωσίασε κυρίως η κλασματική διάσταση του τριγώνου. Εδώ το αποτέλεσμα της διαφορετικής διδασκαλίας, στη γνώση που κέρδισαν οι μαθητές, είναι φανερό. Οι μαθητές του Δ, ο οποίος καλλιέργησε το ερευνητικό κλίμα, απάντησαν σχεδόν όλοι στις γραπτές ερωτήσεις με πολύ καλύτερη επίδοση από αυτή των μαθητών του Ε.

Επιπλέον, δόθηκαν και απαντήσεις, οι οποίες φανερώνουν μια πιο διεισδυτική ματιά στην γνώση και τον σχηματισμό της άποψης ότι τα μαθηματικά είναι δυναμικά μοντέλα ερμηνείας της εκάστοτε πραγματικότητας:

« Μου άρεσαν πολύ τα Φράκταλς.Αυτό που είπατε ότι ανάλογα με τα εργαλεία που έχουμε στα χέρια μας και τα προβλήματα που συναντάμε σκεφτόμαστε και άλλο τρόπο οργάνωσης, μου έκανε φοβερή εντύπωση.» ή
«Σήμερα αντιλήφτηκα την αξία των μαθηματικών και το ότι είναι ατελείωτα! Ο Θαλής με την ομοιότητα μετρούσε τα ύψη και εμείς την πολυπλοκότητα ενός σχήματος που βγαίνει στον υπολογιστή».

Λίγες επιφυλάξεις διατυπώθηκαν ως προς αυτό το περιεχόμενο, κυρίως από τους άριστους μαθητές της Γ' γυμνασίου και της Α' λυκείου, και καμία σχεδόν από τους μαθητές της Β' λυκείου. Ίσως στη Β' τάξη να έπαιξε ρόλο εκτός από την γνωστική ωριμότητα και η κατάργηση των πανελληνίων εξετάσεων, μια και οι επιφυλάξεις που διατυπώθηκαν στις άλλες τάξεις είχαν να κάνουν με το σύστημα αξιολόγησης (τα θέματα των εξετάσεων και τον χρόνο που ίσως χαθεί σε βάρος της διδασκαλίας τους).

B2) Η επίδραση της διαφορετικής διδακτικής προσέγγισης στους μαθητές.

Η επίδραση αυτή αναλύθηκε στους επιμέρους παράγοντες της εμπλοκής τους σε κατάσταση προβλήματος και στην εφαρμογή συνεργατικής διδασκαλίας.

B2.1) Πώς είδαν την νέα διδακτική προσέγγιση της εμπλοκής σε πρόβλημα.

Η νέα διδακτική προσέγγιση είχε διαφορετική επίδραση στους μαθητές. Όλοι οι μαθητές της Β΄ Λυκείου δέχτηκαν με ευχαρίστηση την «ενδιαφέρουσα κατάσταση» επίλυσης του προβλήματος. Είναι χαρακτηριστική η απάντηση μαθητή: *«Αν έτσι γινότανε και η ύλη των εξετάσεων δεν θα χρειαζόταν να πηγαίναμε στα φροντιστήρια. Μου άρεσε και το ότι είχαμε συγκεκριμένες δραστηριότητες να κάνουμε με τις οποίες μαθαίναμε. Η μονότονη παράδοση είναι πολύ κουραστική, αφήστε και το ότι πολλοί καθηγητές βαριούνται και μάλλον τους βολεύει που τα ξέρουμε από τα φροντιστήρια γιατί δεν κουράζονται.»*

Στις τάξεις όμως της Γ΄ Γυμνασίου και Α΄ Λυκείου οι μαθητές διαφοροποιήθηκαν. Οι μέτριοι και αδιάφοροι μαθητές ανταποκρίθηκαν θετικά, για λόγους που ίσχυαν και για τους αντίστοιχους μαθητές της Β΄ τάξης: α) Η διατύπωση του προβλήματος δεν περιείχε μαθηματικές εκφράσεις, που λόγω άγνοιας θα τους αποθάρρυναν να προσπαθήσουν να το λύσουν. β) Αισθάνθηκαν άνετα γιατί *«για πρώτη φορά οι καλοί δεν σηκώνανε από την αρχή το χέρι να απαντήσουν»*.

Αντίθετα, οι περισσότεροι άριστοι μαθητές δεν ανταποκρίθηκαν θετικά, τουλάχιστον αρχικά, στην ερευνητική προσέγγιση του διδακτικού αντικειμένου. Ο βασικός λόγος είναι ότι προσπαθούσαν από την αρχή να εντάξουν τη λύση σε ένα συγκεκριμένο γνωστικό «μετα-μαθηματικό» πλαίσιο «κλειστής» σκέψης. Αυτός όμως ο παραγωγικός τρόπος σκέψης (από το αφηρημένο και γενικό στο ειδικό), που μέχρι τότε λειτουργούσε με μεγάλη επιτυχία στα προβλήματα που αντιμετώπιζαν, τους εγκλώβισε και δεν τους άφησε να δράσουν ελεύθερα και να πειραματιστούν: *«Για πρώτη φορά δεν ήξερα τι να κάνω! Τα έχασα...»*. Ένας δεύτερος λόγος είναι η έντονη βαθμοθηρία που υπάρχει κυρίως σε αυτές τις τάξεις. Ο άριστος μαθητής, ζώντας κάτω από την πίεση της επιδίωξης του υψηλού προφορικού βαθμού, γνωρίζει από πριν, από το φροντιστήριο, την ύλη που θα παραδοθεί καθώς και τις απαντήσεις

στις συνηθισμένες ερωτήσεις του καθηγητή και επομένως είναι λογικό να μην αισθάνεται άνετα σε κάτι διαφορετικό.

Η στάση τους αυτή όμως μπορεί να αλλάξει με αλλαγή της οπτικής γωνίας του μαθήματος και την καλλιέργεια στην τάξη ερευνητικού κλίματος.

B2.2) Πώς είδαν τη συνεργατική διδασκαλία

Εδώ, τα συμπεράσματά μας βγαίνουν από τους μαθητές των καθ. Α, Β και Δ που εφάρμοσαν συνεργατική διδασκαλία. Και εδώ οι μαθητές της Β΄ Λυκείου (καθ. Δ) διαφοροποιήθηκαν από τους μαθητές της Γ΄ γυμνασίου και Α΄ Λυκείου(καθ. Α και Β).

Η πλειονότητα των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου και Α΄ Λυκείου (που ήταν έως και μετρίου επιπέδου), απάντησαν θετικά για τη συνεργατική διδασκαλία. Στις παρακάτω απαντήσεις καταγράφεται πόσο η συζήτηση στην ομάδα προάγει την κατανόηση του περιεχομένου: *«Μαθαίνεις πιο εύκολα όταν σου δείχνει ένας συμμαθητής σου και δεν σε εξετάζουν»* ή *«Όταν ένας συμμαθητής σου σκέφτεται φωναχτά σε βοηθάει να σκεφτείς αλλά και να διορθώσεις τα λάθη του»* ή *«Μερικές φορές είναι δύσκολο να καταλάβεις τι θέλει να πει ο καθηγητής»*.

Αντίθετα, οι καλοί μαθητές αυτών των τάξεων είχαν την ίδια άποψη με τους καθηγητές, ότι δηλ. η συνεργατική διδασκαλία είναι άνευ αξίας για αυτούς.

Οι κυριότεροι λόγοι, που φάνηκαν στις απαντήσεις τους, είναι οι εξής:

α)Θεωρούν αποτελεσματικότερη μια καλή δασκαλοκεντρική διδασκαλία, η οποία εναρμονίζεται πλήρως με το ισχύον σύστημα αξιολόγησης και τους προετοιμάζει καλύτερα για να το αντιμετωπίσουν. Θεωρούν ότι η συνεργατική διδασκαλία προκαλεί απώλεια χρόνου μια και η αξιολόγηση την οποία υφίστανται έχει τη λειτουργία εξακρίβωσης στοιχείων μόνο του γνωστικού τομέα και τον έλεγχο πρόσληψης συγκεκριμένης ύλης. Χαρακτηριστικές είναι οι απαντήσεις: *«Χάνουμε πολύ χρόνο με την ομάδα μέσα στην τάξη. Αν καθένας λέει τα δικά του δεν θα προλάβουμε να βγάλουμε καλά την ύλη»* ή *«Εγώ θέλω ο καθηγητής να μας βάζει να δουλεύουμε μέσα στην τάξη και να μας βοηθάει να καταλάβουμε την ύλη για να μην πηγαίνουμε φροντιστήριο. Δεν μου αρέσει να δουλεύω σε ομάδα γιατί χάνουμε χρόνο και δεν θα προλάβει να μας πει τα SOS»*

β) Ένας άλλος λόγος για τον οποίο αυτοί οι μαθητές δεν προτιμούν την συνεργατική διδασκαλία είναι ότι έχουν καλλιεργήσει μεταξύ τους τον ανταγωνισμό και την τάση αυτοπροβολής τους. Είναι χαρακτηριστική η δήλωση της καθηγήτριας Β.: *«Και οι μαθητές μου όμως, πολύ δύσκολοι στα θέματα συνεργασίας. Κονταροχτυπιούνται για τη σημαία. Παρατήρησες τον φοβερό τους ανταγωνισμό και την τάση αυτοπροβολής τους;»* ή *«Αυτή η μανία για αυτοπροβολή, με χτυπάει ώρες - ώρες στα νεύρα. Νομίζω, μερικές φορές, ότι παίρνω μέρος σε τηλεπαιχνίδι, με τους μαθητές να διεκδικούν βραβεία και να βιάζονται να χτυπήσουν πρώτοι το κουδούνι με τη σωστή απάντηση, μήπως και πετύχουν το σωστό, χωρίς να σκέφτονται σε βάθος την απάντησή τους».* Στο ίδιο πνεύμα κινείται και η απάντηση μαθητή: *«Χάνουμε πολύ χρόνο με την ομάδα στην τάξη. Μετά, αν κάποιος βρει τη λύση, πως θα ξέρει ο καθηγητής ποιος βρήκε τη λύση για να τον βαθμολογήσει;»*

Η ηλικιακή ωριμότητα των μαθητών της Β', η συνειδητοποίηση ότι ο υψηλός ανταγωνισμός είναι άνευ λόγου (και αντανακλά μάλλον φιλοδοξίες γονέων¹³⁷) και η κατάργηση των πανελληνίων, τους έκανε να απαντήσουν ότι είναι υπέρ της συνεργατικής, αναγνωρίζοντας όμως μερικές δυσκολίες στην εφαρμογή της (πίεση χρόνου, σύστημα αξιολόγησης). Σε αυτό συνηγορούν και τα λόγια του Δ, που στην ερώτηση αν αισθάνθηκε άνετα στην εφαρμογή της συνεργατικής διδασκαλίας, απάντησε: *«Καθόλου. Τα παιδιά στη Β' Λυκείου είναι πολύ ώριμα. Έχουν ξεφύγει από το στενό πλαίσιο της Α' Λυκείου όπου η επιτυχία στις εξετάσεις και η βαθμοθηρία, ιδίως από μέρους των γονιών, έχουν τον πρώτο λόγο. Τα παιδιά ψάχνονται, αλλά πρέπει να τους οδηγήσεις.»*

Τα παραπάνω έρχονται και σε συμφωνία με τις απαντήσεις των μαθητών, στις οποίες καταγράφεται η βοήθεια που παρέχει η μέθοδος όχι μόνο στους μέτριους μαθητές αλλά και στους πολύ καλούς: *«Ο συμμαθητής σου καταλαβαίνει περισσότερα τι σε δυσκολεύει και σε βοηθάει. Μετά, δεν διστάζεις να του πεις την απορία σου μήπως και είναι κοτσάνα»* ή *«Όταν σκεφτόμαστε μαζί με τους φίλους μας, βρίσκουμε τη λύση καλύτερα. Ο ένας*

¹³⁷ Βλέπε παρακάτω στο κείμενο τα λόγια του Δ. Κυρίως στα αστικά σχολεία, οικονομικά αναβαθμισμένων περιοχών, είναι συνηθισμένο φαινόμενο η διαμαρτυρία των γονέων προς τους καθηγητές, για παροχή μεγαλύτερου βαθμού.

συμπληρώνει και ελέγχει τον άλλο γιατί άλλοι σκέφτονται πιο πρακτικά και άλλοι πιο θεωρητικά».

Ο παρακάτω πίνακας δίνει την ανάλυση του περιεχομένου των γραπτών απαντήσεων των μαθητών ανά τάξη και καθηγητή:

ΣΤ.2.3. Γ) Αξιολόγηση της δράσης- μετατόπιση των πεπιοθήσεων των καθηγητών

Στην τελική ομαδική συζήτηση, όπου έγινε αξιολόγηση της δράσης με τη χρήση δεδομένων από την ανάλυση, άρχισε να διαφαίνεται μια αλλαγή στις αρχικές πεπιοθήσεις των καθηγητών, που αναλύθηκε σύμφωνα με τους παρακάτω παράγοντες:

Γ1) Την άποψη τους για τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών

Γ2) Τη γνώση παιδαγωγικού περιεχομένου που απέκτησαν

Γ3) Την συνειδητοποίηση της αναγκαιότητας της συνεχούς βελτίωσης της εκπαιδευτικής πρακτικής τους.

Γ1) Ως προς τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών

Η αλλαγή φάνηκε κυρίως στους καθηγητές Β και Ε, που διαφοροποιήθηκαν από την προηγούμενη εργαλειακή αντιμετώπιση. Χαρακτηριστικά είναι τα λόγια τους: *«Είδαμε και εμείς και οι μαθητές τα μαθηματικά με άλλο μάτι. Αυτή η ολοκληρωμένη προσέγγιση με τον Η/Υ, την τέχνη και τη φύση φανέρωσε την ομορφιά τους, ότι είναι κάτι πολύ παραπάνω από την εφαρμογή μιας τυποποιημένης θεωρίας σε ένα πρόβλημα»* ή *«Όσο το σκέφτομαι, τόσο βεβαιώνομαι ότι στη σημερινή εποχή άλλαξαν πολλά πράγματα και χρειάζεται να διδάξουμε και κάτι περισσότερο στους μαθητές μας που θα αντιμετωπίσουν αργότερα νέες προβληματικές καταστάσεις. Η απ' ευθείας μεταφορά της γνώσης δεν είναι ευέλικτη γνώση. Έχει δίκιο ο καθ. Δ. Έχω δει και εγώ πολλούς καλούς μαθητές που έχουν περάσει στις υψηλόβαθμες σχολές των πολυτεχνείων, δυσκολεύονται και τα παρατάνε γιατί δεν έχουν μάθει τίποτε περισσότερο από θεωρία, εφαρμογή και κατηγοριοποίηση ασκήσεων!»* Αλλά και ο Γ φάνηκε να προβληματίζεται: *«Στο μάθημά μου ανταποκρίθηκαν οι συνηθισμένοι μαθητές. Το συνηθισμένο μονότονο μάθημα τελικά δεν αναδεικνύει ούτε το διαφορετικό περιεχόμενο.»*

Γ2) Ως προς τη γενική γνώση παιδαγωγικού περιεχομένου

Όσον αφορά την εφαρμογή της **συνεργατικής διδασκαλίας**, η άποψη που προϋπήρχε ότι δεν προσφέρει κάτι παραπάνω στους πολύ καλούς μαθητές μεταβλήθηκε. Η κατάθεση των εμπειριών των Α και Δ και οι απαντήσεις των μαθητών φανέρωσαν ότι η συνεργατική διδασκαλία συνεισέφερε

αποτελεσματικά στην ανάπτυξη του ερευνητικού κλίματος αλλά και στην κατανόηση του συγκεκριμένου περιεχομένου, βοηθώντας όλους τους μαθητές, για διαφορετικούς βέβαια λόγους:

α) Οι αδύνατοι συμμετείχαν στο μάθημα γιατί δεν αισθάνονταν το βάρος της αξιολόγησης και μπορούσαν να ρωτούν ελεύθερα τις απορίες τους στους συμμαθητές τους.

β) Οι άριστοι είδαν μια διαφορετική οπτική των μαθηματικών, που στηρίζεται στην παρατήρηση και έρευνα και με την οποία οπτική είναι περισσότερο εξοικειωμένοι οι μέτριοι μαθητές, οι οποίοι και πήραν την πρωτοβουλία των μετρήσεων και δοκιμών. Οι άριστοι, ως γνώστες της θεωρίας «ανακαλύπτουν» τα μαθηματικά, αφού έχουν την οπτική της εφαρμογής της θεωρίας, σε αντίθεση με τους μέτριους που η ανάγκη τους κάνει μάλλον να τα «εφευρίσκουν».

γ) Οι μέτριοι, κάτω από την καθοδήγηση των πολύ καλών μαθητών, αναγκάστηκαν να οργανώσουν την παρατήρησή τους και να είναι περισσότερο προσεκτικοί και μεθοδικοί.

Αναλύοντας τώρα το **είδος της γνώσης** που απέκτησαν οι μαθητές, παρατηρήθηκε ότι η διδακτική χρήση του παιχνιδιού ανέσυρε στην επιφάνεια, και πρακτικά, την αξία της οικοδόμησης της γνώσης και την αναγκαιότητα κλιμάκωσής της, από το συγκεκριμένο και πρακτικό στο αφηρημένο και γενικό. Στις τάξεις που οι μαθητές έπαιζαν με το παιχνίδι (διδασκαλίες Α, Δ και αρκετά στην Ε), καταλήγοντας σταδιακά στην εύρεση του ελκυστή, κατακτήθηκε σε βάθος το γνωστικό περιεχόμενο. Οι μαθητές αυτοί δεν αποκόμισαν κατακερματισμένη γνώση αλλά συνέδεσαν τα δυναμικά συστήματα με τα Φράκταλς, την ύπαρξη της θεωρίας του Χάους και τον ρόλο της επαναληπτικότητας ή επανατροφοδοτικής διαδικασίας. Επίσης η θύμιση του παιχνιδιού έκανε εύκολη και την απομνημόνευση των χαρακτηριστικών του Χάους και των Φράκταλς. Όλοι σχεδόν οι μαθητές αυτών των τάξεων ανέφεραν στις απαντήσεις του ερωτηματολογίου, εκτός από την αυτοομοιότητα, και την επαναληπτική διαδικασία κατασκευής των Φράκταλς και απάντησαν με μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας για τα κύρια χαρακτηριστικά του Χάους και την σύνδεσή του με τα Φράκταλς. Σε αντίθεση με αυτούς, οι περισσότεροι μαθητές των διδασκαλιών Β και Γ, ανέφεραν μόνο την

αυτοομοιότητα ως κύριο χαρακτηριστικό ενός Φράκταλ (πράγμα που φαίνεται εύκολα στο τελικό σχήμα) και όχι την επαναληπτικότητα και ούτε έκαναν σύνδεση των πεδίων Φυσικής και Μαθηματικών.

Γ3) Ως προς τη συνειδητοποίηση της αναγκαιότητας συνεχούς βελτίωσης της εκπαιδευτικής πρακτικής τους.

Έγινε παραδεκτό από όλους ότι στη σύγχρονη σχολική πραγματικότητα, η γνώση δεν μπορεί να είναι μόνο μεταφορά πληροφορίας αλλά και να οικοδομείται, διαμορφώνοντας γνωστικά σχήματα ικανά να λειτουργήσουν και στην εκτός σχολείου σύγχρονη πραγματικότητα. Κατά συνέπεια, ένας καθηγητής πρέπει να μπορεί να χειρίζεται διαφορετικές στρατηγικές και δραστηριότητες έτσι ώστε να κινητοποιεί το ενδιαφέρον όλων των μαθητών του επιδιώκοντας την απόκτηση από μέρους τους ερευνητικών δεξιοτήτων και μεθόδων επεξεργασίας των πληροφοριών, με στόχο την βαθύτερη γνωστικά προσέγγιση ενός προβλήματος.

Συγκεκριμένα συμφωνήσαμε όλοι ότι τα παρακάτω μπορούν να βελτιώσουν άμεσα την εκπαιδευτική μας πραγματικότητα:

- Η συνεχής διερεύνηση των παραγόντων που καθορίζουν την ποιότητα της διδασκαλίας: από την επιλογή του κατάλληλου ποιοτικού παραδείγματος, του τρόπου και της σειράς των ερωτήσεων, την αποδέσμευση από την σταθερή εφαρμογή του δασκαλοκεντρικού μοντέλου έως την αναγκαιότητα πρόσβασης στη θεωρία, τόσο σε γνωστικό όσο και σε παιδαγωγικό επίπεδο.
- Η ανάπτυξη της συνεργασίας και του καλού επικοινωνιακού κλίματος ανάμεσα στους συναδέλφους, όχι μόνο της ίδιας ειδικότητας αλλά και σε επίπεδο σχολικής μονάδας, για την καλύτερη ενοποίηση του διδακτικού αντικειμένου και δημιουργία κατάλληλου μαθησιακού περιβάλλοντος.
- Η υιοθέτηση ορισμένων στρατηγικών με στόχο την απόκτηση ερευνητικών δεξιοτήτων από τους μαθητές. Οι στρατηγικές αυτές είναι:
 - ✓ Η εμπλοκή των μαθητών σε μια «ενδιαφέρουσα κατάσταση» με τη δημιουργία κατάλληλου διδακτικού περιβάλλοντος.
 - ✓ Όταν επιλέγουμε τη συνεργατική διδασκαλία πρέπει να δίνουμε ιδιαίτερη βαρύτητα στην κατάλληλη σύνθεση των ομάδων και να αποφεύγουμε

τις άμεσες απαντήσεις και διορθώσεις παρακινώντας τους μαθητές για έλεγχο και συζήτηση της σκέψης τους με τους υπόλοιπους της ομάδας.

✓ Δημιουργία καλού επικοινωνιακού κλίματος εμπιστοσύνης και αποδοχής όλων μέσα στην τάξη.

✓ Επίσης κοινή ήταν η διαπίστωση ότι το ερευνητικό κλίμα και η συνεργασία συνδέονται με άρρηκτο δεσμό. Η καλλιέργεια ερευνητικού κλίματος απαιτεί συνεργασία και αντιστρόφως, η δεξιότητα για συνεργασία αναπτύσσεται όταν υπάρχει ερευνητικό κλίμα, αφού τότε απαιτούνται διαφορετικές οπτικές γωνίες αλλά και διαφορετικοί χαρακτήρες έτσι ώστε ο ένας να συμπληρώνει τον άλλο.

- Είναι μάλλον απαραίτητη η σύνδεση της Β/θμιας με την ανώτατη εκπαίδευση, έτσι ώστε να αποφευχθεί η υποβάθμιση της θεωρητικής γνώσης αλλά και η διάσταση της θεωρίας με την πράξη. Μέσω αυτής της σύνδεσης και με τη διενέργεια έρευνας δράσης, θα μπορούσε να αναπτυχθεί μια μορφή συνεχούς και αποτελεσματικής επιμόρφωσης των εν ενεργεία εκπαιδευτικών.

Z. Επίλογος

Κίνητρο για τη δημιουργία της διδακτικής πρότασης των Φράκταλς ήταν τα τελευταία Αναλυτικά προγράμματα στην Ελλάδα (Δ.Ε.Π.Π.Σ.), τα οποία δίνουν μεγάλη έμφαση στη εσωτερική διασύνδεση των κλάδων των μαθηματικών αλλά και την εξωτερική, με τα άλλα επιστημονικά πεδία. Η πρόταση ακολούθησε τη σύγχρονη τάση, η οποία προτείνει να διδάσκονται τα σχολικά μαθηματικά με τρόπο που να τα συνδέει με την πραγματικότητα, ώστε η μάθηση να είναι βιωματική. Η δημιουργία της στηρίχτηκε στη νέα αντίληψη για τη διδασκαλία των μαθηματικών, η οποία αναπτύχθηκε στο εργαστήριο Διδακτικής των Μαθηματικών της Φλώρινας και αποκαλείται «Μαθηματικά της φύσης και της ζωής». Οι αρχές της αντίληψης αυτής επικεντρώνονται σε δύο βασικά στοιχεία: πρώτα να συνδεθούν τα σχολικά μαθηματικά, ως περιεχόμενο, με την καθημερινή ζωή και κατόπιν στον τρόπο διδασκαλίας τους, ο οποίος οφείλει να κάνει τους μαθητές να δράσουν και να δεχτούν με ευχαρίστηση τα Μαθηματικά, καλλιεργώντας μια θετική στάση προς αυτά.

Το εύρημα του παιχνιδιού του Χάους ικανοποιούσε ως περιεχόμενο τις παραπάνω τάσεις και αρχές, πραγματοποιώντας την πλαισιοποίηση¹³⁸ των νέων εννοιών του δυναμικού συστήματος, της θεωρίας του Χάους και των Φράκταλς καθώς και της κλασικής έννοιας της ομοιότητας, συνδέοντας τις συγχρόνως με τη Φύση, την τέχνη και τους Η/Υ. Επίσης ο προτεινόμενος τρόπος διδασκαλίας, με την εμπλοκή στο παιχνίδι και το κίνητρο της νίκης, στόχευε στην αποπλαισιοποίηση της κατάστασης προβλήματος για την ανάδειξη των παραπάνω εννοιών, παρακινώντας τους μαθητές να αναπτύξουν ερευνητικό πνεύμα και συλλογική δράση. Πριν την εφαρμογή της από τους καθηγητές της ερευνητικής ομάδας, η πρόταση εφαρμόστηκε σε πιλοτική διδασκαλία για να μελετηθεί η ανταπόκριση των μαθητών, να δοκιμαστούν και συμπληρωθούν οι ερωτήσεις καθώς και ο τρόπος υποβολής τους ώστε να μην υπάρξει ασάφεια και διδακτικό χάσμα λόγω εμπλοκής στην επιδιωκόμενη προοδευτική μαθηματικοποίηση των εννοιών.

Η έρευνα δράσης που διενεργήθηκε ήταν τεχνική (Habermas, 1970) γιατί διερευνήθηκε το κατά πόσον η διδακτική παρέμβαση μπορούσε να πραγματοποιηθεί αποτελεσματικά στο πραγματικό περιβάλλον της τάξης, τα προβλήματα που θα συναντούσε και ακολούθως την επίδρασή της στους καθηγητές και μαθητές. Παράπλευρος στόχος της δράσης ήταν να αποτελέσει μια ουσιαστική επιμόρφωση του εκπαιδευτικού, αφού στην διδακτική πρόταση έγινε προσπάθεια σύνδεσης της σχολική πραγματικότητας με την εκπαιδευτική έρευνα και θεωρία, ελπίζοντας έτσι να βοηθηθούν οι εμπλεκόμενοι εκπαιδευτικοί να θέσουν τη διδασκαλία τους σε νέα βάση.

- Στην έρευνα διαπιστώθηκε ότι οι καθηγητές της ομάδας, μέσα στην τάξη τους, διαφοροποίησαν τη διδασκαλία τους, παρ' όλο που όλοι ακολουθούσαν την ίδια πρακτική στη μέχρι τότε διδασκαλία τους, ξεκίνησαν από την ίδια αφετηρία, παίρνοντας την ίδια επιμόρφωση, και δέχτηκαν την ίδια διδακτική στήριξη για την εφαρμογή της συγκεκριμένης πρότασης. Συγκεκριμένα, ενώ όλοι δίδαξαν με

¹³⁸ Οι όροι πλαισιοποίηση και αποπλαισιοποίηση χρησιμοποιούνται στο τμήμα διδακτικής των Μαθηματικών της Φλώρινας, από τον καθηγητή Λεμονίδη, Χ. (πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας).

πληρότητα το μαθηματικό περιεχόμενο, διαφοροποιήθηκαν στον τρόπο διδασκαλίας τους. Δυναμική επίδραση στην πρακτική της διδασκαλίας την οποία ακολούθησαν, άσκησαν οι αντιλήψεις τους για τη φύση των μαθηματικών, οι οποίες είχαν διαφανεί στην αρχική συνέντευξη. Αυτό φάνηκε έντονα στους διδακτικούς χειρισμούς που έκαναν ο καθηγητής Γ από τη μια μεριά και οι καθηγητές Α και Δ από την άλλη, που είχαν χαρακτηριστικά αντιδιαμετρικές απόψεις με τον Γ. Οι δύο τελευταίοι, και ειδικά ο Δ, ο οποίος είχε ξεκαθαρισμένη από την αρχή την άποψη ότι τα Μαθηματικά είναι μια συνεχώς αναπτυσσόμενη δημιουργία και επομένως ήταν σημαντική γι' αυτόν η διαδικασία της ερευνητικής προσέγγισης του αντικειμένου, χειρίστηκαν με επιτυχία τον προτεινόμενο διδακτικό τρόπο ενώ ο Γ, ο οποίος είχε έντονη την εργαλειακή άποψη, ακολούθησε τον δικό του παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας. Στην περίπτωση του Γ, ανταποκρίθηκαν μόνο οι συνηθισμένοι μαθητές και οι γραπτές τους απαντήσεις δεν ήταν πλήρεις. Η διδασκαλία του δεν έκανε όλους τους μαθητές να καλλιεργήσουν μια θετική στάση προς τα μαθηματικά.

- Αυτή η διαφορετικού τύπου γνωστική διαχείριση, ανέδειξε στους καθηγητές της ομάδας τη βασική παιδαγωγική αρχή ότι ένα άτομο μαθαίνει καλύτερα όταν έχει να αντιμετωπίσει μια κατάσταση-πρόβλημα, στην οποία εμπλέκεται ενεργά και βιωματικά. Στις τάξεις που οι μαθητές έπαιξαν με το παιχνίδι (διδασκαλίες Α, Δ και αρκετά στην Ε), καταλήγοντας σταδιακά στην εύρεση του ελκυστή, το γνωστικό περιεχόμενο κατακτήθηκε σε βάθος.
- Στις διδασκαλίες όπου οι μαθητές έδρασαν, παίζοντας το παιχνίδι του Χάους, αναπτύχθηκε από όλους τους μαθητές μια θετική στάση προς τα μαθηματικά.

Οι επιφυλάξεις που διατυπώθηκαν, και από τους καθηγητές αλλά και από τους πολύ καλούς μαθητές είχαν να κάνουν με το ισχύον σύστημα αξιολόγησης. Δεν πρέπει να υποβαθμιστεί καθόλου ο ρόλος του εξεταστικού συστήματος και ο τρόπος υποβολής των θεμάτων, στην διαμόρφωση των αντιλήψεων και διδακτικών στάσεων, αφού το είδος των θεμάτων των εξετάσεων προάγει

ακριβώς την εργαλειακή άποψη για τα μαθηματικά: *Ξέρω και εφαρμόζω*. Ένα τέτοιο είδος θεμάτων ενισχύει την τάση για δασκαλοκεντρική διδασκαλία και ήταν ένας από τους λόγους που οι διδακτικοί χειρισμοί των καθηγητών Β και Ε παράπαιαν ανάμεσα στον προτεινόμενο και τον οικείο γι' αυτούς δασκαλοκεντρικό τρόπο. Ήθελαν να προλάβουν να τα πουν όλα, δίνοντας έτσι μεγαλύτερη σημασία στην άμεση παροχή της γνώσης παρά στην κατάκτησή της. Είναι γεγονός ότι το ισχύον αναλυτικό πρόγραμμα καλλιεργεί έντονα μια τέτοια τάση αφού δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην κάλυψη μεγάλου όγκου ύλης σε σχετικά σύντομο χρονικό διάστημα. Και ναι μεν, ο νέος στόχος των σχολικών μαθηματικών επιδιώκει την ανάπτυξη της μαθηματικής ερευνητικής σκέψης για την επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής και όχι την «κάλυψη της ύλης», όμως έρχεται σε πλήρη αντίθεση με το ισχύον σύστημα αξιολόγησης. Έτσι, οι καθηγητές αναγκάζονται, κυρίως, να μεταφέρουν την πληροφορία μέσα από τα επίσημα σχολικά βιβλία με αποτέλεσμα να εδραιώνεται η αίσθηση ότι αν πουν όλα αυτά που προβλέπει το αναλυτικό πρόγραμμα, θα έχουν εκπληρώσει την αποστολή τους.

Παρ' όλα αυτά, ελπίζω ότι η παρέμβαση ανέδειξε τρόπους βελτίωσης της τρέχουσας πραγματικότητας μέσα στη σχολική τάξη και έκανε τους μαθηματικούς να παραδεχθούν την αναγκαιότητα αναβάθμισης του ρόλου τους και την αξία:

α) εύρεσης κατάλληλων διδακτικών υλικών και δραστηριοτήτων, που θα κάνουν ενδιαφέρον το θέμα που πρόκειται να διδαχθεί, αφού έγινε φανερό ότι η άρνηση ενός μεγάλου μέρους των μαθητών να πάρουν μέρος στην εκπαιδευτική διαδικασία σχετίζεται με την έλλειψη ενδιαφέροντος περιεχομένου καθώς και κατάλληλου διδακτικού περιβάλλοντος.

β) σύνδεσης του σχολείου με την πραγματική ζωή. Η ανάδειξη της συσχέτισης των μαθηματικών και με άλλα πεδία (Η/Υ, τέχνη, Φύση), λειτούργησε σε μερικούς μαθητές ως κίνητρο «εκ των έξω» για τη δραστηριοποίησή τους στο μάθημα των μαθηματικών, αφού πολλοί από αυτούς αδιαφορούσαν για το μάθημα, έχοντας την πεποίθηση ότι δεν θα τους χρειαστεί στη μετέπειτα ζωή τους.

γ) της επιλογής, όποτε είναι δυνατόν, κατάλληλου θέματος, όπως αυτό των Φράκταλς, που επιτρέπει την μελέτη σε βάθος ενός θέματος του Αναλυτικού Προγράμματος (στην προκειμένη περίπτωση της ομοιότητας και των προόδων) προάγοντας την κατανόηση και όχι την απομνημόνευση.

δ) του τρόπου διδασκαλίας, που με τη βοήθεια συνεργατικών και ερευνητικών δραστηριοτήτων προάγει την οικοδόμηση της γνώσης και όχι την μεταφορά πληροφορίας, αφού παρέχει «καλής ποιότητας» γνώση, διαμορφώνοντας

γνωστικά σχήματα ικανά να λειτουργήσουν και στην εκτός σχολείου σύγχρονη πραγματικότητα.

Στο εξωτερικό¹³⁹ είναι αρκετά συνηθισμένη η δραστηριοποίηση πολλών καθηγητών της Β/θμιας εκπαίδευσης στην κατασκευή σύγχρονων διδακτικών προτάσεων, που συνδέονται ομαλά με τα αντίστοιχα Αναλυτικά Προγράμματα. Επίσης πολλά πανεπιστήμια, σε συνεργασία με διάφορα σχολεία, οργανώνουν καλοκαιρινά σεμινάρια με στόχο την είσοδο των σύγχρονων μαθηματικών και της τεχνολογίας στην εκπαίδευση και την ανάπτυξη νέων διδακτικών μεθόδων, που έχουν προκύψει από αποτελέσματα ερευνών. Αναπτύσσονται έτσι πολλές διδακτικές προτάσεις (πολλές από αυτές αφορούν τα Φράκταλς) με υποστηρικτικό υλικό, που βοηθούν τους καθηγητές να εντάξουν τη νέα γνώση στο πρόγραμμά τους.

Στο τέλος της εργασίας και προσπαθώντας να βοηθήσω το συνάδελφο, ο οποίος θα θελήσει να εφαρμόσει από μόνος του αυτήν την πρόταση διδασκαλίας στην τάξη, θα επιχειρήσω να τονίσω μερικά στοιχεία, απαραίτητα για την αποτελεσματικότητά της.

Πρώτα απ' όλα ότι ο στόχος της πρότασης είναι τριπλός. Δεν στοχεύει μόνο στην εξερεύνηση ενός απλού γεωμετρικού σχήματος, όπως είναι αυτό του τριγώνου, υπό το νέο πρίσμα της σύγχρονης πραγματικότητας, αλλά στοχεύει επίσης στην μαθηματοποίηση μιας κατάστασης προβλήματος καθώς και στην ανάπτυξη της επικοινωνίας ανάμεσα στους μαθητές. Οι δύο τελευταίοι στόχοι είναι εξ ίσου σημαντικοί με τον πρώτο, ίσως και σημαντικότεροι και είναι αυτοί που δίνουν το στίγμα της «διαφορετικής» διδασκαλίας. Για να επιτευχθούν αυτοί οι στόχοι είναι απαραίτητο να παιχθεί το παιχνίδι και να δοθεί ιδιαίτερη βαρύτητα στο να καταλάβουν από την αρχή καλά οι μαθητές τον κανόνα του παιχνιδιού, πειραματιζόμενοι πρώτα στο φύλλο με το λευκό τρίγωνο και μετά σε αυτά με το πλέγμα και τις τελίτσες. Επίσης είναι σημαντική η συνεργασία με τον καθηγητή της πληροφορικής, ώστε τα παιδιά να ξέρουν από πριν το λογισμικό Sketchpad για να μπορέσουν να κατασκευάσουν στο τέλος και μόνα τους στον Η/Υ το τρίγωνο του Sierpiski και να παίξουν με το βάθος αναδρομής και τα χρώματα, παρατηρώντας σε κάθε βήμα τις μεταβολές στο εμβαδόν και την περίμετρο.

Ένα είναι το βέβαιο: Με κατάλληλη δική μας προετοιμασία και συνεργασία με τους συναδέλφους μπορούμε να κάνουμε τη μάθηση βιωματική και πλήρη όχι μόνο ως προς τις γνώσεις και τις εμπειρίες αλλά και ως προς την ανάπτυξη συναισθημάτων, επικοινωνίας και αποτελεσματικής συνεργασίας. Είναι χαρακτηριστικά τα λόγια του καθηγητή Δ: *« Τα παιδιά είναι πολύ πιο έτοιμα για αλλαγές απ' ότι νομίζουμε. Το θέμα είναι αν εμείς είμαστε έτοιμοι για αλλαγές καλής ποιότητας. Πρέπει να εξοπλιστούμε θεωρητικά. ...Πρέπει να δώσουμε πολύ σημασία στη συνεργασία και επικοινωνία με τους συναδέλφους του σχολείου έτσι ώστε να διαμορφώνουμε τις κατάλληλες συνθήκες για το κάθε μάθημά μας. Κάθε διδασκαλία πρέπει να αναπτύσσεται κατάλληλα... Έχει φτάσει το πλήρωμα του χρόνου για αλλαγή στη διδασκαλία των σχολικών μαθηματικών. Πρέπει να επαναπροσδιορίσουμε τους στόχους μας και να αλλάξουμε αυτήν την αποκομμένη από το περιβάλλον μας τακτική.»*

¹³⁹ Βλέπε παράγραφο Δ2.1. της παρούσας εργασίας, σελ. 79-85

Παράρτημα

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

A. Οι διδακτικές προτάσεις

A1. Γυμνάσιο και Α΄ Λυκείου.....	2
A2. Β΄ Λυκείου.....	19

B. Ερευνητικά εργαλεία

B1. Βασικές ερωτήσεις της ημιδομημένης συνέντευξης προς τους καθηγητές.	
B1.1. Βασικές ερωτήσεις της ημιδομημένης συνέντευξης προς τους καθηγητές πριν τη διενέργεια της διδασκαλίας	
.....	37
B1.2. Βασικές ερωτήσεις της ημιδομημένης συνέντευξης προς τους καθηγητές μετά τη διενέργεια της διδασκαλίας.	
.....	38
B2. Γραπτές ερωτήσεις προς τους μαθητές μετά τη διδασκαλία.....	39
B3. Κλείδες παρατήρησης	
B3.1. Κλείδα παρατήρησης του καθηγητή από το συντονιστή.....	40
B3.2. Κλείδα παρατήρησης των μαθητών κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας.....	4

A. Οι διδακτικές προτάσεις

A1. Γυμνάσιο και Α' Λυκείου

Α' Γυμνασίου (κεφ. 4: ανάλογα ποσά, κεφ. 3: ποσοστά, κεφ.7: τρίγωνα)

Β' Γυμνασίου (κεφ. 4: λόγος ευθ. τμημάτων, κεφ. 7: συμμετρία, κεφ. 5: ανάλογα ποσά, κεφ. 6: στατιστική-εικονογράμματα)

Γ' Γυμνασίου (κεφ. 6: ισότητα-ομοιότητα σχημάτων, κεφ. 5: έννοια της πιθανότητας)

Α' Λυκείου (κεφ.5: παραλληλόγραμμα- ευθ. τμήμα που ενώνει τα μέσα πλευρών τριγώνου. Εδώ προτείνεται στο Φύλλο 4, τα τρία πρώτα βήματα κατασκευής του τριγ. του Sierpinski να επεκταθούν έως και το νιοστό.)

Σχόλιο για τον καθηγητή: Ένα από τα πιο ενδιαφέροντα Φράκταλς, αυτό του τριγώνου Sierpinski, προκύπτει από μια δραστηριότητα –παιχνίδι που ο Michael Barnsley ονόμασε «Το Παιχνίδι του Χάους» ("The Chaos Game" [Barnsley])¹⁴⁰. Εδώ προτείνεται μια ενδιαφέρουσα παραλλαγή του παιχνιδιού, που το κάνει πιο ενδιαφέρον αφού οι μαθητές παίζοντάς το χάνουν ή κερδίζουν. Αυτό το παιχνίδι παίζεται ως εξής: Παίρνουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ (κάνει και οποιοδήποτε τρίγωνο, αλλά το ισόπλευρο δίνει καλύτερο αισθητικό αποτέλεσμα και διευκολύνει τους υπολογισμούς της Β' Φάσης της διδασκαλίας). Στο πρώτο στάδιο, κάθε παίχτης διαλέγει ένα αρχικό σημείο P_1 μέσα στο τρίγωνο. Στο δεύτερο στάδιο, κάθε παίκτης, ενώνοντας το P_1 με την κορυφή του τριγώνου που βρίσκεται πιο κοντά στο P_1 διπλασιάζει αυτήν την απόσταση προς τη μεριά του P_1 , κάνοντας το σημείο P_1 μέσο και έτσι παίρνει ένα νέο σημείο, το P_2 (Το P_2 είναι το συμμετρικό της κοντινότερης στο P_1 κορυφής με κέντρο συμμετρίας το P_1). Στο τρίτο στάδιο, με αρχικό το P_2 , διπλασιάζει την απόστασή του P_2 από την πιο κοντινή σε αυτό κορυφή του

¹⁴⁰ <http://math.bu.edu/DYSYS/chaos-game/node1.html>

τριγώνου, παίρνοντας έτσι το P_3 . Το παιχνίδι συνεχίζεται κατ' αυτόν τον τρόπο, έως ότου το σημείο κάποιου παίκτη βρεθεί εκτός τριγώνου, οπότε αυτός ο παίκτης χάνει. Οι στόχοι του παιχνιδιού είναι πολλοί. Οι πιο σημαντικοί είναι οι εξής:

Στόχοι:

- Η κατανόηση ορισμένων σημαντικών ορολογιών. Οι ορολογίες που συσχετίζονται με αυτό το παιχνίδι είναι οι εξής: Η ακολουθία των σημείων $P_1 P_2 P_3 \dots$ που προκύπτει, καλείται τροχιά του αρχικού σημείου P_1 , το οποίο πολλές φορές αποκαλείται και σπόρος. Η διαδικασία κατά την οποία παίρνουμε κάθε τόσο σαν αρχικό σημείο για το επόμενο βήμα το αποτέλεσμα του προηγούμενου βήματος, καλείται επανάληψη (iteration). Η επαναληπτική διαδικασία είναι σημαντική σε πολλές περιοχές των μαθηματικών. Ειδικά τέτοιες επαναληπτικές διαδικασίες μελετά ο κλάδος των μαθηματικών που είναι γνωστός ως Θεωρία Διακριτών Δυναμικών Συστημάτων.
- Το να μαθαίνουν να εφαρμόζουν μια επαναλαμβανόμενη διαδικασία (βρόχος).
- Παρατηρούν πόσο πολύ επηρεάζει το αποτέλεσμα μιας επαναλαμβανόμενης διαδικασίας η επιλογή του αρχικού σημείου και αντιλαμβάνονται αυτήν την ευαισθησία της επιλογής αφού πολύ κοντινά σημεία οδηγούν σε διαφορετική κατάληξη. Εισάγονται έτσι στη γνωριμία με τη θεωρία του Χάους.
- Στην προσπάθειά τους να μη χάσουν, βρίσκουν τις θέσεις ισορροπίας (την κατάληξη) αυτής της επαναληπτικής διαδικασίας και επιλέγοντας τα σημεία που οι τροχιές τους παραμένουν στο τρίγωνο, εξοικειώνονται με την έννοια του ελκυστή. Μέσα από τη λύση αυτού του απλού και ενδιαφέροντος προβλήματος – παιχνιδιού, ο μαθητής μπαίνει **κατασκευαστικά** στη διαδικασία απόρριψης των περιοχών που δεν ανήκουν στο τρίγωνο Sierpinski, το οποίο κατασκευάζεται άτυπα.
- Εισάγονται στην έννοια της ομοιότητας με μη τυπική διατύπωση και διαπιστώνουν υπολογιστικά ότι ο λόγος των περιμέτρων των

ομοίων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των μηκών των πλευρών τους.

- Κατανόηση της έννοιας της κλίμακας.
- Εισαγωγή σε σύστημα διευθύνσεων .
- Σύνδεση μαθηματικών και τέχνης με τη βοήθεια των χαρακτηριστικών πινάκων του Escher.
- Διδακτική χρήση του Η/Υ για την κατασκευή του τριγώνου του Sierpinski (με το λογισμικό Sketchpad) καθώς και χρήση του διαδικτύου για μια επίσκεψη στη γκαλερί με έργα του Escher. (<http://mcescher.com/Gallery/recogn-bmp>)
- Προαιρετικός στόχος είναι κατανόηση της έννοιας της πιθανότητας. Αφού η δραστηριότητα αρχίζει με παιχνίδι, μπορεί κατά τη διάρκεια του μαθήματος να τεθεί η ερώτηση ποια πιθανότητα έχει κάποιος να κερδίσει. Οι μαθητές ήδη έχουν συνειδητοποιήσει ότι υπάρχουν μεν αμέτρητα σημεία που οδηγούν σε νίκη (αυτά του τριγώνου Sierpinski) αλλά είναι πάρα πολύ δύσκολο να πέσεις επάνω σε ένα από αυτά (Πιθανότητα μηδέν).

Υλικά που θα μοιραστούν στους μαθητές:

1). Ένα φύλλο A4 στο οποίο θα είναι σχεδιασμένο ένα ισόπλευρο τρίγωνο για να παίξουν το παιχνίδι. Το φύλλο μπορεί να έχει σημειωμένες κουκίδες ώστε να μπορούν εύκολα να διπλασιάζουν τις αποστάσεις ή πλέγμα. Συμπληρωματικά μπορεί να δοθεί και ένας βοηθητικός χάρακας με τον οποίο βρίσκεται εύκολα το μέσο ή το διπλάσιο ενός ευθυγράμμου τμήματος και ο οποίος εικονίζεται παρακάτω:



Μετά από την πιλοτική διδασκαλία φάνηκε ότι το τρίγωνο με τις κουκίδες δεν βοηθά ιδιαίτερα. Είναι καλύτερο να δοθεί πρώτα το «λευκό τρίγωνο» για να εξασκηθούν χρησιμοποιώντας χάρακα και διαβήτη και μετά, αυτό με το πλέγμα γιατί ο παραπάνω χάρακας δεν βοηθά ιδιαίτερα αφού δεν είναι οι μαθητές εξοικειωμένοι με αυτόν.

2). Ένα φύλλο με τυπωμένες ερωτήσεις ώστε να ανακαλύψουν μόνοι τους τον αλγόριθμο που οδηγεί σε νίκη. Επειδή στην πιλοτική διδασκαλία η ερώτηση του τι συμβαίνει με όλα τα σημεία που βρίσκονται στις πλευρές έπαιξε σπουδαίο ρόλο στην οργάνωση της σκέψης τους, οι μαθητές αντί του φύλλου A4 με το τρίγωνο, μπορούν να πειραματιστούν σε Η/Υ με τη χρήση του Sketchpad δουλεύοντας αντίστροφα, δηλαδή να παίρνουν τυχαία σημεία

πάνω στις πλευρές του τριγώνου και με τον μετασχηματισμό της αυξομείωσης με κέντρο τις κορυφές του τριγώνου και λόγο $\frac{1}{2}$ να βρουν τη θέση των ζητούμενων σημείων.

3). Ένα φύλλο, που θα μοιραστεί αφού θα έχουν βρει τον τρόπο επιτυχίας και το οποίο θα δείχνει τις περιοχές που έχουν απορριφθεί.

4). Ένα φύλλο στο οποίο θα σχεδιάσουν μόνοι τους τα τρία πρώτα βήματα κατασκευής του τριγώνου για την εύρεση των λόγων των πλευρών και των περιμέτρων των σχηματιζόμενων τριγώνων (που θα έχει και πίνακα συμπλήρωσης) αλλά και για την εισαγωγή του συστήματος διευθύνσεων.

5). Ένα φύλλο για την κατανόηση της έννοιας της πιθανότητας.

6). Προτείνεται η συνέχεια του μαθήματος να γίνει στην αίθουσα των Η/Υ του σχολείου για την κατασκευή του τριγ. του Sierpinski (με το λογισμικό Sketchpad) καθώς και τη χρήση του διαδικτύου για να γνωρίσουν το διάσημο ζωγράφο Escher (<http://mcescher.com/Gallery/recogn-bmp>) αλλά και για να παίξουν με μια δραστηριότητα–παιχνίδι (<http://math.bu.edu/DYSYS/applets/chaos-game.html>).

Διαδικασία: Μοιράζουμε το υπ' αριθμό (1) φύλλο και εξηγούμε προφορικά τους κανόνες του παιχνιδιού. Οι μαθητές δουλεύουν ανά τέσσερις. Τους αφήνουμε λίγο χρόνο, έως 5' για να πειραματιστούν.

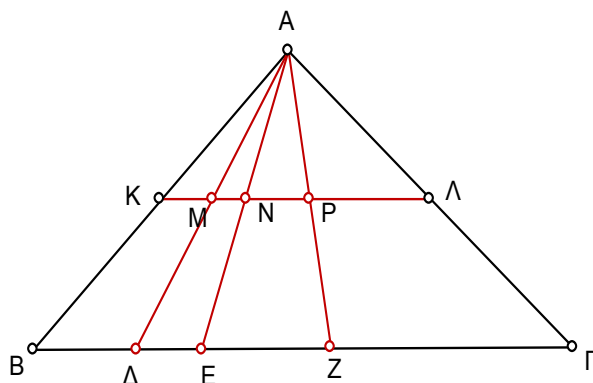
Κατόπιν μοιράζουμε πάλι το φύλλο (1), αυτό με το πλέγμα, ξετυλίγοντας μία, μία τις ερωτήσεις του φύλλου (2) και αφήνοντας τους μαθητές να επιχειρηματολογήσουν για την ορθότητα των απαντήσεων.

Οι ερωτήσεις που θα δοθούν είναι οι παρακάτω:

- Που βρίσκονται τα σημεία που αμέσως χάνουν;
- Σε ποια περιοχή του τριγώνου πρέπει να βρίσκεται το αρχικό σημείο ώστε να αργήσουμε να χάσουμε;
- Τι συμβαίνει με τα σημεία που βρίσκονται στις πλευρές; Χάνουν ή κερδίζουν;
- Ποια σημεία καταλήγουν με την πρώτη πάνω στις πλευρές χαρίζοντάς μας γρήγορα νίκη;
- Με ποια διαδικασία μπορούμε να βρούμε όλα αυτά τα τυχερά σημεία που δεν οδηγούν ποτέ έξω από το τρίγωνο;
- Τελικά οι τροχιές ποιων σημείων κατευθύνονται έξω από το τρίγωνο ;

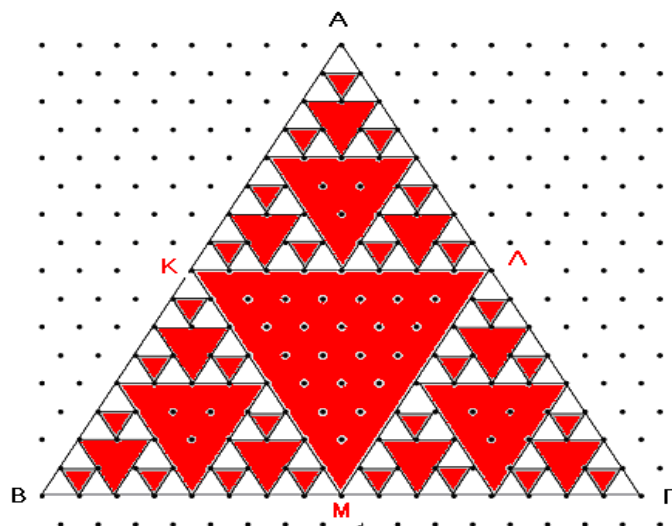
- Ποια είναι η πιθανότητα που έχει κάποιος να κερδίσει;

Οι μαθητές πρέπει μόνοι τους να ανακαλύψουν άτυπα το τρίγωνο του Sierpinski, βρίσκοντας **με μετρήσεις** ότι τα σημεία που οδηγούν σε νίκη βρίσκονται στα ευθύγραμμα τμήματα που σταδιακά ενώνουν τα μέσα των σχηματιζόμενων ευθυγράμμων τμημάτων.



Στην παραπάνω εικόνα το ευθ. τμήμα ΚΛ διχοτομεί τα ευθ. τμήματα ΑΔ, ΑΕ, κ.λ.π. που ενώνουν την κορυφή Α με οποιοδήποτε σημείο της βάσης.

Κατόπιν μοιράζεται το παρακάτω φύλλο (3), με σχεδιασμένο το σχήμα που έχει προκύψει από την παραπάνω δραστηριότητα.



Οι μαθητές πρέπει να ξεκαθαρίσουν τώρα ότι τα σημεία που οδηγούν σε νίκη βρίσκονται πάνω στα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν **κάθε τόσο** τα μέσα των σχηματιζόμενων πλευρών, σε μια **ατελείωτη διαδικασία**, ενώ οι κόκκινες

περιοχές οδηγούν σε χάσιμο, αφού αν το αρχικό σημείο επιλεγεί σε κόκκινη περιοχή, πάντα θα δίνει τροχιά που θα μεταπηδά στο αμέσως μεγαλύτερο κόκκινο τρίγωνο, με αποτέλεσμα να βρεθεί σταδιακά εκτός του τριγώνου. Σε αυτή τη φάση, καλό είναι να λεχθεί ότι «άσπρες» περιοχές ουσιαστικά δεν υπάρχουν, αφού παίρνουμε συνεχώς τα μέσα των πλευρών στα άσπρα τρίγωνα και απορρίπτουμε το μεσαίο, κοκκινίζοντάς το, αφού σταδιακά θα μας οδηγήσει σε χάσιμο. Έτσι οι μαθητές συνειδητοποιούν ότι τα σημεία που οδηγούν σε νίκη βρίσκονται ακριβώς πάνω στα ευθύγραμμα τμήματα και μια απειροστή μετακίνησή τους προς τα πάνω ή προς τα κάτω θα αλλάξει, με την πάροδο του χρόνου, δραματικά το αποτέλεσμα του παιχνιδιού. Αν κάποιος σκεφτεί ότι κοντά στις κορυφές του τριγώνου, είναι αδύνατο να διακρίνουμε ποια σημεία οδηγούν σε νίκη και ποια σε ήττα, αφού η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ' άπειρο, θα αντιληφθεί ότι το αποτέλεσμα δεν είναι πλήρως προβλέψιμο. Αναδύονται λοιπόν δύο σημαντικές έννοιες, η έννοια του δυναμικού συστήματος και η Θεωρία του Χάους.

Μπορούμε να τονίσουμε ότι το παραπάνω παιχνίδι είναι μια πολύ απλοποιημένη μορφή ενός **δυναμικού συστήματος**, ενός δηλ. συστήματος στο οποίο η μόνη ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος. (Δυναμικό σύστημα: Σύνολο αλληλεπιδρώντων μεταβλητών, που εξελίσσονται στο χρόνο σύμφωνα με συγκεκριμένους νόμους ή κανόνες).

Η παρατήρηση ότι το αποτέλεσμα δεν είναι πλήρως προβλέψιμο οδηγεί σε μια καινούρια θεωρία, την θεωρία του Χάους. Αυτή η θεωρία αμφισβητεί την κλασική νευτώνεια θεωρία που υποστηρίζει ότι με κατάλληλες συνθήκες η εξέλιξη κάθε συστήματος είναι πλήρως προβλέψιμη. Μελετάει το ζήτημα αν μπορούμε ή όχι (και γιατί) να κάνουμε προβλέψεις σε μεγάλο βάθος χρόνου για τη συμπεριφορά ενός συστήματος, αποδεικνύοντας ότι υπάρχουν και μη προβλέψιμα συστήματα. Συστήματα δηλ. που η κατάσταση ισορροπίας τους δεν είναι ένα απλό σημείο ή μια περιοδική κίνηση, αλλά ενδεχόμενα και ένα πολύπλοκο σύνολο σημείων που προκαλεί το απρόβλεπτο της τελικής κατάληξης του συστήματος και υπακούει σε μια κρυμμένη τάξη. Αυτό το πολύπλοκο σύνολο ονομάζεται ελκυστής, (attractor), και είναι ένα Φράκταλ. Χαρακτηριστικό αυτών των σχημάτων είναι ότι μπορούν να αποσυντεθούν σε

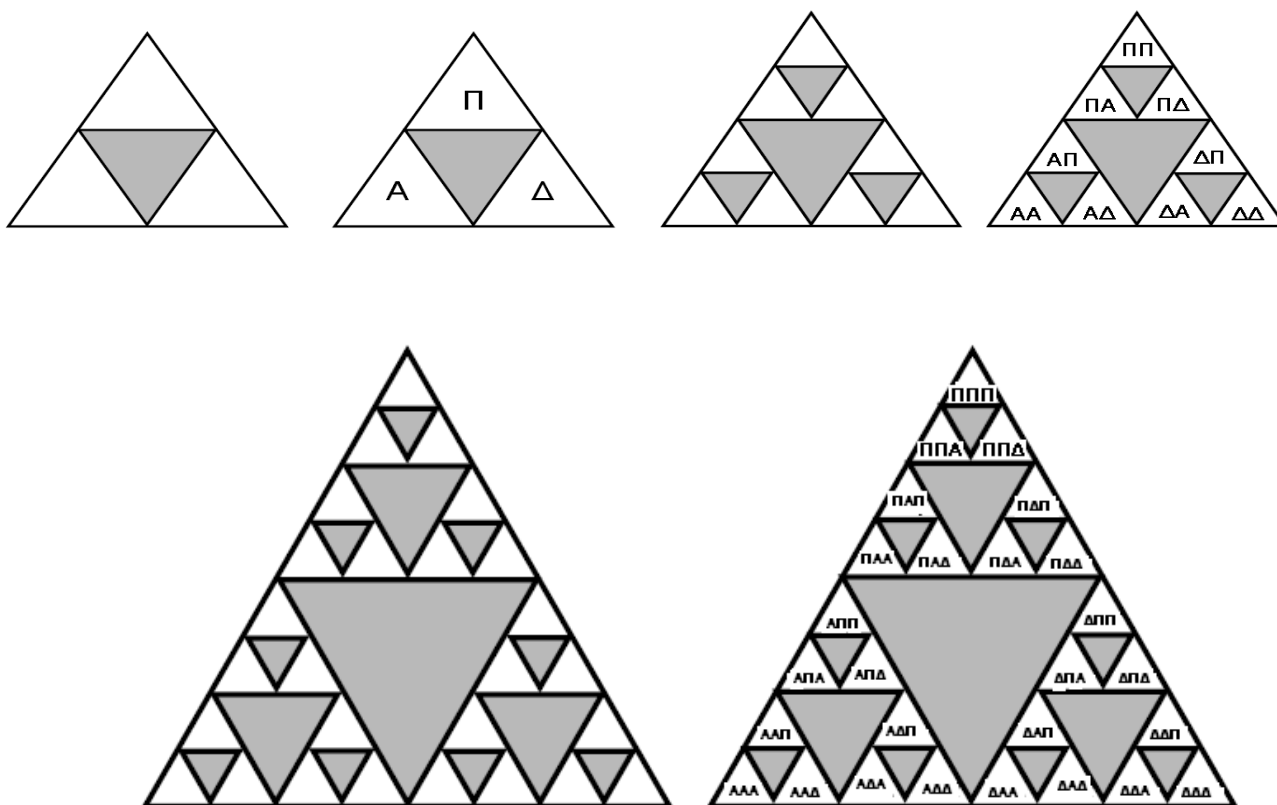
κομμάτια, που το καθένα τους είναι όμοιο (αντίγραφο σε σμίκρυνση) με ολόκληρη την εικόνα, έχει δηλ. αυτοομοιότητα.

Η εύρεση των ελκυστών ενός δυναμικού συστήματος είναι σημαντική γιατί είναι η κατάσταση στην οποία τελικά θα ισορροπήσει το σύστημα (με της έννοια της κατάστασης έλξης), επομένως η εύρεσή τους ισοδυναμεί με πρόβλεψη της τελικής κατάληξης (εύρεση της κρυμμένης κανονικότητας). Μπορούμε να συζητήσουμε με τους μαθητές την σπουδαιότητα αυτής της εύρεσης αν τους τονίσουμε ότι τα περισσότερα συστήματα που μας περιβάλλουν, είναι συστήματα δυναμικά, όπως η κίνηση των πλανητών, το μετεωρολογικό σύστημα, οι αυξομειώσεις πληθυσμού, η ροή υγρού και γενικά οποιοδήποτε σύστημα μεταβάλλεται στο χρόνο. Βρίσκοντας λοιπόν τον ελκυστή ενός συστήματος μπορούμε να απαντήσουμε σε ερωτήσεις της μορφής: Θα υπάρξει αύξηση τιμών στο χρηματιστήριο; Θα βρέχει αύριο; Τι θα γίνει αν ενώσουμε αυτές τις χημικές ουσίες; Έχει μέλλον η δημιουργία αυτού του εργοστασίου;

Μετά μοιράζουμε το φύλλο (4) με τα τρία πρώτα βήματα κατασκευής του τριγώνου για την εύρεση των λόγων των πλευρών και των περιμέτρων με τη βοήθεια της συμπλήρωσης και ενός βοηθητικού πίνακα (οι λόγοι θα ζητηθεί να εκφραστούν και επί τοις %). Σε αυτήν τη φάση μπορούμε να κάνουμε και την εισαγωγή ενός συστήματος διευθύνσεων για να ανακαλύψουν πώς με κατάλληλες ετικέτες λειτουργεί ένα ακριβές σύστημα εντοπισμού θέσης (διεύθυνσης) σε μια ευρύτερη περιοχή. Οι παρακάτω εικόνες περιγράφουν αυτό το σύστημα ετικετών, όπου με Π συμβολίζουμε το πάνω μέρος, με Δ το δεξί και με A το αριστερό¹⁴¹.

¹⁴¹Η πρόταση αυτή πάρθηκε από τη διεύθυνση:

http://www.math.fau.edu/Teacher/Teacher_homepage.htm#Literature



Η τελευταία ερώτηση του φύλλου (2) θίγει και την πιθανότητα που έχει κάποιος να κερδίσει. Αυτή η πιθανότητα είναι ίση με μηδέν, αλλά οι μαθητές μπορεί να μπερδευτούν αφού υπάρχουν άπειρα σημεία που οδηγούν σε νίκη. Αν υπάρξει τέτοιο θέμα, μπορεί να μοιραστεί και το φύλλο (5) , όπου γίνεται αντιληπτό ότι πιθανότητα δεν είναι ο απόλυτος αριθμός των επιτυχιών αλλά ότι η πιθανότητα είναι ποσοστό επιτυχίας. Επιλέχτηκε ειδικά και εικόνα που δείχνει το μερίδιο της επιτυχίας σαν μέρος εμβαδού, ώστε να γίνει άμεση αναφορά στο τρίγωνο της κύριας δραστηριότητας (τα συνολικά σημεία από τα οποία διαλέγω είναι όλα τα σημεία της επιφάνειας που περικλείει το τρίγωνο, ενώ τα σημεία που οδηγούν στην επιτυχία βρίσκονται πάνω σε γραμμή που δεν περιέχει καθόλου εμβαδόν).

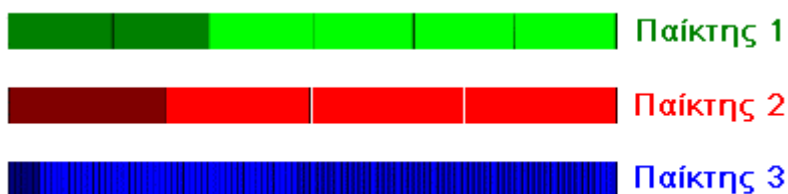
Αριθμός επιτυχιών και Πιθανότητα

Κάνουμε στους μαθητές την εξής ερώτηση:

Δύο άνθρωποι ρίχνουν ζάρια. Ο πρώτος ρίχνει ένα ζάρι 6 εδρών και κερδίζει αν τύχει 2 ή 3, ο δεύτερος ένα ζάρι 4 εδρών και κερδίζει αν τύχει 1. Ποιος παίκτης έχει περισσότερες ελπίδες να κερδίσει; Στην περίπτωση που οι μαθητές απαντήσουν ότι ο πρώτος παίκτης έχει περισσότερες ελπίδες αφού κερδίζει σε δύο περιπτώσεις ενώ ο δεύτερος σε μία, μπορούμε να κάνουμε

εντονότερη τη διαφορά δίνοντας το παράδειγμα ενός τρίτου που κερδίζει αν τύχει π.χ. έναν από τους πέντε αριθμούς 80 ή 90 ή 92 ή 93 ή 95 αλλά διαλέγει από το 1 έως το 100. Γίνεται τώρα φανερό ότι ο απόλυτος αριθμός των επιτυχιών δεν μετράει.

Ας πούμε ότι οι 3 παίκτες έχουν από ένα ορθογώνιο κουτί, ίσου μήκους και πλάτους. Το πρώτο είναι χωρισμένο εσωτερικά σε 6 θέσεις από τις οποίες οι 2 πρώτες είναι πιο σκούρες, το δεύτερο είναι χωρισμένο σε 4 θέσεις από τις οποίες η πρώτη είναι πιο σκούρα και το τρίτο είναι χωρισμένο σε 100 θέσεις από τις οποίες οι πρώτες 5 είναι πιο σκούρες. Ένα παιδί πετάει από μια ίδια μπάλα στο κουτί του κάθε παίκτη και κερδίζει εκείνος που η μπάλα θα προσγειωθεί στο πιο σκούρο τμήμα του ορθογωνίου. Ποιος έχει την μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει;



Είναι φανερό ότι ο πρώτος παίκτης έχει μεγαλύτερο μερίδιο επιτυχίας από τον τρίτο παίκτη, παρ' όλο που εκείνος κερδίζει σε 5 αποτελέσματα ενώ ο πρώτος σε 2 αφού το μέρος που καταλαμβάνει η σκούρα περιοχή του είναι μεγαλύτερο από αυτό του 3ου παίκτη.

Αντί τώρα να πούμε ότι ο παίκτης 1 κερδίζει σε δύο από έξι αποτελέσματα, λέμε ότι η πιθανότητά του να κερδίσει είναι $2/6=1/3$ ή 0.33 ή 33%. Πράγματι, αν κοιτάξουμε το κουτί του πρώτου παίκτη θα δούμε ότι η σκοτεινή περιοχή καταλαμβάνει το $1/3$ του όλου. Όμοια, η πιθανότητα του δεύτερου παίκτη είναι $1/4 = 0,25 = 25\%$ και του τρίτου $5/100 = 0,05 = 5\%$.

Ξαναγυρνώντας τώρα στο τρίγωνο του Sierpinski, αφήνουμε τους μαθητές να παρατηρήσουν τη σχέση που έχουν τα σημεία επιτυχίας με το όλο.

ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Φύλλο 1: Το Παιχνίδι του Χάους

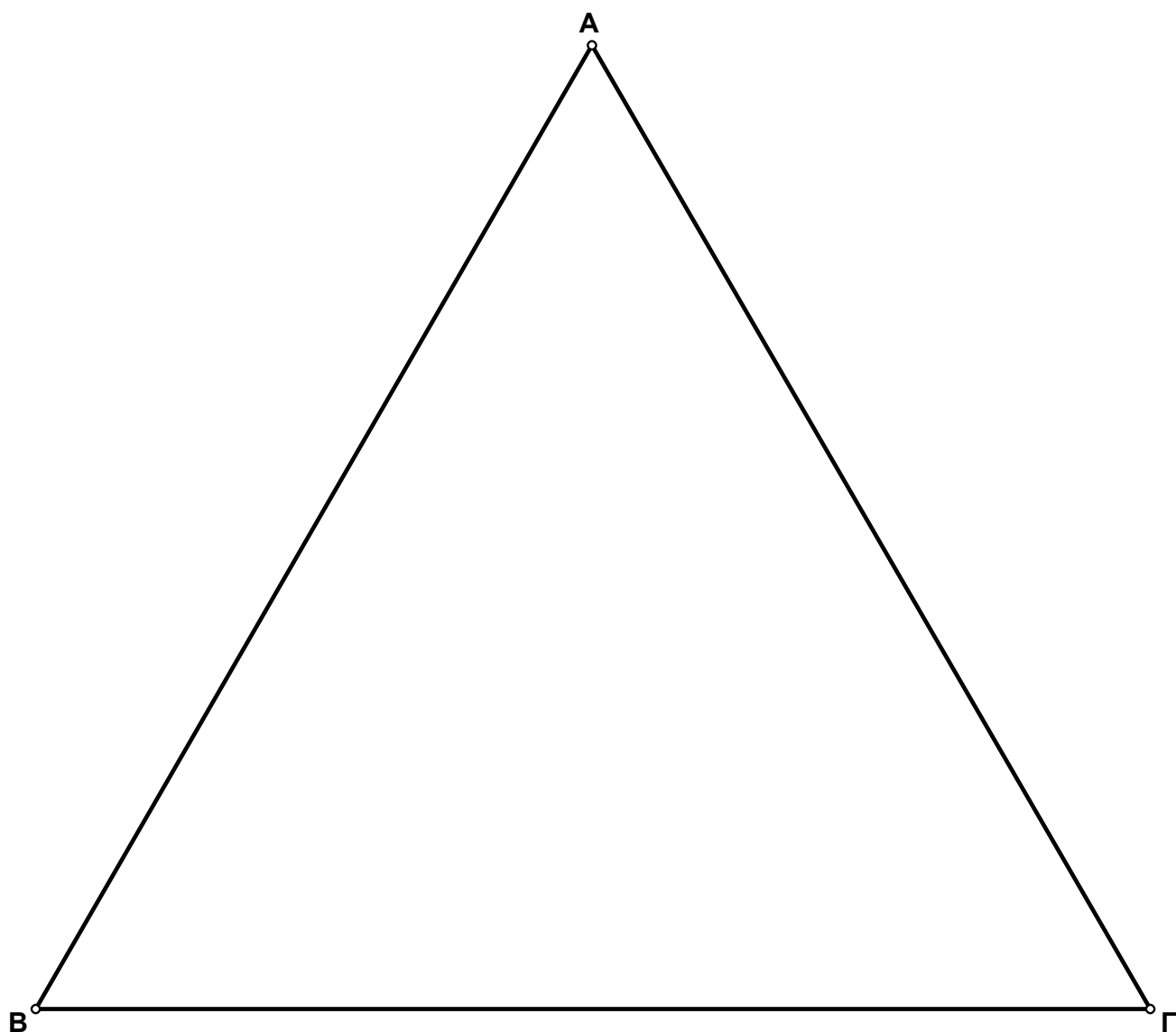
Φύλλο 2: Φύλλο με ερωτήσεις

Φύλλο 3: Φύλλο με περιοχές που απορρίπτονται

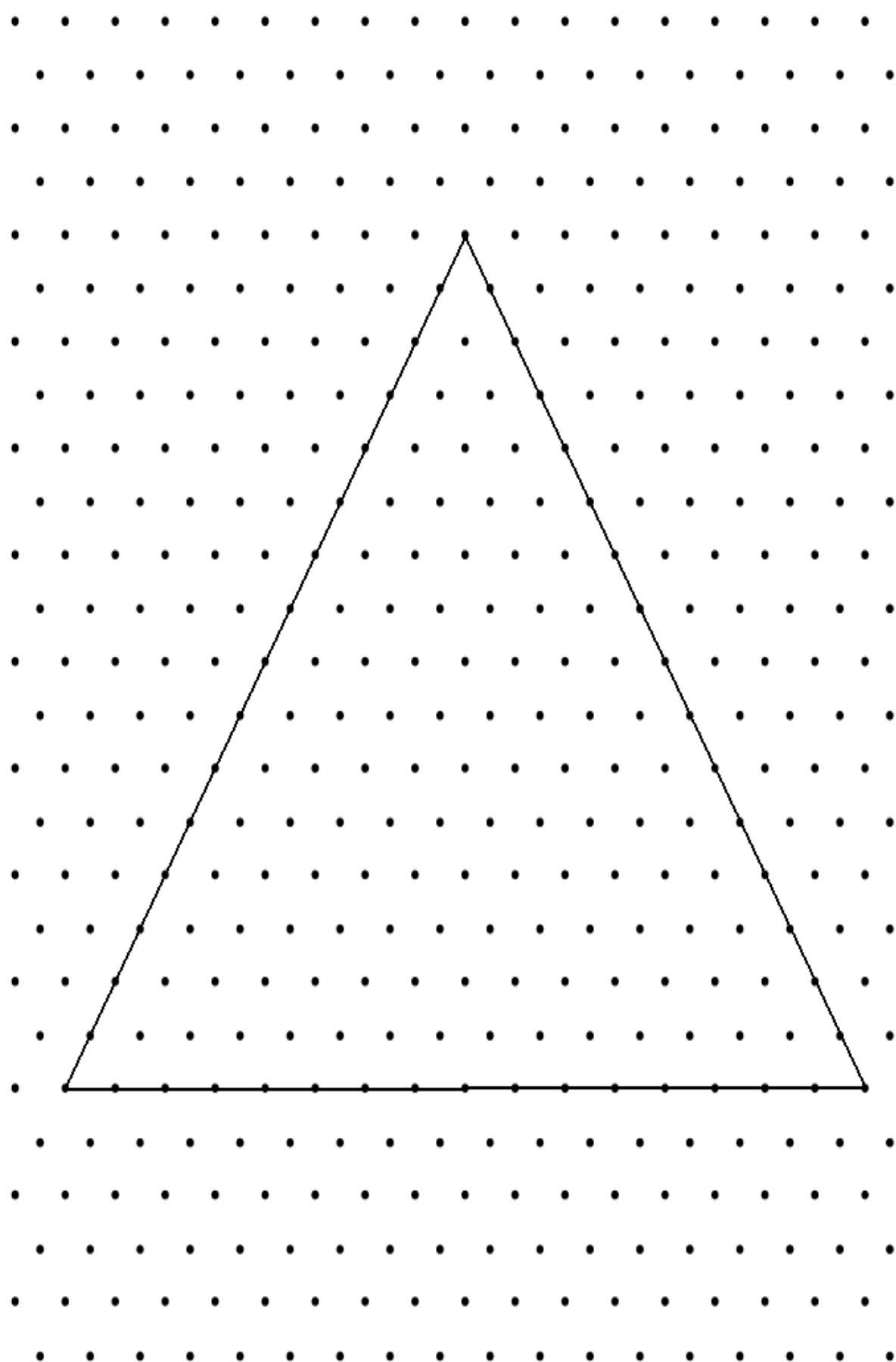
Φύλλο 4: Φύλλο για την κατασκευή των τριών
πρώτων βημάτων κατασκευής του
τριγ. του Sierpinski και εύρεση λόγων.

Φύλλο 5: Φύλλο για την κατανόηση της έννοιας
της πιθανότητας.

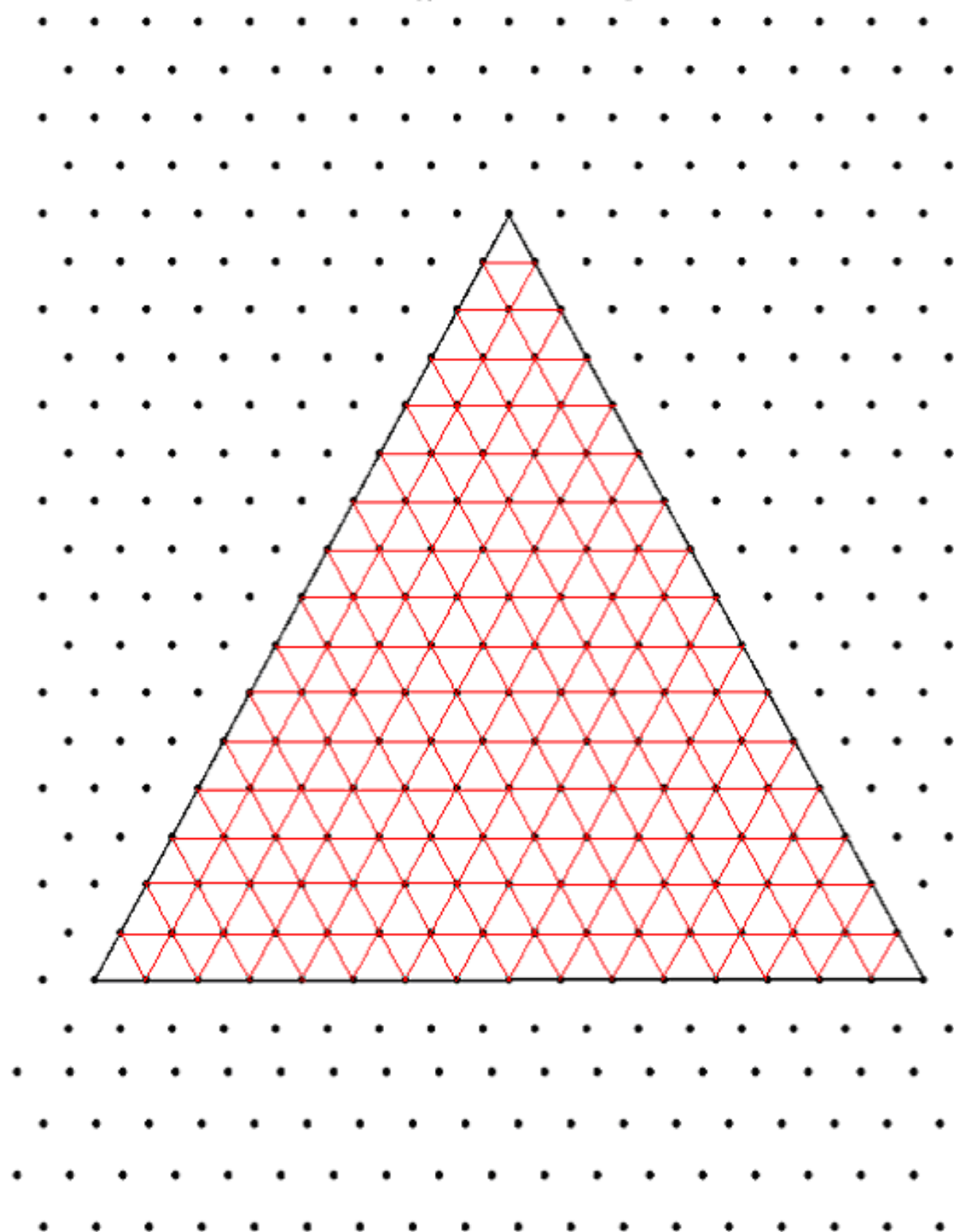
ΦΥΛΛΟ 1
Το παιχνίδι του Χάους



ΦΥΛΛΟ 1
Το παιχνίδι του Χάους



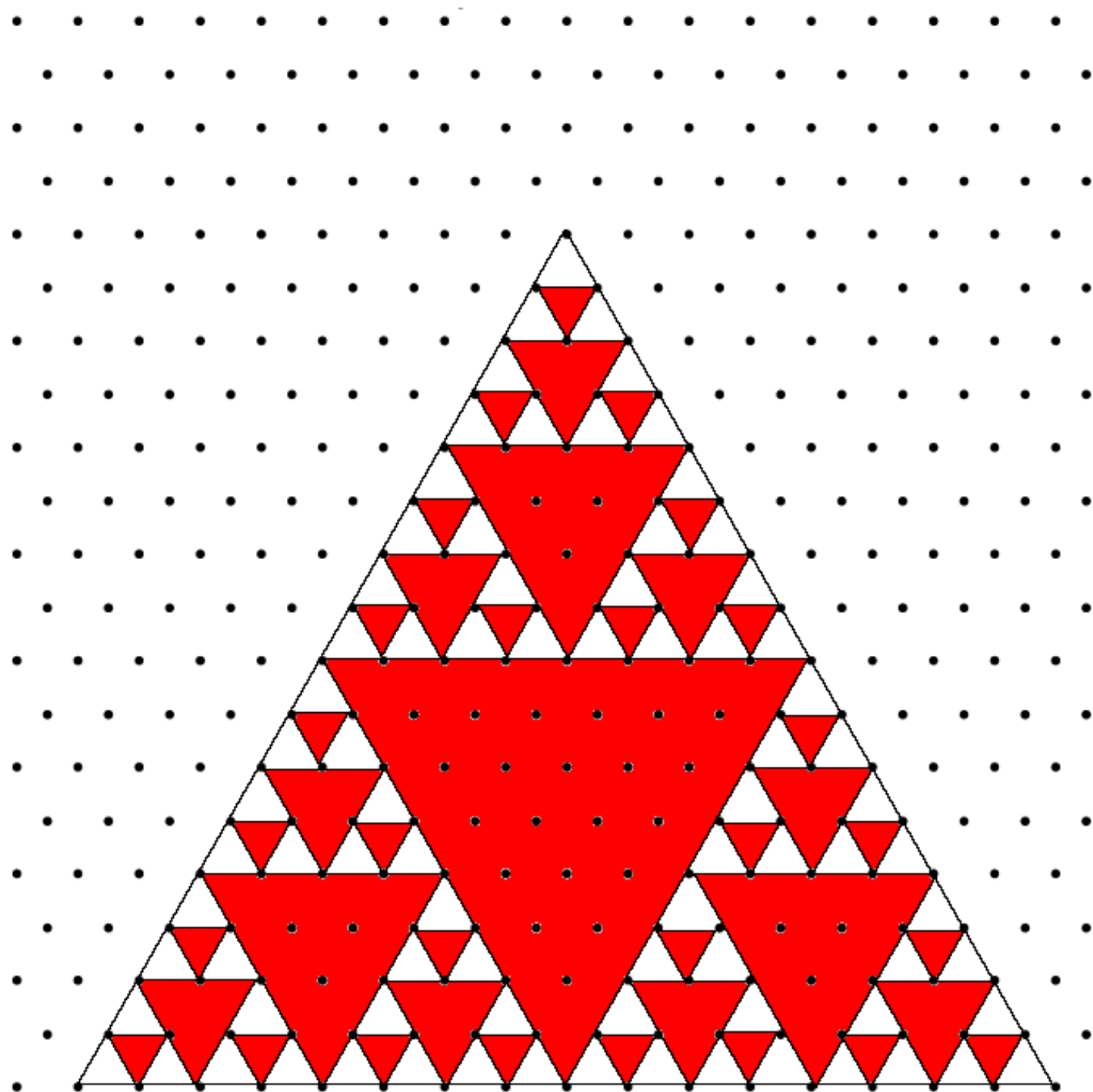
ΦΥΛΛΟ 1
Το παιχνίδι του Χάους



ΦΥΛΛΟ 2

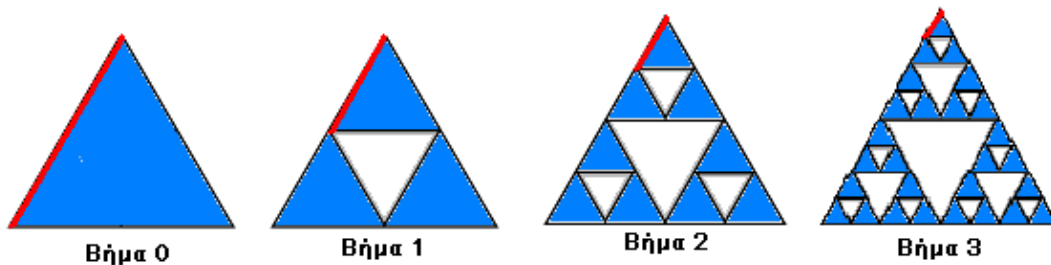
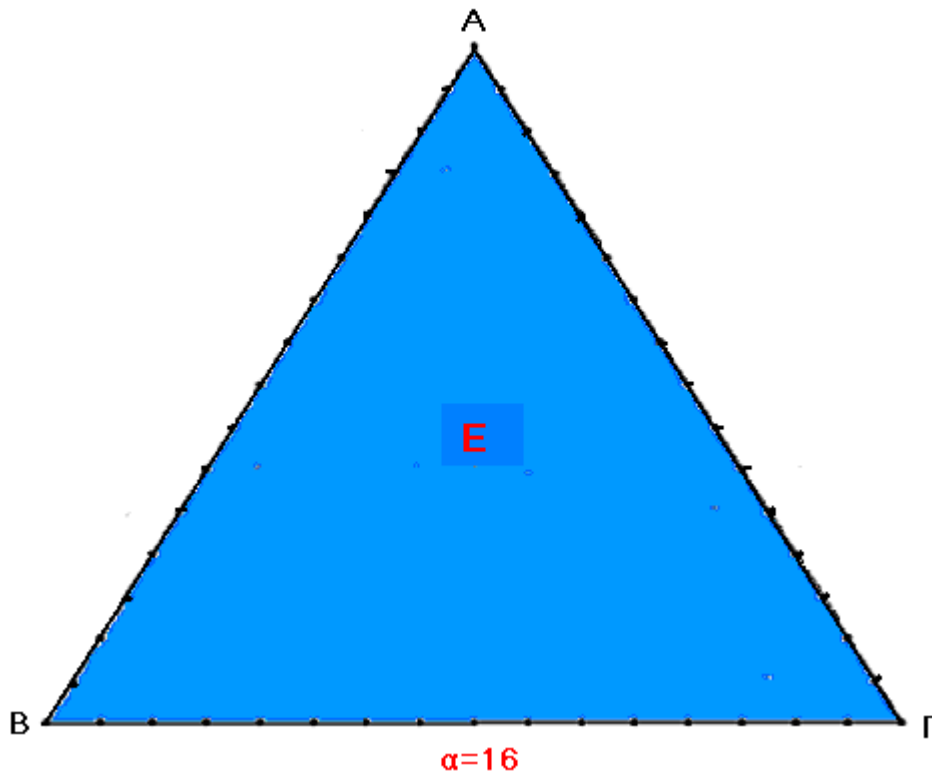
- Πού βρίσκονται τα σημεία που αμέσως χάνουν;
- Σε ποια περιοχή του τριγώνου πρέπει να βρίσκεται το αρχικό σημείο ώστε να αργήσουμε να χάσουμε;
- Τι συμβαίνει με τα σημεία που βρίσκονται στις πλευρές; Χάνουν ή κερδίζουν;
- Ποια σημεία καταλήγουν με την πρώτη πάνω στις πλευρές χαρίζοντάς μας γρήγορα νίκη;
- Με ποια διαδικασία μπορούμε να βρούμε όλα αυτά τα τυχερά σημεία που δεν οδηγούν ποτέ έξω από το τρίγωνο;
- Τελικά οι τροχιές ποιων σημείων κατευθύνονται έξω από το τρίγωνο ;
- Ποια είναι η πιθανότητα που έχει κάποιος να κερδίσει;

ΦΥΛΛΟ 3



ΦΥΛΛΟ 4

Κατασκευή των 3 πρώτων βημάτων
του τριγ. Sierpinski



Βήμα	Αριθμός τριγώνων που μένουν	Μήκος της πλευράς τους	Κλίμακα: Ο λόγος της πλευράς των μικρών τριγ. προς την πλευρά του αρχικού	Περίμετρός τους	Εμβαδόν ενός από αυτά τα τρίγωνα	Συνολικό εμβαδόν του σχήματος που προκύπτει
0	1	$\alpha=16$		$3.\alpha=....$	E	E
1						
2						
3						

ΦΥΛΛΟ 5

Ερώτηση1: Δύο άνθρωποι ρίχνουν ζάρια.

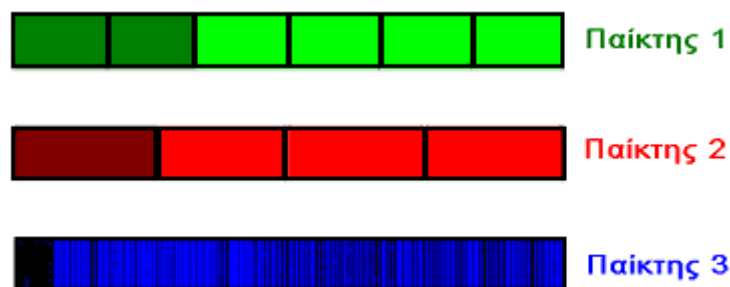
Ο πρώτος ρίχνει ένα κανονικό ζάρι με 6 έδρες και κερδίζει αν τύχει 2 ή 3.

Ο δεύτερος ένα ζάρι 4 εδρών και κερδίζει αν τύχει 1.

Ποιος παίκτης έχει περισσότερες ελπίδες να κερδίσει;

Ερώτηση 2: Ένας τρίτος παίκτης κερδίζει αν τύχει έναν από τους 5 αριθμούς { 80, 90, 92, 93, 95 } αλλά διαλέγει από το 1 έως το 100. Αυτός κερδίζει σε πέντε περιπτώσεις, ο πρώτος σε δύο και ο δεύτερος σε μία. Ποιος έχει την μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει; Μετράει ο απόλυτος αριθμός των επιτυχιών; Τι μετράει;

Ερώτηση 3: Ας πούμε ότι οι παραπάνω 3 παίκτες έχουν από ένα ίδιο ορθογώνιο κουτί. Το πρώτο είναι χωρισμένο εσωτερικά σε 6 θέσεις από τις οποίες οι 2 πρώτες είναι πιο σκούρες, το δεύτερο είναι χωρισμένο σε 4 θέσεις από τις οποίες η πρώτη είναι πιο σκούρα και το τρίτο είναι χωρισμένο σε 100 θέσεις από τις οποίες οι πρώτες 5 είναι πιο σκούρες. Ένα παιδί πετάει από μια ίδια μπάλα στο κουτί του κάθε παίκτη και κερδίζει εκείνος που η μπάλα θα προσγειωθεί στο πιο σκούρο τμήμα του ορθογωνίου. Ποια είναι η πιθανότητα του κάθε παίκτη να κερδίσει;

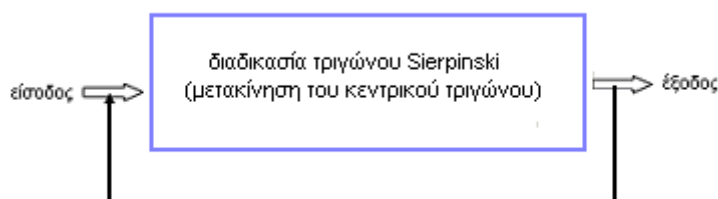


	Παίκτης 1	Παίκτης 2	Παίκτης 3
Πιθανότητα επιτυχίας			

A2. Β' Λυκείου

(ομοιότητα, αυτοομοιότητα, έννοια αλγορίθμου, πρόοδοι, άτυπη έννοια του ορίου, κλασματική διάσταση)

Σχόλιο για τον καθηγητή: Ένα από τα πιο ενδιαφέροντα Φράκταλς, είναι αυτό του τριγώνου του Sierpinski ή Sierpinski Gasket (Πλέγμα του Sierpinski). Σε αυτήν την φάση το τρίγωνο αυτό, εκτός από την άτυπη κατασκευή του, που περιγράφηκε στην προηγούμενη διδακτική πρόταση, θα κατασκευαστεί και από τον γεωμετρικό του αλγόριθμο. Για να το κατασκευάσουμε, αρχίζουμε με ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς π.χ. μιας μονάδας. Το πρώτο βήμα είναι να βρούμε τα μέσα των πλευρών του και να τα ενώσουμε. Κατόπιν αφαιρούμε το κεντρικό τρίγωνο που σχηματίστηκε. Στο δεύτερο βήμα επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία, στο καθένα από τα τρία τρίγωνα που σχηματίστηκαν. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνέχεια και είναι μια επαναληπτική διαδικασία κατά την οποία, σε κάθε στάδιο (βήμα) εφαρμόζουμε συνεχώς τον ίδιο κανόνα στο αποτέλεσμα του προηγούμενου βήματος. Είναι φανερό ότι η διαδικασία του σχηματισμού του τριγώνου δεν τελειώνει ποτέ και από ένα σημείο και μετά από πάρα πολλές επαναλήψεις, η εικόνα που προκύπτει, για το ανθρώπινο μάτι, δεν διαφέρει από την προηγούμενή της, όπως και από την επόμενη της. Αυτή η εικόνα, που είναι μια οριακή εικόνα, είναι το τρίγωνο του Sierpinski και για να την δούμε στην δυναμική ανάπτυξη της είναι απαραίτητος ένας Η/Υ. Είναι σημαντικό να τονιστεί σε αυτή τη φάση, η έννοια του βρόχου (loop), που δίνει στον υπολογιστή την εντολή να συνεχίζει την ίδια διαδικασία όσες φορές του πούμε. Η σχηματική παράσταση του βρόχου καθώς και η περιγραφή του αλγορίθμου που βοηθά στην κατασκευή του αντίστοιχου προγράμματος στον υπολογιστή είναι :



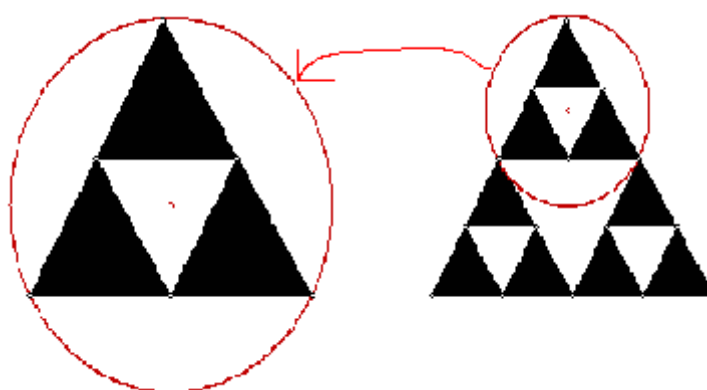
Αλγόριθμος:

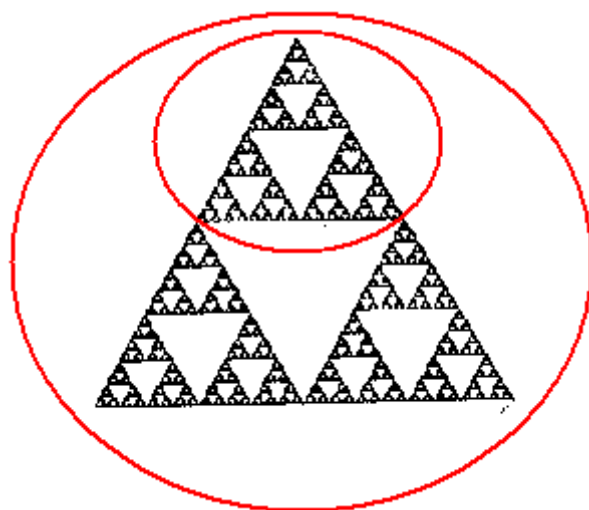
1. Αρχισε με το ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1

2. Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο βρες τα μέσα των πλευρών του και ενώσέ τα.
3. Αφαίρεσε το μεσαίο τρίγωνο.
1. Πήγαινε στο βήμα #2.



Η **οριακή εικόνα** του τριγώνου αυτού έχει την χαρακτηριστική ιδιότητα της αυτοομοιότητας, δηλαδή η εικόνα αυτή μπορεί να αποσυντεθεί σε κομμάτια που το καθένα τους είναι όμοιο με ολόκληρη την εικόνα. Πράγματι, στα πρώτα βήματα δημιουργίας του τριγώνου, προκύπτει σχήμα που αποτελείται από τρία ίσα μέρη, που το καθένα τους είναι όμοιο μόνο με το σχήμα του προηγούμενου βήματος (εικόνα 1). Συνεχίζοντας την διαδικασία στο άπειρο, κατασκευάζεται η οριακή εικόνα (limit image), που επίσης αποτελείται από τρία ίσα μέρη, που το καθένα τους είναι όμοιο με το σχήμα του προηγούμενου βήματος αλλά τώρα το κάθε μέρος είναι όμοιο και με ολόκληρη την εικόνα (εικόνα 2).





Είναι ενδιαφέρον ότι, πηγαίνοντας αντίστροφα, εξετάζοντας δηλ. την αυτοόμοια δομή που εμφανίζει μια τέτοια οριακή εικόνα, είναι πιθανό να μπορέσουμε να ανακαλύψουμε την επαναληπτική διαδικασία που την έχει δημιουργήσει.

Το τρίγωνο του Sierpinski , όπως και όλα τα Φράκταλς, μας βοηθά και στην εξερεύνηση του απείρου αφού είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για την εισαγωγή των εννοιών του ορίου, του φραγμένου, και της κλασματικής διάστασης. Πράγματι, αφαιρώντας συνεχώς το κεντρικό τρίγωνο, παίρνουμε ένα σύνολο στο επίπεδο, το οποίο περιέχει τις πλευρές όλων των τριγώνων που συνεχώς αφαιρούνται. Το σχήμα που προκύπτει θα εξερευνηθεί ως προς την περίμετρο και το εμβαδόν του και συγκεκριμένα θα αποδειχτεί ότι έχει άπειρη περίμετρο και μηδενικό εμβαδόν.

Βήμα No.	1	2	3	4		v	
Μέρος του εμβαδού που απομένει	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16} = (\frac{3}{4})^2$	$\frac{27}{64} = (\frac{3}{4})^3$	$\frac{81}{256} = (\frac{3}{4})^4$		$(\frac{3}{4})^v$	
Περίμετρος	$3 \cdot \frac{3}{2}$	$3 \cdot (\frac{3}{2})^2$	$3 \cdot (\frac{3}{2})^3$	$3 \cdot (\frac{3}{2})^4$		$3 \cdot (\frac{3}{2})^v$	

Επομένως το τρίγωνο του Sierpinski δεν είναι μια επιφάνεια, και βέβαια δεν είναι ένα σύνολο σημείων, αφού περιέχει πλευρές τριγώνων. Καλό είναι να

θέσουμε στα παιδιά το ερώτημα αν είναι μια γραμμή, όπως αυτές που έχουν μάθει. Να τονιστεί ότι μπορούμε βέβαια να σχεδιάσουμε ένα μέρος του αποτελούμενο από γραμμές, αρκεί να είναι ένα πεπερασμένο μέρος του. Όμως εδώ έχουμε πλευρές άπειρων τριγώνων που σχηματίζονται συνεχώς μέσα σε τρίγωνα που κι αυτά είναι μέσα σε άλλα τρίγωνα κλπ.....και αυτή η απειρία των τριγώνων και των πλευρών τους μας εμποδίζει να αποφασίσουμε αν είναι τελικά γραμμή αυτό που προκύπτει. Σε αυτό το σημείο μπορούμε να συζητήσουμε για το τι είναι διάσταση και για την αναγκαιότητα εισαγωγής κλασματικών διαστάσεων και τη σύνδεσή τους με τον λόγο ομοιότητας.

Στόχοι:

- Η κατανόηση της έννοιας της αυτοομοιότητας σαν χαρακτηριστικό μιας οριακής εικόνας που δημιουργείται από το αποτέλεσμα μιας διαδικασίας άπειρων επαναλήψεων. (Αν κριθεί σκόπιμο, μπορεί αρχικά να συζητηθεί η έννοια της ομοιότητας και του λόγου ομοιότητας σαν κλίμακας μεγέθυνσης ή σμίκρυνσης). Να τονιστεί ότι Φράκταλ ονομάζουμε την οριακή εικόνα που μπορούμε να «δούμε» μόνο στην οθόνη ενός ΗΥ
- Η δυνατότητας εύρεσης του επαναληπτικού κανόνα που δημιουργεί ένα Φράκταλ, από την προσεκτική μελέτη της αυτοόμοιας δομής του.
- Η εισαγωγή σε ένα σύστημα διευθύνσεων με την βοήθεια των υποτριγώνων που σχηματίζονται στο τριγ. του Sierpinski.
- Η κατάκτηση μιας βαθύτερης κατανόησης της έννοιας του ορίου με την εξερεύνηση της περιμέτρου και του εμβαδού του τριγ. του Sierpinski.
- Η κατανόηση της αναγκαιότητας εισαγωγής κλασματικών διαστάσεων.
- Σύνδεση μαθηματικών, φύσης και τέχνης και κατανόησης της ανατροφοδοτικής τελικά σχέσης που υπάρχει σε όλα τα πεδία της ανθρώπινης δημιουργίας, με χαρακτηριστικό παράδειγμα τα δυναμικά συστήματα και τα Φράκταλς, που την μελέτη τους σε βάθος την έκανε δυνατή η τεράστια ανάπτυξη της τεχνολογίας.

Υλικά που θα μοιραστούν στους μαθητές:

- 1). Ένα φύλλο Α₄ με σημειωμένες κουκίδες στο οποίο θα είναι σχεδιασμένο ένα ισόπλευρο τρίγωνο.
- 2). Ένα φύλλο με τα τρία πρώτα βήματα σχηματισμού του τριγώνου.

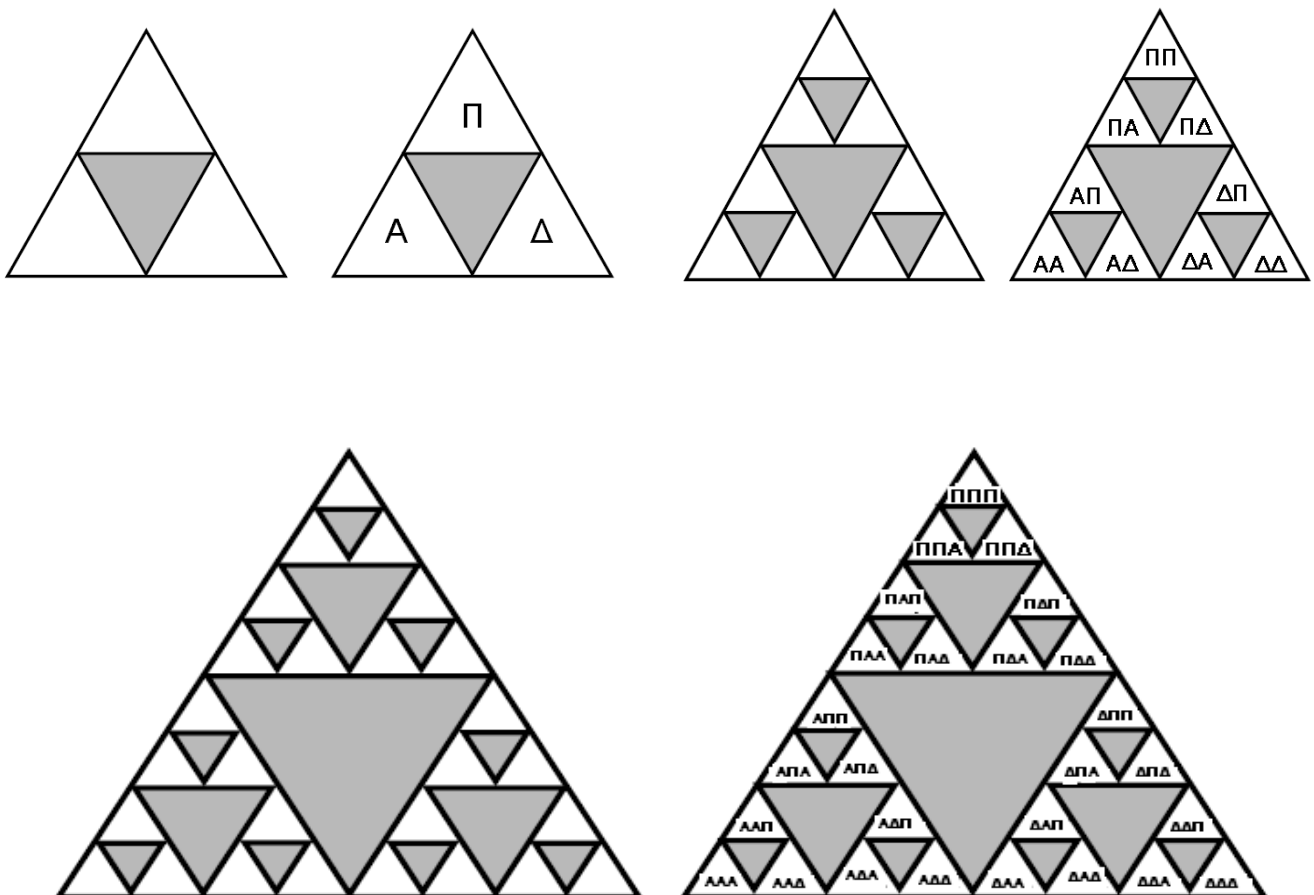
- 3). Ένα φύλλο με την οριακή εικόνα, το Φράκταλ του Sierpinski.
- 4). Ένα φύλλο με διάφορα Φράκταλς για την εύρεση του επαναληπτικού κανόνα.
- 5). Ένας πίνακας στον οποίο θα συμπληρώσουν τις τιμές της περιμέτρου και του εμβαδού των πρώτων βημάτων, με στόχο την εύρεση των τύπων που προκύπτουν στο n -οστό βήμα.
- 6). Ένα φύλλο με ερωτήσεις που θα διερευνά την έννοια της διάστασης και θα τους εισάγει με κατάλληλες ερωτήσεις στην έννοια της κλασματικής διάστασης.
- 7). Προτείνεται η συνέχεια του μαθήματος να γίνει στην αίθουσα των Η/Υ του σχολείου για την κατασκευή του τριγώνου του Sierpinski (με το λογισμικό Sketchpad) καθώς και τη χρήση του διαδικτύου για να γνωρίσουν το διάσημο ζωγράφο Escher (<http://mcescher.com/Gallery/recogn-bmp>) αλλά και για να παίξουν με μια δραστηριότητα–παιχνίδι (<http://math.bu.edu/DYSYS/applets/chaos-game.html>).
- 8) Επίσης μια δραστηριότητα που μπορεί να τους δοθεί είναι η εύρεση στη φύση μορφών με προσεγγιστική δομή Φράκταλ ώστε να αντιληφθούν ότι κάθε τι που βλέπουμε γύρω μας είναι δημιούργημα φυσικών δυναμικών συστημάτων και έχει δημιουργηθεί από διαδικασίες συνεχούς ανατροφοδότησης.

Διαδικασία:

Μοιράζουμε το υπ' αριθμό (1) φύλλο και τους ζητάμε να κάνουν τα πρώτα 3 βήματα της διαδικασίας κατασκευής του τριγώνου κρατώντας σημειώσεις για τις μεταβολές της πλευράς και του εμβαδού του. Οι μαθητές δουλεύουν ανά δύο για περίπου 5'. Κατόπιν μοιράζουμε τα φύλλα (2) και (3) ώστε οι μαθητές να διαπιστώσουν ότι μόνο η οριακή εικόνα του τριγώνου (φύλλο 3) έχει την χαρακτηριστική ιδιότητα της αυτοομοιότητας, δηλ. η εικόνα αυτή μπορεί να αποσυντεθεί σε κομμάτια που το καθένα τους είναι όμοιο με ολόκληρη την εικόνα. (Στα πρώτα βήματα δημιουργίας του τριγώνου (φύλλο 2) προκύπτει σχήμα που αποτελείται από τρία ίσα μέρη, που το καθένα τους είναι όμοιο μόνο με το σχήμα του προηγούμενου βήματος). Κατόπιν μοιράζουμε το φύλλο (4) που έχει τα διάσημα Φράκταλς: Την σκόνη του Cantor, την καμπύλη του Koch και το χαλί του Sierpinski και τους ζητάμε να βρουν το αρχικό σχήμα και τον επαναληπτικό κανόνα δημιουργίας του κάθε

Φράκταλ. Καλό είναι να τονιστεί ότι κατ' αυτόν τον τρόπο μπορούμε να αποθηκεύσουμε σε έναν Η/Υ πολύ μεγάλη πληροφορία σε πολύ μικρό χώρο, αφού πολλά γραφικά ηλεκτρονικών παιχνιδιών καθώς και κινηματογραφικών εικόνων είναι εικόνες Φράκταλ και μπορούμε να τις αποθηκεύσουμε χρησιμοποιώντας μια απλή αρχική εικόνα και έναν επαναληπτικό κανόνα.

Κατόπιν επιστρέφουμε στο φύλλο (2) με τα τρία πρώτα βήματα κατασκευής του τριγώνου για να ανακαλύψουν πώς με κατάλληλες ετικέτες λειτουργεί ένα ακριβές σύστημα εντοπισμού θέσης (διεύθυνσης) σε μια ευρύτερη περιοχή. Οι παρακάτω εικόνες περιγράφουν αυτό το σύστημα ετικετών, όπου με Π συμβολίζουμε το πάνω μέρος, με Δ το δεξί και με Α το αριστερό¹⁴².



¹⁴²Η πρόταση αυτή πάρθηκε από τη διεύθυνση:

http://www.math.fau.edu/Teacher/Teacher_homepage.htm#Literature

Σειρά τώρα έχει η εξερεύνηση της περιμέτρου και του εμβαδού του τριγώνου του Sierpinski. Μοιράζουμε σε κάθε μαθητή το φύλλο (5) που έχει έναν πίνακα στον οποίο θα συμπληρώσουν τις τιμές της περιμέτρου και του εμβαδού των πρώτων βημάτων, με στόχο την εύρεση των τύπων που προκύπτουν στο n -οστό βήμα. Επίσης ο πίνακας έχει και μια στήλη με τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων που προκύπτουν κάθε τόσο, σε σχέση με το αρχικό τρίγωνο. Το υπ' αριθμό (1) φύλλο με τις πρώτες σημειώσεις που κράτησαν θα τους βοηθήσει. Εδώ, καλό είναι να παρατηρηθεί η γνωστή πρόταση ότι ο λόγος των περιμέτρων δύο ομοίων τριγώνων ισούται με λ ενώ ο λόγος των εμβαδών τους με λ^2 .

Ο συμπληρωμένος πίνακας θα είναι ο εξής:

Βήμα	Αριθμός τριγώνων που μένουν	Λόγος ομοιότητας λ αυτών των τριγώνων σε σχέση με το αρχικό τρίγωνο	Μήκος της πλευράς τους	Περίμετρος τους	Εμβαδόν ενός από αυτά τα τρίγωνα	Συνολικό εμβαδόν του σχήματος που προκύπτει
0	1	$\lambda=1$	α	$3.\alpha$	A	A
1	3	$\lambda= \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}.\alpha$	$3.(3. \frac{1}{2} \alpha)=$ $=3. \frac{3}{2}.\alpha$	$\frac{1}{4}.A$	$3(\frac{1}{4}).A$
2	$9=3^2$	$\lambda=(\frac{1}{2})^2$	$(\frac{1}{2})^2.\alpha$	$3. (\frac{3}{2})^2.\alpha$	$(\frac{1}{4})^2.A$	$(\frac{3}{4})^2.A$
3	$27=3^3$	$\lambda=(\frac{1}{2})^3$	$(\frac{1}{2})^3.\alpha$	$3. (\frac{3}{2})^3.\alpha$	$(\frac{1}{4})^3.A$	$(\frac{3}{4})^3.A$
4	$81=3^4$	$\lambda=(\frac{1}{2})^4$	$(\frac{1}{2})^4.\alpha$	$3. (\frac{3}{2})^4.\alpha$	$(\frac{1}{4})^4.A$	$(\frac{3}{4})^4.A$
....	...	...	...	...	...	...

v	3^v	$\lambda = (\frac{1}{2})^v$	$(\frac{1}{2})^v \cdot \alpha$	$3 \cdot (\frac{3}{2})^v \cdot \alpha$	$(\frac{1}{4})^v \cdot A$	$(\frac{3}{4})^v \cdot A$
...						

Οι μαθητές πρέπει τώρα να παρατηρήσουν ότι αυτό το περίεργο σχήμα, το τρίγωνο του Sierpinski, έχει μηδενικό εμβαδόν και άπειρη περίμετρο! Είναι λοιπόν πιο περίπλοκο από αυτά που συνηθίσαμε να αντιμετωπίζουμε στη κλασική Γεωμετρία.

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να δούμε και πώς αντιμετωπίζουν οι μαθητές το θέμα της διάστασης. Θεωρούν ότι είναι ο αριθμός των ανεξάρτητων παραμέτρων που χρειαζόμαστε για να περιγράψουμε τη θέση ενός σημείου του αντικειμένου (με τη βοήθεια αξόνων) ή το βλέπουν από τη σκοπιά των μετρήσεων, δηλ. ότι η διάσταση είναι ο αριθμός των μετρήσεων που χρειάζονται για να πούμε πόσο χώρο καταλαμβάνει ένα αντικείμενο γύρω μας (π.χ. για να μετρήσουμε την περιοχή που καταλαμβάνει ένα τρίγωνο χρειαζόμαστε δύο μετρήσεις αποστάσεων, της βάσης και του ύψους ενώ για να μετρήσουμε τον όγκο μιας πυραμίδας, χρειαζόμαστε και μια επιπλέον μέτρηση, αυτήν του ύψους της).

Θα τους τεθεί τώρα το ερώτημα του ποια νομίζουν ότι είναι η διάσταση αυτού του συνόλου αφού φαίνεται καθαρά ότι δεν μπορεί να έχει διάσταση δύο μιας και δεν του έχει απομείνει καθόλου εμβαδόν αλλά ούτε και διάσταση ένα, σαν να ήταν απλά μια συνηθισμένη γραμμή. Αυτήν την καινούρια «ανάγνωση» της έννοιας της διάστασης μπορούν να τη συλλάβουν διαισθητικά και κάπως έτσι: μια οδοντωτή γραμμή «πιάνει περισσότερο χώρο» πάνω στο επίπεδο από μία που είναι πιο ομαλή. Όσο περισσότερο μια γραμμή συστρέφεται και κάμπτεται, τόσο περισσότερο χώρο πιάνει πάνω στο επίπεδο. Επομένως, η διάστασή της πλησιάζει όλο και πιο κοντά στο 2. Όμοια, ένα τσαλακωμένο κομμάτι χαρτί πιάνει περισσότερο χώρο από ένα επίπεδο χαρτί, αλλά λιγότερο χώρο από ό,τι μια σφαίρα. Άρα, όσο πιο πολύ τσαλακωμένο είναι το χαρτί, τόσο πιο κοντά στο 3 είναι η διάστασή του. Επομένως τίθεται το θέμα ορισμού μιας άλλης διάστασης που θα μπορεί να μετρά το πόσο χώρο καταλαμβάνουν αυτά τα περίεργα σχήματα (Φράκταλς), που προκύπτουν από την εφαρμογή απείρων επαναλήψεων μιας διαδικασίας, το βαθμό λεπτομέρειας τελικά του

αντικείμενου. Πράγματι, υπάρχει τέτοια διάσταση. Βασίζεται στην έννοια της «ικανότητας» (box dimension ή capacity dimension) δηλ. στο πώς ένα αντικείμενο γεμίζει το χώρο και προτάθηκε αρχικά από τον Ρώσο μαθηματικό Andrei Kolmogorov (1903-1987). Είναι γνωστή και σαν εντροπία του Kolmogorov, διάσταση εντροπίας, διάσταση πληροφορίας, λογαριθμική πυκνότητα, διάσταση Minkowski. Αυτή η διάσταση αξιοποιήθηκε πολύ αργότερα, το 1975, από τον Mandelbrot στο βιβλίο του: *Η Μορφοκλασματική Γεωμετρία της Φύσης* και είναι πολύ εύχρηστη. Χρησιμοποιώντας αυτήν την διάσταση, όχι μόνο οι μαθηματικοί αλλά και οι φυσικοί, οικονομολόγοι, αστρονόμοι, βιολόγοι, ανατομολόγοι, ηλεκτρονικοί μηχανικοί και γεωγράφοι μπορούν και μετρούν αναρίθμητες διαφορετικές μορφές, που προηγουμένως ήταν αδύνατο να μετρηθούν, από βουνά, σύννεφα, δέντρα και λουλούδια ως τους γαλαξίες και από τη ροή των ποταμών και τους τρόπους θραύσης των μετάλλων ως τις πτυχώσεις του ανθρώπινου εγκεφάλου.

Μετά από την εισαγωγική συζήτηση πάνω στο θέμα των διαστάσεων, θα μοιραστεί το φύλλο (6). Μέσα από τα γνωστά ευκλείδεια σχήματα θα παρατηρήσουν ότι υπάρχει μια αριθμητική σχέση που συνδέει μέγεθος, διάσταση και λόγο ομοιότητας και που είναι η : $N = \lambda^D$, όπου N ο αριθμός των ίσων κομματιών στα οποία μπορεί να «σπάσει» το σχήμα μας, λ ο συντελεστής ομοιότητας του κομματιού ως προς το όλο σχήμα (δηλ. ο αριθμός με τον οποίο πρέπει να πολλαπλασιαστεί το ένα κομμάτι για να πάρουμε το ολόκληρο σχήμα) και D η ζητούμενη φράκταλ διάσταση.

Η παραπάνω ισότητα παίρνει και τη μορφή:

$$N = \lambda^D, \quad D = \frac{\log N}{\log \lambda} = \frac{\log(\text{αριθμός κομματιών})}{\log(\text{λόγος ομοιότητας κομματιού προς το αρχικό})}$$

γι' αυτό ονομάζεται και διάσταση log-log.

Η διάσταση του τριγώνου του Sierpinski είναι ίση με $\frac{\log 3}{\log 2} = 1,585$ και αυτό βέβαια ήταν αναμενόμενο. (Παρατηρήστε ότι σε όποιο βήμα και να τη λογαριάζαμε θα έβγαινε το ίδιο αφού:

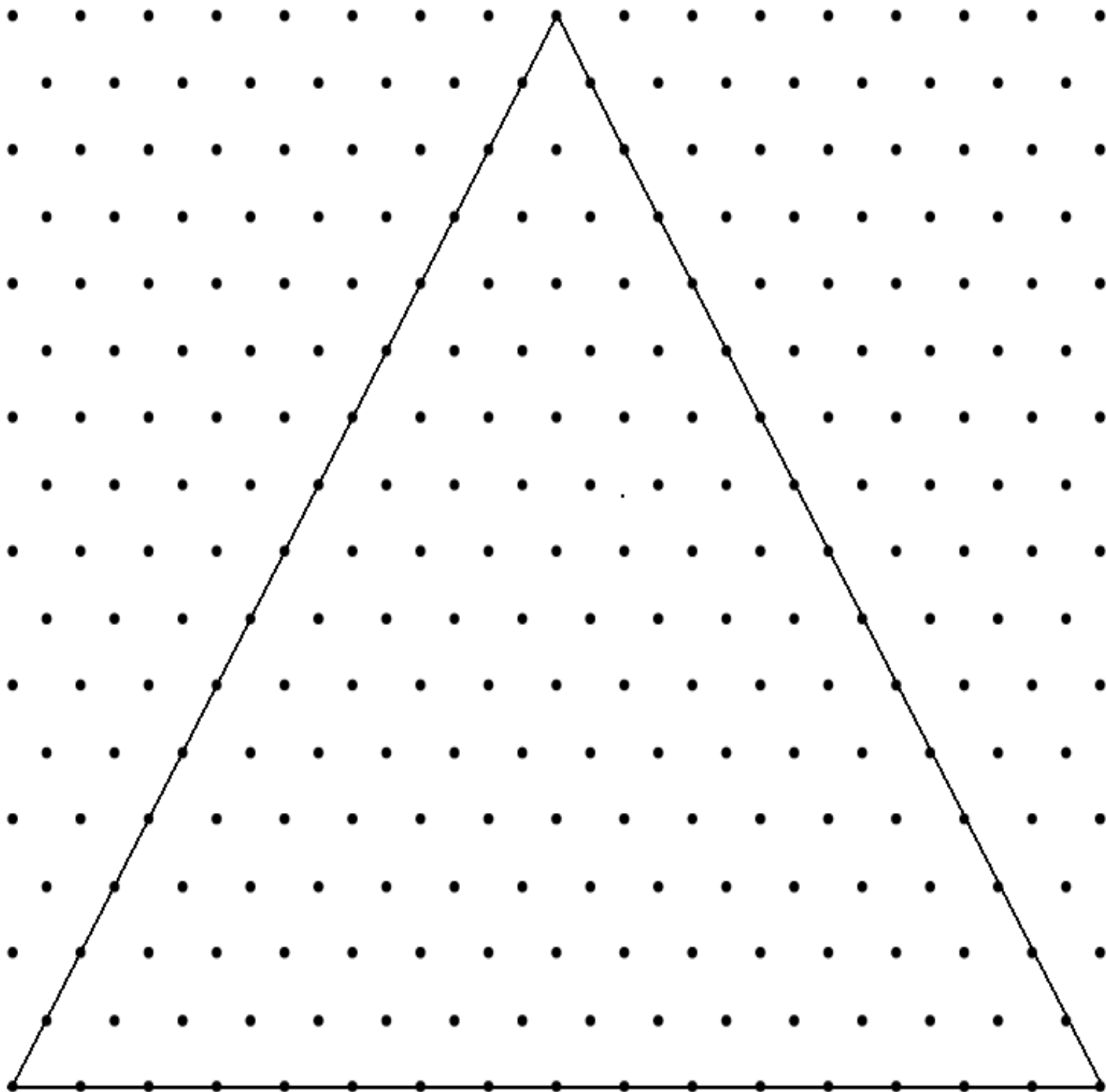
$$D = (\log 3^v) / (\log 2^v) = (v \cdot \log 3) / (v \cdot \log 2) = \frac{\log 3}{\log 2}$$

ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

- Φύλλο 1: Κατασκευή του τριγ. του Sierpinski
- Φύλλο 2: Τα τρία πρώτα βήματα σχηματισμού του τριγώνου.
- Φύλλο 3: Το Φράκταλ του Sierpinski
- Φύλλο 4: Διάφορα γνωστά Φράκταλς για την εύρεση του επαναληπτικού κανόνα.
- Φύλλο 5: Πίνακας συμπλήρωσης τιμών της περιμέτρου και του εμβαδού στα βήματα $0, 1, 2, 3, 4, \dots, n..$
- Φύλλο 6: Διαστάσεις

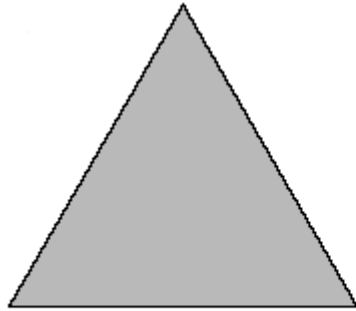
ΦΥΛΛΟ 1

Κατασκευή του τριγ. του Sierpinski

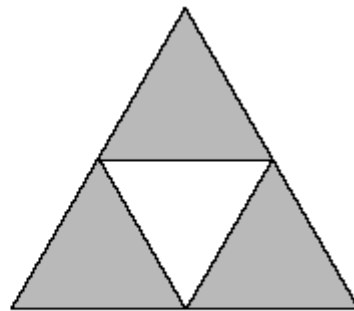


ΦΥΛΛΟ 2

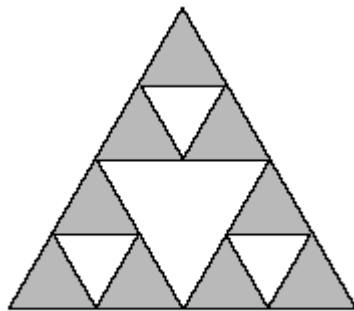
Τα τρία πρώτα βήματα του τριγ. του Sierpinski



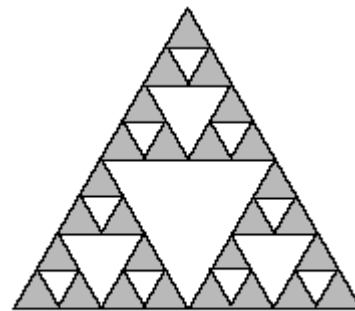
Βήμα 0



Βήμα 1



Βήμα 2



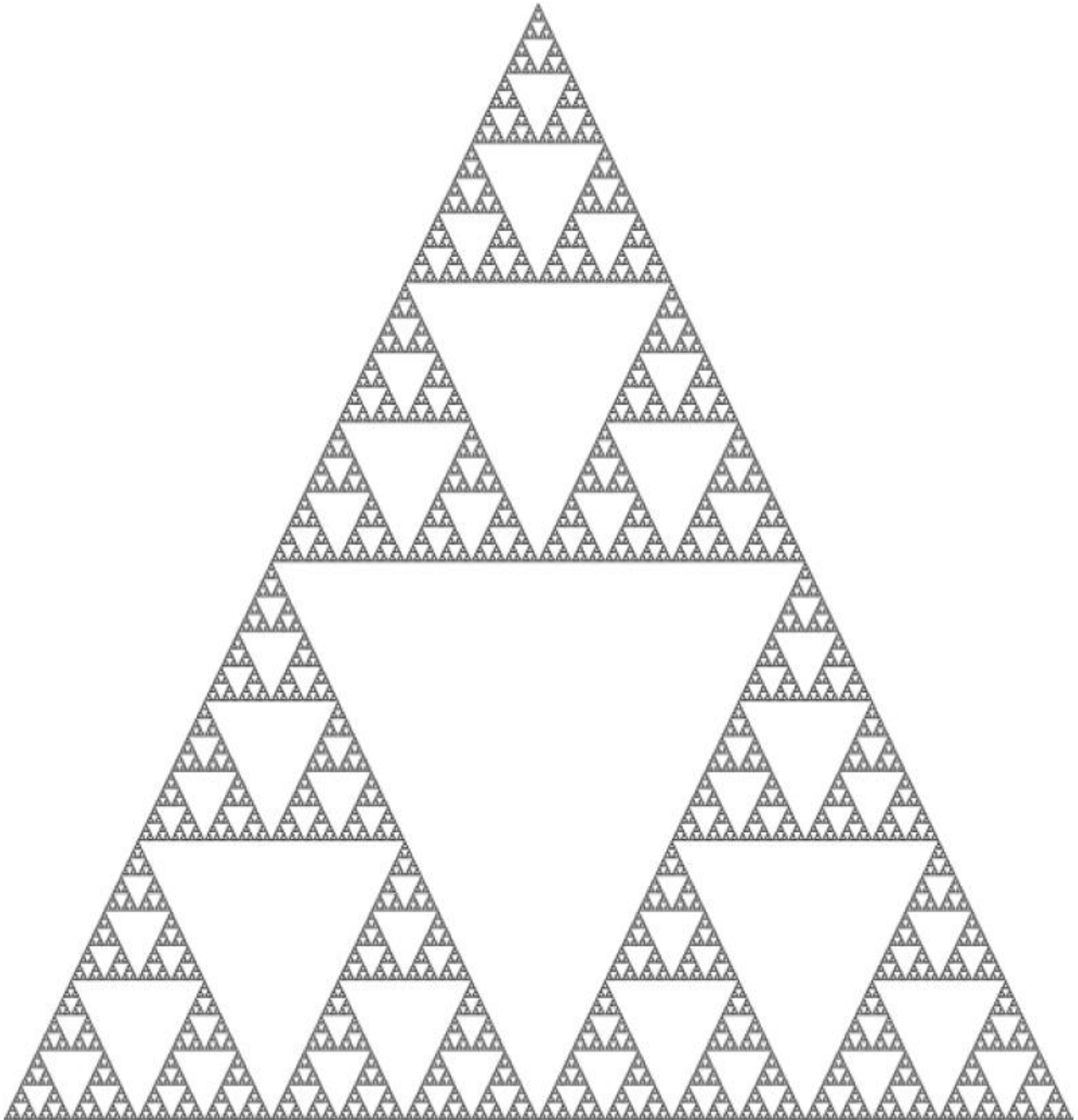
Βήμα 3

- Παρατηρήστε σε κάθε βήμα τον αριθμό των τριγώνων που παραμένουν (τα άσπρα τρίγωνα αφαιρούνται) και την μεταβολή της πλευράς και του εμβαδού τους σε σχέση με το αρχικό τρίγωνο του βήματος 0.
- Παρατηρήστε ότι το σχήμα που προκύπτει σε κάθε βήμα αποτελείται από τρία ίσα μέρη, που το καθένα τους είναι όμοιο μόνο με το σχήμα του προηγούμενου βήματος.

ΦΥΛΛΟ 3

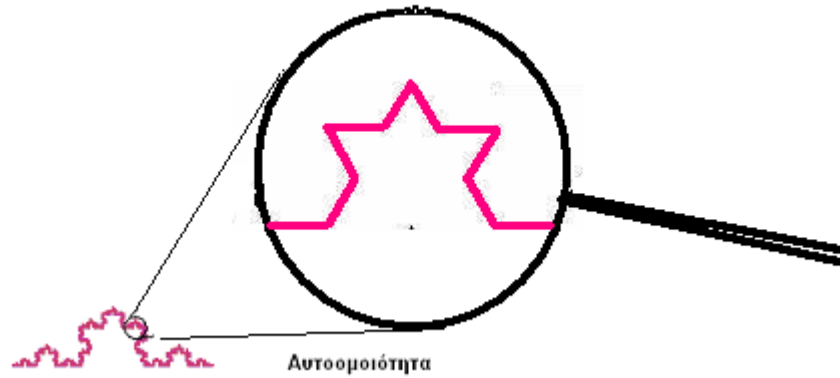
Η οριακή εικόνα

Το φράκταλ : ΤΡΙΓΩΝΟ ΤΟΥ SIERPINSKI

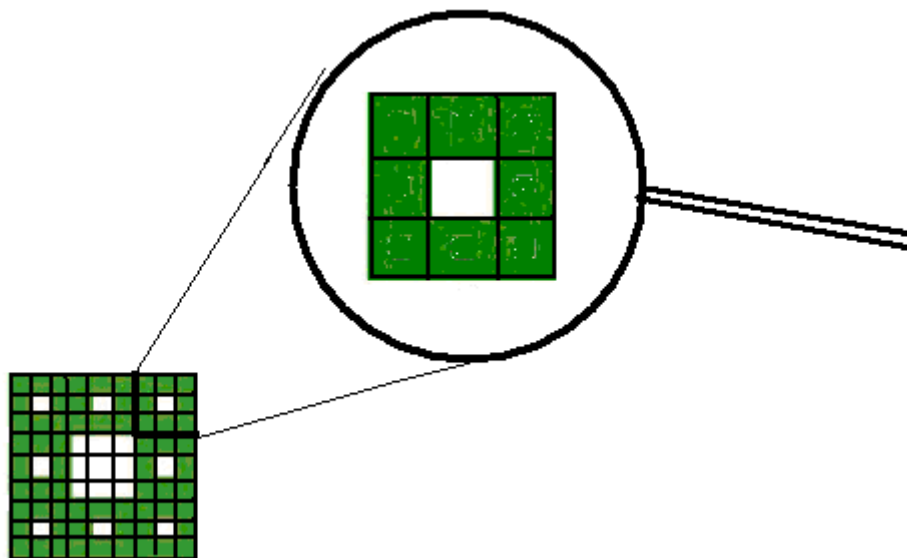


ΦΥΛΛΟ 4

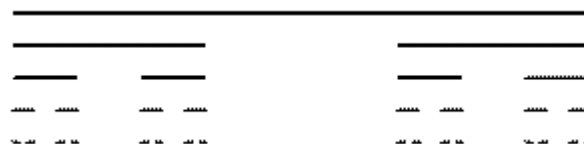
Γνωστά Φράκταλς



Η καμπύλη του Koch



Το χαλί του Sierpinski



Η σκόνη του Cantor

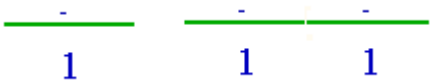
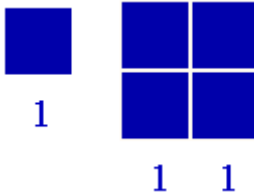
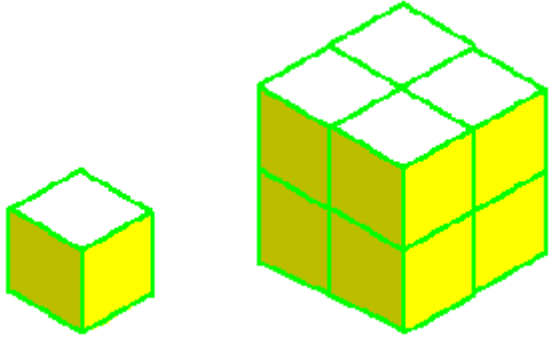
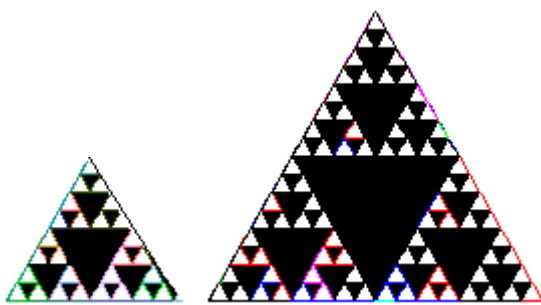
ΦΥΛΛΟ 5

Να συμπληρώσετε τον πίνακα με την βοήθεια και του Φύλλου 2

Βήμα	Αριθμός τριγώνων που μένουν	Λόγος ομοιότητας λ αυτών των τριγώνων σε σχέση με το αρχικό τρίγωνο	Μήκος της πλευράς τους	Περίμετρος τους	Εμβαδόν ενός από αυτά τα τρίγωνα	Συνολικό εμβαδόν του σχήματος που προκύπτει
0	1	$\lambda=1$	α	$3.\alpha$	A	A
1						
2						
3						
4						
....	...	...	...	...	...	...
v						
...						

ΦΥΛΛΟ 6

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΣΤΑΣΗ (BOX DIMENSION)

Παίρνουμε ένα ευθ. τμήμα και το διπλασιάζουμε. Παρατηρούμε ότι διπλασιάζοντας το μήκος προκύπτει ένα ευθ. τμήμα, όμοιο προς το αρχικό, με λόγο ομοιότητας $\lambda=2$ και το οποίο αποτελείται από 2 αντίγραφα του αρχικού (2 κομμάτια).	
Παίρνουμε ένα τετράγωνο. Διπλασιάζοντας τις πλευρές του, προκύπτει όμοιο σχήμα (τετράγωνο) με $\lambda=2$, που αποτελείται από 4 αντίγραφα του αρχικού (4 κομμάτια).	
Παίρνουμε έναν κύβο και διπλασιάζουμε τις ακμές του. Προκύπτει κύβος με $\lambda=2$, που αποτελείται από 8 αντίγραφα του αρχικού (8 κομμάτια).	
Παίρνουμε ένα τρίγωνο του Sierpinski και διπλασιάζουμε τις πλευρές του. Πόσα κομμάτια του αρχικού έχει το καινούριο τρίγωνο; (ή παίρνουμε ένα τρίγωνο Sierpinski και βλέπουμε πόσα κομμάτια του προηγούμενου βήματος περιέχει. Τα τρίγωνα δύο διαδοχικών βημάτων έχουν $\lambda=2$).	

Συμπλήρωσε τώρα τον πίνακα:

Σχήμα	Διάσταση D	Λόγος ομοιότητας λ	Αριθμός κομματιών N
Ευθ. τμήμα	1	2	$2=2^1$
Τετράγωνο	2	2	$4=2^2$
Κύβος	3	2	$8=2^3$
Γενικά	d	2	$N=.....$
Τρίγωνο του Sierpinski .	;	2	$... = ...$

B. Ερευνητικά εργαλεία

B1. Βασικές ερωτήσεις της ημιδομημένης συνέντευξης προς τους καθηγητές.

B1. 1. Βασικές ερωτήσεις της ημιδομημένης συνέντευξης προς τους καθηγητές πριν τη διενέργεια της διδασκαλίας¹⁴³

1. Πώς κάνεις συνήθως το μάθημα;
2. Ποιος είναι ο γενικός διδακτικός στόχος σου;
3. Σε τι μας χρειάζονται τα μαθηματικά;
4. Τα Μαθηματικά εκφράζουν μια αναλλοίωτη, συγκεκριμένη και αδιαμφισβήτητη «αλήθεια» ή περνούν και περιόδους σύγχυσης;
5. Μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι μια πολιτισμική κατασκευή που επηρεάζεται και επηρεάζει άλλες επιστήμες;
6. Ασχολείσαι με τις λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών σου; Προσπαθείς να βρεις γιατί δεν απάντησαν σωστά ή συμπεραίνεις ότι είναι αποτέλεσμα της μη επαρκούς μελέτης;
7. Κατά τη γνώμη σου οι μαθητές χωρίζονται στα δύο; Σε αυτούς που τους κόβει και σε αυτούς που δεν τους κόβει ή ότι κάθε μαθητής μπορεί να είναι δημιουργικός μέσα στο κατάλληλο περιβάλλον;
8. Όταν ένας μαθητής απαντά σωστά του ζητάς να στηρίξει την απάντησή του κάνοντάς τον να νοιώθει και άνετα;

¹⁴³ Οι ερωτήσεις της συνέντευξης βασίζονται σε δύο πανελλήνιες έρευνες με αντικείμενο τις πεπιοθήσεις των καθηγητών μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η πρώτη είναι των Κασιμάτη- Γιαλαμά με φορέα το Τμήμα Ερευνών του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου (Κασιμάτη, Α., Γιαλαμάς Β. (1998). Τα «πιστεύω» (beliefs) των καθηγητών για τη μάθηση και διδασκαλία των Μαθηματικών: Μια πρώτη ερευνητική προσέγγιση. Π.Ι. Τμήμα Ερευνών. 15^ο Πανελλήνιο Συνέδριο της ΕΜΕ, Χίος 1998, σελ. 319) και η δεύτερη του Μπαρκάτσα, Ν. (Μπαρκάτσας, Ν. (2003). Πεπιοθήσεις Ελλήνων καθηγητών και συμβούλων των μαθηματικών σχετικά με τα μαθηματικά, τη διδακτικομαθησιακή διαδικασία και την αξιολόγηση: Βιοδεδομένα που τις επηρεάζουν. Θέματα στην Εκπαίδευση, τόμος 4, τεύχος 2-3, σελ. 227-252, Αθήνα: Leader Books. Αυτή η έρευνα διεξήχθη τη σχολ. χρονιά 1999-2000 στο πλαίσιο του ΕΠΕΤ II με κύρια χρηματοδότηση από την Ευρωπαϊκή Ένωση).

9. Νομίζεις ότι η μαθησιακή διαδικασία πρέπει βασικά να στηρίζεται στην απομνημόνευση και ανάκληση μαθηματικών πληροφοριών;
10. Η δουλειά του καθηγητή είναι να μεταδίδει τις γνώσεις και να ελέγχει αν οι μαθητές του την αφομοίωσαν;
11. Θα αισθανόσουν άσχημα αν ένας μαθητής σου εύρισκε καλύτερη λύση από σένα σε ένα πρόβλημα;
12. Για να κάνεις σωστό μάθημα δεν πρέπει να ακούγεται μέσα στην τάξη ο παραμικρός ψίθυρος;
13. Θεωρείς ότι η συνεργασία των μαθητών σε ένα πρόβλημα είναι ένας αποτελεσματικός τρόπος να μάθουν μαθηματικά;
14. Δίνεις σημασία σε κάτι που προτείνει ένας μαθητής ή το παραβλέπεις για να μην χάνεις χρόνο;
15. Είσαι ευχαριστημένος από την εκπαιδευτική διαδικασία; Τι θα διόρθωνες αν μπορούσες;

Οι παραπάνω ερωτήσεις συγκροτούν τις εξής ομάδες θεμάτων:

- α) Οι ερωτήσεις 2,3,4,5 την Επιλογή του Περιεχομένου των Μαθηματικών (είναι ανοικτοί σε σύγχρονα θέματα;)
- β) Οι ερωτήσεις 6, 9,10,11,13 την Επιλογή του Τρόπου Διδασκαλίας (μετωπική δασκαλοκεντρική ή συνεργατική;)
- γ) Οι ερωτήσεις 7, 8, 12,14 την Επιλογή των Διδακτικών Μέσων (εύρεση κατάλληλου περιβάλλοντος).

B1.2. Βασικές ερωτήσεις της ημιδομημένης συνέντευξης προς τους καθηγητές μετά τη διενέργεια της διδασκαλίας.

- 1)Πως νομίζεις ότι φάνηκε το μάθημα στους μαθητές;
- 2)Δίδαξες με πληρότητα το διδακτικό αντικείμενο και αν όχι με ποια έννοια δυσκολεύτηκαν;
- 3)Πιστεύεις ότι κατάφερες να αντιληφτούν την αλληλεπίδραση που υπάρχει ανάμεσα στα επιστημονικά πεδία, την Φύση και την τέχνη;
- 4)Άφηνες τους μαθητές να διερευνήσουν το πρόβλημα ή επενέβαινες ώστε να προλάβεις να πεις όλα όσα ήθελες;

- 5) Σε ποιο σημείο δυσκολεύτηκαν οι μαθητές; Έχεις να προτείνεις κάτι που θα βελτιώσει το μάθημα; (π.χ. αλλαγή στον τρόπο λεκτικής διατύπωσης της ερώτησης ή συμπληρωματικές ερωτήσεις;)
- 6) Δούλεψε καλά η δραστηριότητα με το Sketchpad; (για όσους την υποστήριξαν)
- 7) Πιστεύεις ότι τελικά είναι κατάλληλο αυτό το διδακτικό αντικείμενο για την άρση των στεγανών ανάμεσα στην άλγεβρα και γεωμετρία;
- 8) Αντιμετώπισαν με ενδιαφέρον οι μαθητές αυτήν την αλλαγή στη προσέγγιση αυτού του θεωρήματος και της αντίστοιχης άσκησης του βιβλίου;
- 9) Αισθάνθηκες άβολα μέσα στην τάξη; Αν ναι, γιατί;
- 10) Εκνευρίστηκες με τη συμπεριφορά των μαθητών; Σε ενοχλούσε η φασαρία;
- 11) Κινητοποίησε τους μαθητές αυτή η διαφορετική παιδαγωγική προσέγγιση; Όλους; Ποιους περισσότερο; Γιατί;
- 12) Θέλεις να συμπληρώσεις κάτι ή να τοποθετηθείς σε κάτι;

B2. Οι ερωτήσεις που δόθηκαν στους μαθητές μετά τη διδασκαλία.

- 1) Ποιες είναι οι εντυπώσεις σου από το μάθημα;
- 2) Τι έγινε στην ομάδα σου; Καταφέρατε να βρείτε τα σημεία νίκης; Πώς τα βρήκατε;
- 3) Τι συγκράτησες από το μάθημα για τη θεωρία του Χάους;
- 4) Τι σου προξένησε εντύπωση από το τρίγωνο του Sierpinski ;
- 5) Το τρίγωνο του Sierpinski είναι ένα Φράκταλ. Μπορείς να πεις με δικά σου λόγια τι είναι ένα Φράκταλ ή πώς μπορεί να προκύψει;
- 6) Μπορείς να αναφέρεις μερικά σχήματα που μοιάζουν με Φράκταλς και δεν ανήκουν στο χώρο των μαθηματικών;
- 7) Συμπληρώσατε τον πίνακα με τις περιμέτρους και τα εμβαδά; Αν ναι τι σου έκανε εντύπωση;
- 8) Σου άρεσε που δουλέψατε σαν ομάδα; Γράψε τι σκέφτεσαι γι' αυτόν τον τρόπο διδασκαλίας (αν σου άρεσε και γιατί ή διατύπωσε τις επιφυλάξεις σου).
- 9) Θα ήθελες να γίνουν και άλλα τέτοια μαθήματα;

B3. Κλείδες παρατήρησης

B3.1. Κλείδα παρατήρησης του καθηγητή από το συντονιστή.

Η παρακάτω λίστα βασίστηκε στην (προσαρμοσμένη από τον Μ. Βάμβουκα) κλείδα παρατήρησης της λεκτικής διδακτικής συμπεριφοράς των εκπαιδευτικών των Μ. D. Waimon H.J. Hermanowicz ¹⁴⁴

1.00 Οργάνωση της μαθησιακής διαδικασίας

Ο εκπαιδευτικός υποκινεί και διατηρεί τους μαθητές σε μια στάση που διευκολύνει τη μάθηση.

1.10 Ο εκπαιδευτικός ενεργοποιεί τους μαθητές και τους οδηγεί να αποδεχτούν τους διδακτικούς στόχους

1.11 Καθόρισε τους στόχους: αλλαγή της οπτικής γωνίας προσέγγισης - αξία της συλλογική δράσης και του ερευνητικού πνεύματος.

1.12 Τους κινητοποίησε θέτοντας με ελκυστικό τρόπο το πρόβλημα – παιχνίδι προκαλώντας τους να βρουν τη λύση.

1.13 Εξήγησε με σαφήνεια το πρόβλημα και το επανέλαβε όσες φορές χρειάστηκε χωρίς να εκνευριστεί.

1.20 Κρατάει στάση που διευκολύνει τη μάθηση.

1.21 Χώρισε τους μαθητές σε κατάλληλες ομάδες.

1.22 Ενθάρρυνε

1.23 Εμπόδισε, όταν χρειάστηκε, το μαθητή που πήγε να εκτρέψει την τάξη προς άλλη κατεύθυνση.

1.24 Αξιώνει, με τις κατάλληλες ερωτήσεις, τις παρεμβάσεις των ομάδων να γνωστοποιήσουν τα σημεία νίκης, ώστε να μπορεί να «τρέξει» η διαδικασία του μαθήματος.

1.25 Αισθανόταν άνετα με την ομαδοσυνεργατική διδασκαλία και δεν επενέβαινε απαντώντας ο ίδιος τις ερωτήσεις που έθετε.

2.00 Επεξεργασία των πληροφοριών

¹⁴⁴ Βάμβουκας, Μ. (2000). *Εισαγωγή στην Ψυχοπαιδαγωγική έρευνα και μεθοδολογία* (6^η έκδοση). Αθήνα: Γρηγόρης, σ. 206

Ο εκπαιδευτικός βοηθά τους μαθητές να κατακτήσουν τη γνώση και διδάξει με πληρότητα

2.10 Βοηθά την κατάκτηση της γνώσης

2.11 Συσχέτιζε τις διάφορες απαντήσεις των ομάδων.

2.12 Αξίωνε απ' όλες τις ομάδες να συμπληρώσουν ή να διορθώσουν μια απάντηση.

2.13 Έδινε τις απαραίτητες πληροφορίες χωρίς να δίνει ευθείες απαντήσεις (τη λύση)

2.20 Δίδαξε με πληρότητα

2.21 Οδήγησε προσεκτικά στην γενίκευση των σημείων που οδηγούν στη νίκη και τη δημιουργία του τριγ. του Sierpinski.

2.22 Εξήγησε με συνέπεια και σύνδεση την ορολογία : δυναμικό σύστημα, θεωρία του Χάους, H/Y, φράκταλ .

2.23 Δίδαξε με πληρότητα συνδέοντας τα Φράκταλς με τη φύση και την τέχνη.

B3.2. Κλείδα παρατήρησης των μαθητών κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας

1.00 Μαθηματικό περιεχόμενο

Οι μαθητές κατακτούν σταδιακά τους στόχους μαθηματικού περιεχομένου

1.10 Βρίσκουν τα σημεία νίκης

1.11 Εφαρμόζουν με επιτυχία τον κανόνα του παιχνιδιού μπαίνοντας στη λογική του βρόχου (α' ποιοτικός δείκτης).

1.12 Βγάζουν το συμπέρασμα ότι οποιοδήποτε σημείο πάνω σε πλευρά του τριγώνου, παραμένει στην πλευρά.

1.13 Βρίσκουν μόνοι τους ποια σημεία οδηγούν με την πρώτη πάνω στις πλευρές (β' ποιοτικός δείκτης). .

1.14 Κάνουν επαγωγική σκέψη βρίσκοντας όλα τα σημεία που κερδίζουν (γ' ποιοτικός δείκτης). ..

1.20 Εισάγονται στη θεωρία του Χάους

1.21 Διαπιστώνουν το σημαντικό ρόλο που παίζει η επιλογή του αρχικού σημείου.

1.22 Παρατηρούν ότι στις κορυφές η τελική κατάληξη είναι απρόβλεπτη.

1.30 Κατανοούν το τι είναι ένα Φράκταλ.

1.31 Διακρίνουν την αυτοομοιότητα (μη τυπικά μέχρι και την Α' Λυκείου) που εμφανίζει το σχήμα.

1.32 Αντιλαμβάνονται τον ρόλο των Η/Υ στην «επ' άπειρο» εφαρμογή ενός αλγορίθμου.

1.33 Βρίσκουν σχήματα που είναι Φράκταλς (φύση, τέχνη)

1.40 Εισάγονται στην έννοια του ορίου

1.41 Συμπληρώνουν τους αντίστοιχους πίνακες με τις περιμέτρους και τα εμβαδά.

2.00 Ανταπόκριση στον τρόπο διδασκαλίας

Οι μαθητές κατακτούν σταδιακά τους παιδαγωγικούς στόχους

2.10 Λειτουργούν σαν ομάδα

2.11 Δεν πετάγεται καθ' ένας μόνος του να ανακοινώσει πρώτος αυτός κάτι.

2.12 Δεν διαπληκτίζονται έντονα, ανίκανοι να «συμβιώσουν».

2.20 Συνεργάζονται αποτελεσματικά

2.21 Ο ένας συμπληρώνει τον άλλο.

2.22 Ακούει ο ένας τον άλλο προσεκτικά και διορθώνουν, αν χρειάζεται, με ευγένεια.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ανδρεαδάκης, Σ. & ά. (2001). *Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης*. Αθήνα: ΟΕΔΒ

Αραχωβίτης, Ι. (2001). *Εισαγωγή στη χαοτική δυναμική & στα κλασμοειδή*. Αθήνα : Παπασωτηρίου

Αργυρόπουλος, Η. & ά. (2003). *Ευκλείδεια Γεωμετρία*. Αθήνα: ΟΕΔΒ

Βάμβουκας, Μ. (2000). *Εισαγωγή στην Ψυχοπαιδαγωγική Έρευνα και Μεθοδολογία* (6^η έκδοση). Αθήνα: Γρηγόρης.

Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ) (2002), Υπουργείο
εθνικής παιδείας και θρησκευμάτων. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Ζαράνης, Ν. Δραστηριότητες με εκπαιδευτικό λογισμικό... *Πρακτικά 1^{ου} Συνεδρίου της ΤΠΕ στην εκπαίδευση*, Σύρος

Κασιμάτη, Α., Γιαλαμάς Β. (1998). Τα «πιστεύω» (beliefs) των καθηγητών για τη μάθηση και διδασκαλία των Μαθηματικών: Μια πρώτη ερευνητική προσέγγιση. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. Τμήμα Ερευνών. *Πρακτικά 15^{ου} Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΜΕ*, σ. 319

Κατσαρού, Ε., Τσάφος, Β.(2003). *Από την έρευνα στη διδασκαλία. Η εκπαιδευτική έρευνα δράσης*. Αθήνα: Σαββάλας

Καψάλης Α. & Λεμονίδης, Χ. (1999). Σύγχρονες τάσεις της Διδακτικής των Μαθηματικών. *Μακεδόν*, 6, σ. 95-115.

Κεκές, Ι. (2000). Εκπαιδευτική Έρευνα και Σχολείο: Προκλήσεις και Αναγκαιότητες στην Κοινωνία της Πληροφορίας. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. *Επιθεώρηση Επιστημονικών και Παιδαγωγικών Θεμάτων*, 3, σ. 16 – 44.

Μακρίδης, Γ. (1993). Fractals σαν εργαλείο δημιουργίας αλλά και εκτίμησης της δύναμης των μαθηματικών από τους μαθητές. *Πρακτικά 10ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΜΕ*.

Μακρίδης, Γ. (1994). Κατασκευή μορφοκλάσματος (Fractal) με τον Ηλεκτρονικό Υπολογιστή. *Πρακτικά 11ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΜΕ*.

Μαμωνά-Downs. (1998). Οριακές διαδικασίες επιπέδων σχημάτων και η παιδαγωγική τους σημασία. Πρακτικά 15ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΜΕ: *Τα Μαθηματικά στις Νέες Εκπαιδευτικές Συνθήκες*, 13-14-15 Νοεμβρίου 1998, Χίος.

Ματσαγγούρας, Η. (1998). Η έρευνα δράση στη σχολική τάξη. *Πρακτικά 1ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ελληνικής Παιδαγωγικής Εταιρίας*.

Μαυρογιώργος, Γ. (2003). Ανιχνεύοντας την εκπαιδευτική πολιτική για τον εκπαιδευτικό στα επιχειρησιακά προγράμματα (ΕΠΕΑΕΚ) του ΥΠΕΠΘ. *Ο εκπαιδευτικός και η ευρωπαϊκή διάσταση στην εκπαίδευση*. Αθήνα: Μεταίχμιο.

Μπαρκάτσας, Ν. (2003). Πεποιθήσεις Ελλήνων καθηγητών και συμβούλων των μαθηματικών σχετικά με τα μαθηματικά, τη διδακτικομαθησιακή διαδικασία και την αξιολόγηση: Βιοδεδομένα που τις επηρεάζουν. *Θέματα στην Εκπαίδευση*, τόμος 4, τεύχος 2-3. Αθήνα: Leader Books, σ. 227-252.

Μπούντης, Τ. (2004). *Ο θαυμαστός κόσμος των Fractals*. Αθήνα: Leaders Books.

Ντζιαχρήστος, Β. & Ζαράνης, Ν. (2002). Κριτική Ανάλυση του μοντέλου van Hiele. *Θέματα στην Εκπαίδευση*, τόμος 3, τεύχος 2-3. Αθήνα: Leader Books, σ.140-141.

Οικονόμου, Π., Τζεκάκη, Μ. (1999). Στάσεις, Αντιλήψεις και πρακτικές των εκπαιδευτικών στη διδασκαλία των μαθηματικών. *Ερευνητική Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών*, 4, σ. 37-65.

Τουμάσης, Μ. (1987). Μια ανασκόπηση του παγκόσμιου σκηνικού της Β/θμιας εκπαίδευσης, τα τελευταία 200 χρόνια, *Ευκλείδης* γ 16. Αθήνα: ΕΜΕ

Τσάφος, Β. (1998). Ο εκπαιδευτικός – ερευνητής και η διδασκαλία της δραματικής ποίησης από μετάφραση στο γυμνάσιο. Διδακτορική διατριβή στον τομέα της Παιδαγωγικής, του τμήματος ΦΠΨ, του πανεπιστημίου Αθηνών.

Χρηστίδης Θ. (1997). *Χάος και πιθανολογική αιτιότητα: Μεταξύ προκαθορισμού και τύχης. Μια σπουδή των φυσικών εννοιών και αρχών*. Θεσσαλονίκη: Βάνιας.

Χρονάκη, Α. (1997) Case Studies in the Teaching of Mathematics through the use of Art-Based Activities . Διδακτορική διατριβή

Bishop, A.(1998). Mathematics education in its cultural context. *Educational Studies in Mathematics*, 19, p. 179-191.

Bloom, B.S. & Krathwohl, D.R. (1991). *Ταξινομία Διδακτικών Στόχων, Τόμος Β΄ -Συναισθηματικός Τομέας*, μτφρ. Λαμπράκη-Παγανού, Α. Θεσ/νίκη: Κώδικας

Cabay, T. (1991). The Activity Theory of Learning and Mathematics Education in the USSR. F. Furinghetti (ed.), Assisi, Italy. *Proceedings of the 15th PME Conference*. Vol. I., p. 49-56

Carr, W. & Kemmis, S. (1997). Για μια Κριτική Εκπαιδευτική Θεωρία. Εκπαίδευση, Γνώση και έρευνα δράσης, μτφρ. Λαμπράκη-Παγανού, Μηλίγκου, Ροδιάδου-Αλμπάνη. Αθήνα:Κώδικας

Craine, T. (1985). Integrating Geometry into the Secondary Mathematics Curriculum. In *The Secondary School Mathematics Curriculum* (Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), edited by Christian R. Hirsch), p. 119

Creene, G.(1992) The practioner's perspective , *Curriculum Inquiry*, 22, p. 39-45

Descartes. (1976). *Λόγος περί της Μεθόδου*, εισαγ.-μτφρ.-σχόλια Χρ. Χρησιτίδης (2^η έκδοση). Αθήνα: Παπαζήσης.

Devaney, R. (1990). *Chaos, Fractals and Dynamics*. Addison-Wesley

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics* 38(1-3), p. 85-109.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London: The Press

Eves, H. (1989). Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών. Αθήνα: Τροχαλία

Jones,K. (2000). Critical Issues in the Design of the School Geometry Curriculum. *Reading in Mathematics Education*. University of Auckland (New Zealand): Bill Barton, p. 75-91

Keitel, C., Damarow, P., Bishop, A. and Gerdes, P. (1989). *Mathematics Education and Society*. Paris:Unesco Document Series.

Lerman, S. (1996). Guest Editorial. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 31

Mammana, C. and Villani, V. (1998). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. An ICMI study. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Mandelbrot, B.(1986). *The Fractal geometry of Nature*. San Francisco: W.H. Freeman

Roger, D. & ο. (2003). About this Book. *Navigating through Geometry in Grades 9-12*. USA: NCTM

Regis, Ed. (1995). *Ποιος πήρε την καρέκλα του Αϊνστάιν;* Αθήνα: Τροχαλία

Stewart, I. (1988). *Παίζει ο θεός ζάρια; Η επιστήμη του Χάους* (10^η έκδ.). Αθήνα: Τραυλός.

Streefland, Leen (2000). *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση*, εισαγ.-μτφρ. Ευγενίας Κολέζα. Αθήνα: Leader Books..

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher*, 78(6)

Vilenkin, N. Ya. (1997). *Αναζητώντας το άπειρο*. Αθήνα: Κάτοπτρο.

Weber, R. *Επιστήμονες και Άγιοι*. Αθήνα: Ιάμβλιχος

Williams, E. (1980) An investigation of senior high school students' understanding of the nature of mathematical proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 11

Βασικές Αρχές του Θετικισμού. Ανακτήθηκε Φεβρουάριο του 2005 από http://hyperion.math.upatras.gr/courses/sts/lect/2_1.html.

Ένας οδηγός του Χάους για αρχάριους. Ανακτήθηκε τον Φεβρουάριο του 2005 από <http://www.physics4u.gr/chaos/chaos1.html>.

Η διαμάχη για την ερμηνεία της κβαντικής μηχανικής. Ανακτήθηκε το Μάρτιο του 2005 από <http://www.physics4u.gr/articles/2002/disputequantum.html>.

Ποιά κριτική κάνει στην κλασσική θεωρία ο Prigogine; Ανακτήθηκε το Μάρτιο του 2005 από <http://www.physics4u.gr/chaos/prig2.html>.

Bohm David. (1917-1992). Ένας από τους βαθύτερους στοχαστές του αιώνα. Ανακτήθηκε το Μάρτιο του 2005 από <http://www.physics4u.gr/articles/2002/bohm.html>.

Bohm David (1917-1992). Ένας από τους βαθύτερους στοχαστές του αιώνα. Ανακτήθηκε το Μάρτιο του 2005 από <http://www.physics4u.gr/articles/2002/bohm.html>

Bohr Niels (1885 - 1962). 40 χρόνια από το θάνατο του ανθρώπου με την βαθύτερη σκέψη. Ανακτήθηκε το Μάρτιο του 2005 από <http://www.physics4u.gr/articles/2002/bohr.html>

Chae, S.D. & Tall, T. Aspects of the construction of conceptual knowledge: the case of computer-aided exploration of period doubling. *From Informal Proceedings 19-2 (BSRLM)*. Ανακτήθηκε το Μάρτιο του 2004 από <http://bsrlm.org.uk>

Cockcroft, W. (1982). Mathematics Counts (The Cockcroft report). HMSO (Her Majesty's Stationery Office). Ανακτήθηκε Φεβρουάριο του 2005 από http://www.nrdc.org.uk/uploads/documents/doc_2977.pdf

Devaney, Robert L. Chaos, Fractals, and Arcadia. Ανακτήθηκε Φεβρουάριο του 2005 από <http://math.bu.edu/DYSYS/arcadia/sect1.html>

A Table of Fractal Information. Ανακτήθηκε το Μάιο του 2005 από <http://spanky.triumf.ca/>:

Fractal Art as a Subset of Digital Art. Ανακτήθηκε το Μάιο του 2005 από <http://www.fractalus.com/info/fractalart.htm>

Fractals. Ανακτήθηκε το Μάρτιο του 2005 από <http://www.io.com/~iareth/fractal.html>

Jones, K. and Rodd, M. (2001). Geometry and Proof. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 21(1), p. 95-100. Ανακτήθηκε το Μάρτιο του 2004 από <http://bsrlm.org.uk>

Jones, K and Taro F. (2001). Developing a new pedagogy for Geometry. British Society for Research into Learning Mathematics. From Informal Proceedings 21-1 (BSRLM). Ανακτήθηκε το Μάρτιο του 2004 από <http://bsrlm.org.uk>

Koch snowflake. Ανακτήθηκε το Μάιο του 2005 από http://en.wikipedia.org/wiki/Koch_curve.

Lanius, S. A Fractals Unit for Elementary and Middle School Students. Ανακτήθηκε τον Φεβρουάριο του 2005 από <http://math.rice.edu/%7elanius/frac/>

Matthew A. Trump. What is Chaos? An Interactive Online Course for Everyone ..by Dr Ilya Prigogine Center for Studies in Statistical Mechanics and Complex Systems Univ. of Texas at Austin. Ανακτήθηκε τον Απρίλιο του 2005 από <http://www.utexas.edu/>.

McNiff, Jean. Action research with Jean McNiff. Ανακτήθηκε τον Οκτώβριο του 2005 από http://jeanmcniff_com:

The Mathematical Association - supporting mathematics in education.
Ανακτήθηκε το Μάιο του 2005 από www.m-a.org.uk/

Mathematical Fractals. Ανακτήθηκε τον Φεβρουάριο του 2005 από <http://web.bu.edu/>

Contemporary Mathematics and Technology as a Driving Force for School Reform : Chaos and Fractal Teaching. Ανακτήθηκε το Μάρτιο του 2005 από <http://www.bu.edu/smec/project.html>

Mathematics Teaching Conference 2006: A Conference for Teachers of Mathematics in Primary and Secondary Schools. Ανακτήθηκε τον Φεβρουάριο του 2005 από www.atm.org.uk/

Sierpinska, A. Didactic Situations. Ανακτήθηκε τον Ιανουάριο του 2003 από [http://alcor.concordia.ca/~sierp/TDSLecture% \(από 201-209\).pdf](http://alcor.concordia.ca/~sierp/TDSLecture%20(από%20201-209).pdf)