

Η Άντι και η Πράξη σε αντίπραξη (από τον καφέ στα κλάσματα ή από τη διαδικασία στην κατανόηση)

- Τι καλά που βρεθήκαμε, Πράξη μου, για έναν καφέ· έσκασα κλεισμένη με την καραντίνα.
- Αντιγόνη, σου είπα πολλές φορές δε με λένε Πράξη, θέλω να λες ολόκληρο το όνομά μου. Ευ-πρα-ξία!
- Καλά, μωρέ, πώς κάνεις έτσι; Εμένα δε με πειράζει που δε με λες Άντι, όπως με φωνάζουν όλοι, και με λες Αντιγόνη. Πάντα έτσι σχολαστική και ιδιότροπη ήσουν από τα φοιτητικά μας χρόνια. Αλήθεια, τι νέα από τα άλλα παιδιά, τη Γωγώ, τον Δημήτρη, την Έλλη; Εγώ δεν προλαβαίνω να επικοινωνήσω με κανέναν με τόσες δουλειές.
- Τα τελευταία νέα είναι από την Έλλη. Μετά από 15 χρόνια αναπληρώτρια επιτέλους γυρνάει στο σπίτι της στα Γιαννιτσά και θα την έχουμε κοντά κι αυτή.
- Δεν το πιστεύω! Έρχεται η Έλλη...;

- Μαμά, σε παρακαλώ, χρειάζομαι βοήθεια με αυτά τα κλάσματα, δεν καταλαβαίνω τίποτα! *αναφωνεί ο γιος της Αντιγόνης διακόπτοντας τη συζήτηση.*
- Ναι, παιδί μου! Είμαστε εδώ δύο δασκάλες. Τη θυμάσαι τη φίλη μου την Ευπραξία, που είμασταν μαζί φοιτήτριες στη Φλώρινα;
- Γεια σου, Γιωργάκη. Πώς ψήλωσες έτσι! Έχω να σε δω έναν χρόνο.
- Γεια σας, κυρία Ευπραξία. Τι κάνει ο Νίκος;
- Γιωργάκη, αν και μας διακόπτεις, ποιο είναι το πρόβλημά σου με τα κλάσματα; Φέρ' το εδώ να σου το λύσουμε. Όπως σου είπα, είμαστε εδώ δύο δασκάλες και μάλιστα η μαμά έχει και πτυχίο μαθηματικών.
- Καλά - καλά, Αντιγόνη μου, τα ξέρουμε! Έχεις δύο πτυχία, τρία μεταπτυχιακά και κάνεις και διδακτορικό με την Πετράκη στη «Διοίκηση της Εκπαίδευσης». Τα έχουμε ακούσει πολλές φορές. Πτυχιομαζώχτρα¹! *σκέφτηκε από μέσα της η Ευπραξία.*
- Χρυσή μου, αυτά τα έκανα με πολύ κόπο και, όπως ξέρεις, με βοήθησαν για να γίνω περιφερειακή διευθύντρια εκπαίδευσης. Και δεν θέλω να μου λες τέτοια!
- Ας μην ερχόταν το κόμμα σας στην κυβέρνηση και θα σου έλεγα τι θα γινόσουν, *σκέφτηκε από μέσα της η Ευπραξία, αλλά δεν τόλμησε να το ξεστομίσει.*
- Να, εδώ! Πώς κάνουμε το $2\frac{3}{4}$ κλάσμα, *είπε ο Γιωργάκης που ήρθε με το βιβλίο του.*
- Γιωργάκη, σου το είπα και την άλλη φορά. Λες 2 επί 4 οκτώ συν 3 κάνει 11, το βάζεις αριθμητή και αφήνεις παρονομαστή το 4. Να το, $\frac{11}{4}$! Αυτή είναι η απάντηση, *είπε η μαμά που ερχόταν από την κουζίνα με τους καφέδες.*
- Δεν το καταλαβαίνω, ρε μαμά!

Η Άντι πήρε το περισπούδαστο δασκαλίστικο ύφος της από την πρόκληση του κανακάρη της και από την παρουσία αυτής της τσούχτρας, που δε την πολυσυμπαθούσε κατά βάθος.

- Τι δεν καταλαβαίνεις, αγόρι μου; Αυτό το λέμε “μεικτό κλάσμα”, γιατί αποτελείται από έναν ολόκληρο αριθμό, το 2, και ένα κλάσμα το $\frac{3}{4}$. Πώς το μετατρέπουμε σε κλάσμα; Πολλαπλασιάζουμε τον ακεραίο με τον παρονομαστή, 2 επί 4, και ό,τι βρούμε το προσθέτουμε με τον αριθμητή, 8 και 3 11 και αυτό το βάζουμε αριθμητή στο καινούριο

¹ από το σταχομαζώχτρα στο διήγημα του Παπαδιαμάντη.

κλάσμα. Ο παρονομαστής μένει ο ίδιος. Ορίστε, $\frac{11}{4}$. Και μάλιστα πάντα το κλάσμα που βρίσκουμε είναι καταχρηστικό. Ο κανόνας είναι “πολλαπλασιάζω τον φυσικό αριθμό με τον παρονομαστή, προσθέτω τον αριθμητή και αυτό που βρίσκω το βάζω αριθμητή και παρονομαστή κρατάω τον ίδιο αριθμό”. Κάν’ το με πολλά παραδείγματα, για να θυμάσαι τον κανόνα απ’ έξω.

- Πουφ! *είπε ο Γιωργάκης άκεφος και με πρόσωπο που έδειχνε δυσφορία.*

Η Άντι μπροστά σε αυτή την αντίδραση του γιου της επιστράτευσε όλες τις διδακτικές της ικανότητες, χρησιμοποιώντας μάλιστα και γνώσεις από το Μαθηματικό. Για να μην την κουνιέται στα μαθηματικά κι αυτή η τσουύχτρα που ήταν μπροστά.

- Κοίτα, παιδί μου! Στον αριθμό $2\frac{3}{4}$, που είπαμε ότι είναι ένα μεικτό κλάσμα, το 2 μπορούμε να το γράψουμε σαν κλάσμα $\frac{2}{1}$ κι έτσι θα έχουμε την πρόσθεση $\frac{2}{1} + \frac{3}{4}$. Εδώ κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα με τον γνωστό τρόπο, βάζουμε καπελάκια $\frac{2}{1} + \frac{3}{4}$, βρίσκουμε $\frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$. Αυτό που σου έλεγα!!! Κατάλαβες τώρα; *είπε με βαθυστόχαστο ύφος η Άντι.*

Ο Γιωργάκης συνέχισε να κοιτά με το ίδιο απλανές βλέμμα. Εκείνη την ώρα χτύπησε το κινητό και η Άντι μπήκε στην κουζίνα να μιλήσει. Γύρισε αναστατωμένη μετά από λίγο και απολογήθηκε.

- Χίλια συγγνώμη, χρυσή μου! Με καλούν εκτάκτως στο γραφείο για περιφερειακή συνάντηση. Θα έρθει διαδικτυακά η Υπουργός! Ευπραξία μου, συγγνώμη και πάλι που πρέπει να φύγω, αλλά εσύ μείνε, σε παρακαλώ, να πεις το καφεδάκι σου. Πείτε τα και με τον Γιωργάκη, ευκαιρία να τον βοηθήσεις με τα μαθηματικά.

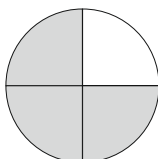
Σε λίγο η Ευπραξία έμεινε μόνη με τον Γιωργάκη σε ένα κλίμα αμηχανίας. Το ερωτηματικό βλέμμα του παιδιού, που έμοιαζε με βλέμμα υποταγής σκύλου προς το αφεντικό του, πυροδότησε το διδακτικό ένστικτο της Ευπραξίας. Η γυναίκα ένοιωσε ξαφνικά την ανάγκη να διδάξει τον Γιωργάκη και να του δώσει να καταλάβει. Ήταν γι’ αυτήν ύψιστο καθήκον. Διδάσκουμε τα μαθηματικά σε όλους τους μαθητές. Είδε τον Γιωργάκη σαν ένα παιδί τραυματισμένο, χτυπημένο από το αυτοκίνητο της φορμαλιστικής διδασκαλίας που έπρεπε να το βοηθήσει και να το σώσει, δίνοντας του αίμα. Το αίμα της κατανόησης!

- Θέλεις, Γιωργάκη μου, να δούμε τα μαθηματικά σου μαζί;

Η ερώτηση της Ευπραξίας έμοιαζε με σχήμα λόγου. Ο Γιωργάκης καθόταν ήδη μπροστά της, έτοιμος και επηρεασμένος από το φάσμα των διδακτικών κυμάτων επικοινωνίας που εξέπεμπε η Ευπραξία.

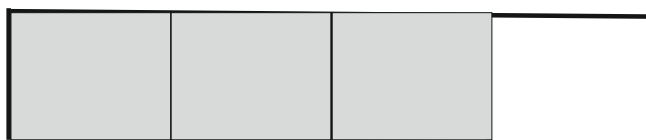
- Γιωργάκη, φέρε, σε παρακαλώ, από το δωμάτιό σου έναν χάρακα και χρωματιστές μπογιές.
- Θα ζωγραφίσουμε, κυρία Ευπραξία; *ρώτησε παραξενεμένος ο Γιωργάκης.* Γιατί συνήθως στα μαθηματικά δε ζωγραφίζουμε, συμπλήρωσε.
- Ναι, θα ζωγραφίσουμε τα κλάσματα, *είπε η Ευπραξία σε λίγο που βρέθηκαν στο τραπέζι οι δυο τους.* Πώς σκέφτεσαι το $\frac{3}{4}$; Μπορείς να το ζωγραφίσεις;
- Α, το σκέφτομαι σαν κύκλο χωρισμένο στα τέσσερα, σαν πίτσα.
- Πολύ ωραία! Ζωγράφισέ το.

Ο Γιωργάκης με χαρά πήγε κι έφερε από μέσα και το διαβήτη, για να κάνει ωραία σχήματα. Γιατί του άρεσε να σχεδιάζει. Μάλιστα έλεγε ότι θέλει να γίνει αρχιτέκτονας. Σχεδίασε λοιπόν ο Γιωργάκης έναν κύκλο, τον χώρισε σε τέσσερα ίσα μέρη, χαράζοντας δύο διαμέτρους κάθετα, και γραμμοσκίασε τα τρία από τα τέσσερα μέρη.



- Να, το $\frac{3}{4}$, είπε.
- Μπορείς να το ζωγραφίσεις και σε μια λωρίδα; Σαν λεπτό ορθογώνιο;

Αμέσως ο Γιωργάκης σχεδίασε ένα λεπτό ορθογώνιο, το χώρισε στη μέση και κάθε κομμάτι το ξαναχώρισε στη μέση. Έτσι είχε 4 ίσα κομμάτια, από τα οποία έβαψε τα 3.



- Πολύ ωραία το έκανες! Ξέρεις, αυτό το λέμε “κλασματική λωρίδα”. Τώρα, εσύ που σχεδιάζεις ωραία, θα μπορούσες να σχεδιάσεις το $\frac{3}{4}$ επάνω σε μία ευθεία γραμμή;

Ο Γιωργάκης τράβηξε μια γραμμή οριζόντια, αλλά μετά προβληματίστηκε. Δεν ήξερε τι να κάνει.



Το καινούριο τους βιβλίο της Ε΄ τάξης είχε εικόνες με κλάσματα σε γραμμές, αλλά ο δάσκαλος δεν τους ζήτησε ποτέ να σχεδιάσουν ένα τέτοιο σχήμα, ένα κλάσμα δηλαδή επάνω σε γραμμή. Δε φαίνεται και τόσο εύκολο. Η Ευπραξία, για να τον βοηθήσει, του είπε:

- Βάλε επάνω στην ευθεία το 0 και το 1, πάρε δηλαδή ένα διάστημα με μήκος 1 που να είναι αρκετά μεγάλο.

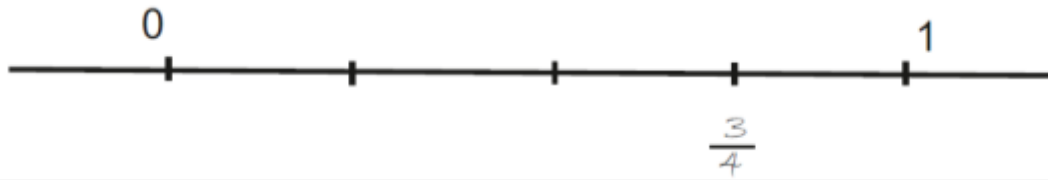
Ο Γιωργάκης σημείωσε επάνω στην ευθεία τα σημεία 0 και 1, όπως του είπε η κυρία Ευπραξία.



Τώρα του ήρθε μια ιδέα να χωρίσει το τμήμα αυτό σε τέσσερα ίσα μέρη, για να έχει τα τέταρτα. Το χώρισε πρώτα στη μέση και κάθε κομμάτι πάλι στη μέση.

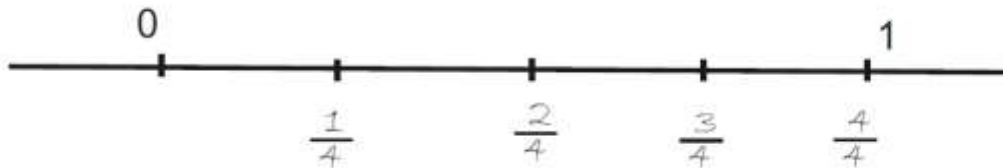


- Να, εδώ θα είναι το $\frac{3}{4}$, φώναξε με χαρά.



- Μπορείς να σημειώσεις και τα άλλα κλάσματα;

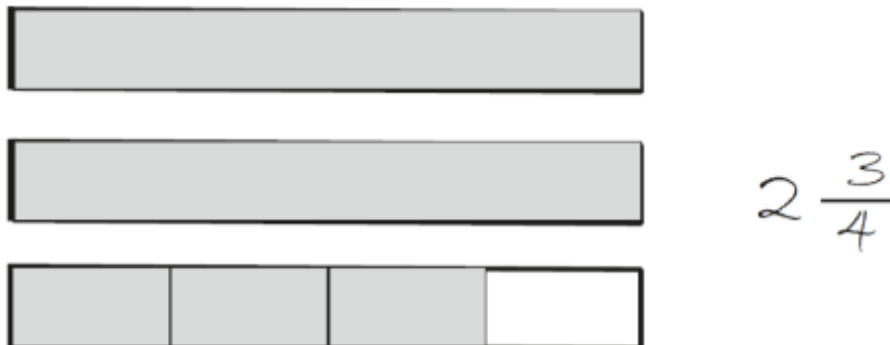
Ο Γιωργάκης έγραψε επάνω στην ευθεία το $1/4$, τα $2/4$ και, αφού σκέφτηκε λίγο, έγραψε και το $4/4$ που ήταν ίδιο με το 1. Ήταν χαρούμενος που σχεδίασε τώρα μια άλλη εικόνα με τα κλάσματα.



- Είναι τα κλάσματα επάνω στην αριθμογραμμή, του είπε η κυρία Ευπραξία. Ας πάμε να σχεδιάσουμε τώρα αυτό που σε δυσκόλεψε, το $2\frac{3}{4}$, του ξαναείπε. Μπορείς να το σχεδιάσεις με λωρίδες, όπως κάναμε πριν;

Ο Γιωργάκης, αφού σκέφτηκε λίγο, σχεδίασε δύο ολόκληρες λωρίδες και μία τρίτη που τη χώρισε στα τέσσερα και σημείωσε τα $\frac{3}{4}$.

- Γράψε δίπλα το κλάσμα, του είπε η κυρία Ευπραξία και ο Γιωργάκης ανταποκρίθηκε.



- Πολύ ωραία! είπε η κυρία Ευπραξία. Μπορείς τώρα να χωρίσεις και τις δύο ολόκληρες λωρίδες σε τέσσερα ίσα μέρη την καθεμία;

Ο Γιωργάκης το έκανε και η κυρία Ευπραξία τον επαίνεσε.



- Πολύ ωραία τις χωρίσεις. Μπορείς να γράψεις τώρα πόσα τέταρτα είναι;

Ο Γιωργάκης σκέφτηκε λίγο και έγραψε το κλάσμα $11/4$.



$$\frac{11}{4}$$

- Τι παρατηρείς λοιπόν; τον ρώτησε η κυρία Ευπραξία.

Ο Γιωργάκης παρατηρούσε τα σχήματα και τα κλάσματα δίπλα, έβλεπε ότι ήταν ίδια, αλλά είχε μπερδευτεί. Δεν καταλάβαινε πώς είχε φτάσει μέχρι εδώ. Η κυρία Ευπραξία ανέλαβε και πάλι να του ανοίξει τον δρόμο.

- Ας βάλουμε τα πράγματα σε μια σειρά. Έχουμε το αρχικό μας κλάσμα, το $2\frac{3}{4}$. Από ποια μέρη αποτελείται;
- Από το 2 και το $\frac{3}{4}$.
- Πώς σχεδιάσαμε το 2;
- Με δύο λωρίδες.
- Και, όταν τις χωρίσαμε σε τέταρτα, πόσο ήταν οι δύο λωρίδες;
- $4/4$ και $4/4$ ίσον $8/4$.
- Άρα, πώς μπορούμε να γράψουμε αλλιώς το $2\frac{3}{4}$ σαν πρόσθεση με κλάσματα;
- $\frac{8}{4} + \frac{3}{4}$ και αυτό κάνει $\frac{11}{4}$. Αυτό που έλεγε η μαμά, αλλά τώρα το βλέπω. Το δύο μπορώ να το γράψω $\frac{8}{4}$. Το βλέπω και στην εικόνα και, αν προσθέσω άλλα $\frac{3}{4}$, θα έχω $\frac{11}{4}$.
- Αν έχουμε δηλαδή ένα μεικτό κλάσμα - ας πάρουμε ένα άλλο, π.χ. το $2\frac{2}{3}$ - τι κάνουμε;
- Ζωγραφίζουμε το 2 και το $2/3$, κάνουμε το 2 όπως τα $2/3$. Δηλαδή το κάνουμε $3/3$ και $3/3$ που είναι $6/3$ προσθέτω και άλλα $2/3$ και όλο θα είναι $8/3$.
- Μπορείς λοιπόν να μου πεις, τι θα κάνουμε για όλα τα μεικτά κλάσματα, όπως το $3\frac{2}{5}$;

- Θα κάνουμε τον ολόκληρο αριθμό κλάσμα, όπως είναι το $2/5$, δηλαδή πέμπτα. Το 3 είναι $15/5$ - το φαντάζομαι ήδη σε εικόνα. Και μετά θα προσθέτουμε και το άλλο κλάσμα. Μάλιστα! Τώρα το καταλαβαίνω, το βλέπω με τις εικόνες. Αλλά εγώ θέλω να υπολογίζω και να τα σχεδιάζω.
- Πολύ ωραία, λοιπόν! Από δω και πέρα θα υπολογίζεις, θα σχεδιάζεις ή θα φαντάζεσαι το σχέδιο με τα κλάσματα, *είπε η μαμά του Γιωργάκη που είχε επιστρέψει από το webex meeting...*